

考研 数学

线性代数专项辅导

中公教育研究生考试研究院◎编著

书内含码 码上有课

(手机扫描书内二维码, 在线观看题目视频讲解)

购书享有
移动自习室



核心考点免费学+在线题库任意练+考友圈答疑解惑+视频直播随时看

世界图书出版公司

offcn 中公考研

考研数学

线性代数专项辅导

中公教育研究生考试研究院◎编著

世界图书出版公司

北京·广州·上海·西安

图书在版编目(CIP)数据

考研数学·线性代数专项辅导 / 中公教育研究生考试研究院编著. —北京:世界图书出版公司北京公司, 2016. 11

ISBN 978-7-5192-1250-6

I. ①考… II. ①中… III. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 ②线性代数-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 280527 号

考研数学·线性代数专项辅导

编 著:中公教育研究生考试研究院

责任编辑:张文丽

特约编辑:汪鹏飞

装帧设计:中公教育图书设计中心

出 版:世界图书出版公司北京公司

发 行:世界图书出版公司北京公司

(地址:北京朝内大街 137 号 邮编:100010 电话:64077922)

销 售:各地新华书店

印 刷:三河市海新印务有限公司

开 本:850mm×1168mm 1/16

印 张:11.5

字 数:276 千

版 次:2017 年 1 月第 1 版 2017 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5192-1250-6

定 价:28.00 元

如有质量或印装问题,请拨打售后服务电话 010-82838515

中公考研

让考研变得简单

★千人专职教师团队

教学良好

师资优势



线上服务平台

★随时、随地、随到、随学

成为现实



★优美、清新的教学环境

有利学习

环境优势



个性化辅导

★讲、练、考、评，闭环式

辅导模式



传承中公教育重教研、重教学、重服务的基因

2018新版图书

★注重用户体验

★内容自主研发

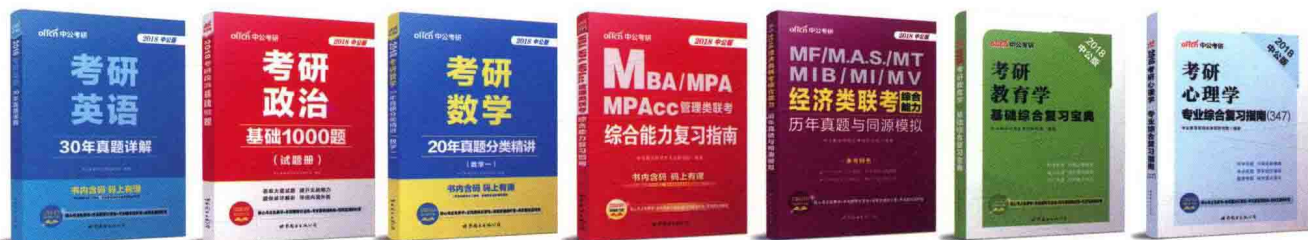
★版式优美轻松阅读

★依据大纲变化编写

中公考研隶属于中公教育，汇聚了以彭学军、李擂、杨凤芝、杨攀、马玉涛等为核心的专职辅导师资。强大的师资队伍多毕业于中国科学院、北京大学、清华大学等院校，拥有深厚的学科专业背景。这支团队历经多年，研发出了科学的TOP教学体系。此外，分布在全国31个省级分部的师资团队也为学员提供着优质的学习服务。

中公考研图书产品

以下仅为部分图书，更多图书详见中公图书商城 book.offcn.com



咨询电话：400-6300-966

更多课程在线购买：<http://e.kaoyan365.cn/>

中公考研直播

更低成本 冲刺名校

考研直播课堂 足不出户与授课老师互动交流

我们的优势

方便

足不出户,实现与授课老师零距离交流

快捷

无需东奔西走,在家就能上课,节约时间

实用

授课老师总结概括核心考点,精练实用

省心

教务老师全程进行学习管理,省心省力

我们的课程

科目	课时	价格	优惠
政治全年学习卡	194	999元	公共课联报: 两科联报1499元 三科联报1999元
英语全年学习卡	204	999元	
数学全年学习卡	226	999元	
(312)心理学学习卡	192	999元	全科 (公共课+专业课) 2299元
(398、498)法硕(非法学)学习卡	214	999元	
(311)教育学学习卡	170	999元	
(高鸿业版)宏、微观经济学学习卡	102	499元	
(周三多版)管理学学习卡	66	399元	
金融硕士-金融学学习卡	78	399元	

咨询电话: 400-6300-966

更多课程在线购买: <http://e.kaoyan365.cn/>

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com



扫码查找课程

前言

近年来,全国硕士研究生招生考试竞争日趋激烈,备考难度越来越大。考研数学常常让考生叫苦不迭!考研数学主要表现出以下三个特点:

特点一:试题量大——考研数学共 23 小题,150 分。考试题型有三种,分别为单项选择题、填空题和解答题(包括证明题)。单项选择题有 8 小题,填空题有 6 小题,每题均 4 分;解答题有 9 小题,其中 5 小题每题 10 分,另外 4 小题每题 11 分。许多考生在 180 分钟的考试时间内完不成所有的题目。

特点二:知识点多——考查内容包括高等数学(数学三是微积分)、线性代数、概率论与数理统计(数学二不考查)。按照考试大纲的要求,数学一分为 22 章,数学二分为 11 章,数学三分为 19 章。每一章又细分出众多考点,这不仅使数学的考试范围相对较广,也无形中加大了考生的复习难度。

特点三:综合性强——考研数学题目设置灵活,经常会综合考查多个知识点。多数考生由于对基础知识、基本方法等复习不到位,常常无法找全题目涉及的考点和解题的切入点,有时甚至无从下笔。

基于以上三个特点,中公教育研究生考试研究院结合众师资的教学经验,以及在授课过程中发现的考生的薄弱环节,特编写了“考研数学·专项辅导”丛书。该丛书包括《考研数学·高等数学专项辅导(数学一、二适用)》《考研数学·微积分专项辅导(数学三适用)》《考研数学·线性代数专项辅导》《考研数学·概率论与数理统计专项辅导》四本,适合单科薄弱的考生使用。

考生在学习过程中,可以从以下四个方面做起:

把握内在联系

本丛书每章开头的【学习提要】对本章做了简单的说明,【考试要求】是对考试大纲的重现。从【学习提要】和【考试要求】两个模块考生可以大致了解本章知识点与其他章节之间的联系以及考试大纲对本章各考点的具体要求。此外,【本章知识框架图】再现了本章知识网络,并依据考试大纲不同程度的要求做了标记,大纲中要求“理解”的考点标记“☆”,要求“掌握”和“会”的考点标记“★”,考生可以通过框架图了解本章的结构。

夯实数学基础

数学属于逻辑性较强的演绎学科,各知识点之间的层次关系和相互联系错综复杂。考生要深入理解常见的基本概念,牢牢掌握重要考点和公式,理清各知识点之间的联系,做到不偏不漏。本丛书每章的【基础知识讲解】模块以浅显的角度切入,详细地讲述了本章涉及的基本概念、重要定理和性质,旨在帮助考生打牢数学基础,为后续的例题精讲做好准备。

吃透典型例题

本丛书在例题的设置和编排上尽量做到细致有序。【典型例题与方法技巧】模块对各考点涉及的题型做了细致的分类,每道题目不仅提供了详细的答案解析,而且在“方法技巧”中还指出了解题思路、注意事项等。考生可以通过这些例题进一步了解每个考点的出题角度和考查方式,拓展自己的视野,并总结出适合自己的解题方法和答题策略,力争做到活学活用。

精练同步习题

本丛书的【本章同步练习题】模块筛选了适量习题,供考生自测自查。部分题目配有二维码,考生扫码即可观看视频讲解。为了达到自测效果,考生可以先独立做题,再结合【同步练习题答案解析】查漏补缺,这样能加深自己对错题的记忆和理解,明确自己的不足,找准尚需努力的方向。

理想与您同在,我们与您同行。“学员的事就是最重要的事”是中公教育的基本价值观之一,也是我们中公人不变的追求。殷切希望广大考生给我们提出宝贵意见,促进我们更快成长,让我们的图书更好地帮助更多的考生。

中公教育研究生考试研究院

2017年1月

目 录

第一章 行列式

学习提要	1
考试要求	1
本章知识框架图	2
基础知识讲解	3
一、行列式的概念	3
(一) 二阶行列式的概念	3
(二) 三阶行列式的概念	3
(三) n 阶行列式的相关概念	3
二、行列式的性质	4
三、行列式的计算	5
(一) 行列式按行(列)展开定理	5
(二) 递推法	5
(三) 归纳法	5
(四) 公式法	5
典型例题与方法技巧	6
题型 1——利用概念与性质的计算	6
题型 2——二阶与三阶行列式的计算	7
题型 3—— n 阶行列式的计算	8
题型 4——含参数行列式的计算	16
本章同步练习题	16
一、选择题	16
二、填空题	17
三、解答题	18
同步练习题答案解析	19
一、选择题	19
二、填空题	20
三、解答题	23

第二章 矩 阵

学习提要	27
考试要求	27
本章知识框架图	28
基础知识讲解	29
一、矩阵及其运算	29
(一) 矩阵的概念	29
(二) 几种特殊矩阵	29
(三) 有关矩阵的运算法则	30
二、逆矩阵及其运算	32
(一) 逆矩阵的概念	32
(二) 有关逆矩阵的运算法则	32
三、初等变换及矩阵的秩	33
(一) 初等变换	33
(二) 矩阵的秩	34
四、分块矩阵及其运算	35
(一) 分块矩阵的概念	35
(二) 分块矩阵的运算法则	35
典型例题与方法技巧	36
一、矩阵及其运算	36
题型 1——概念及运算法则的相关应用	36
题型 2——方阵的幂	37
题型 3——矩阵的可交换性	39
二、逆矩阵及其运算	39
题型 1——逆矩阵的计算及证明	39
题型 2——伴随矩阵的计算及证明	41
题型 3——矩阵方程	43
三、初等变换及矩阵的秩	45
题型 1——利用初等变换求矩阵的秩	45
题型 2——利用初等变换求逆矩阵	45
题型 3——初等矩阵	47
题型 4——求矩阵的秩	48
四、分块矩阵及其运算	49
本章同步练习题	50
一、选择题	50
二、填空题	51

三、解答题	52
同步练习题答案解析	53
一、选择题	53
二、填空题	55
三、解答题	57

第三章 向 量

学习提要	63
考试要求	63
本章知识框架图	64
基础知识讲解	65
一、向量组的相关知识	65
(一) 向量	65
(二) 向量组	65
二、向量空间的相关知识	67
(一) 相关概念(数一)	67
(二) 基变换公式和坐标变换公式(数一)	67
(三) 施密特正交化	68
(四) 正交矩阵及性质	69
典型例题与方法技巧	69
一、向量组的相关问题	69
题型1——线性表示与线性相关	69
题型2——向量组的等价问题	72
题型3——向量组的极大线性无关组和秩的问题	73
二、向量空间的相关问题	75
题型1——过渡矩阵的相关问题(数一)	75
题型2——正交规范化问题	76
题型3——正交矩阵的证明问题(数一)	76
本章同步练习题	77
一、选择题	77
二、填空题	79
三、解答题	79
同步练习题答案解析	80
一、选择题	80
二、填空题	84
三、解答题	86

第四章 线性方程组

学习提要	91
考试要求	91
本章知识框架图	92
基础知识讲解	93
一、齐次线性方程组	93
(一) 向量表示	93
(二) 矩阵表示	93
(三) 解的性质	94
(四) 解的结构	94
二、非齐次线性方程组	95
(一) 向量表示	95
(二) 矩阵表示	95
(三) 解的性质	96
(四) 求解步骤	96
典型例题与方法技巧	97
一、齐次线性方程组	97
题型1——齐次线性方程组解的判定	97
题型2——齐次线性方程组解的结构	102
题型3——含参数的齐次线性方程组	104
二、非齐次线性方程组	104
题型1——非齐次线性方程组解的判定	104
题型2——非齐次线性方程组解的结构	106
题型3——含参数的非齐次线性方程组	110
题型4——综合应用问题	111
本章同步练习题	113
一、选择题	113
二、填空题	115
三、解答题	115
同步练习题答案解析	116
一、选择题	116
二、填空题	119
三、解答题	121

第五章 矩阵的特征值和特征向量

学习提要	127
考试要求	127
本章知识框架图	128
基础知识讲解	129
一、特征值和特征向量	129
(一) 相关概念	129
(二) 相关性质	129
(三) 求解方法	129
二、相似对角化	130
(一) 相似矩阵及相似对角化的概念	130
(二) 相似矩阵的性质	130
(三) 矩阵可相似对角化的条件	131
(四) 矩阵相似对角化的步骤	131
三、实对称矩阵	131
(一) 实对称矩阵的概念	131
(二) 实对称矩阵的结论	131
(三) 实对称矩阵正交对角化的步骤	132
典型例题与方法技巧	132
一、特征值和特征向量	132
题型 1——具体型	132
题型 2——抽象型	134
题型 3——反求矩阵	135
二、相似对角化	136
题型 1——相似对角化的判定	136
题型 2——求相似对角化的可逆矩阵	137
题型 3——相似对角化的相关应用	138
三、实对称矩阵	140
题型 1——实对称矩阵的特征值和特征向量	140
题型 2——求实对称矩阵	141
题型 3——实对称矩阵的对角化	142
本章同步练习题	143
一、选择题	143
二、填空题	144
三、解答题	145
同步练习题答案解析	146
一、选择题	146
二、填空题	148
三、解答题	149

第六章 二次型

学习提要	153
考试要求	153
本章知识框架图	154
基础知识讲解	155
一、二次型及其标准形	155
(一) 二次型的相关概念	155
(二) 二次型的标准化	155
(三) 二次型标准化定理	156
(四) 矩阵的合同	157
二、正定二次型	157
(一) 正定二次型及正定矩阵的概念	157
(二) 正定二次型或正定矩阵的判别定理	157
(三) 正定矩阵的性质	158
典型例题与方法技巧	158
一、二次型及其标准形	158
题型 1——相关概念的考查	158
题型 2——化二次型为标准形	158
题型 3——二次型的含参问题	160
题型 4——二次型的合同	161
二、正定二次型	162
题型 1——正定二次型及正定矩阵的相关概念	162
题型 2——二次型正定性的判定	163
题型 3——正定矩阵的相关问题	164
本章同步练习题	165
一、选择题	165
二、填空题	166
三、解答题	167
同步练习题答案解析	167
一、选择题	167
二、填空题	169
三、解答题	171

第一章

行列式

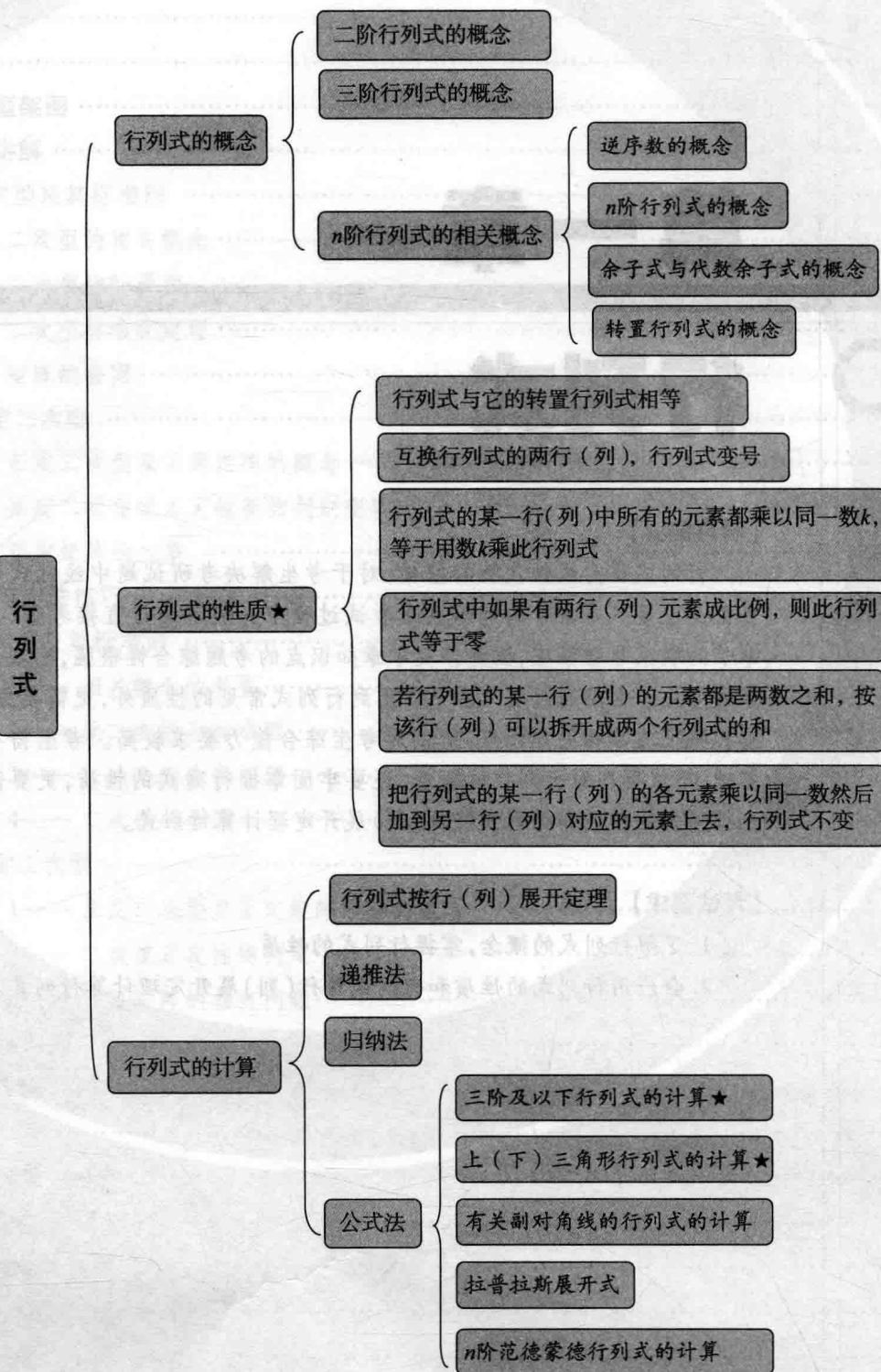
【学习提要】

行列式作为线性代数的基础,对于考生解决考研试题中线性代数部分的题目至关重要。本章节的知识点在考试过程中一般不会被直接考查,但它与后续章节的联系非常紧密,因此涉及本章知识点的考题综合性很强,出现形式多以选择题为主。在解题过程中除了要用到行列式常见的性质外,更需要结合矩阵、向量和特征值等相关知识点,所以对考生综合能力要求较高。考生需要有扎实的基础,不仅要理解行列式的概念,还要牢固掌握行列式的性质,更要懂得如何应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式。

【考试要求】

1. 了解行列式的概念,掌握行列式的性质。
2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式。

本章知识框架图



基础知识讲解

一、行列式的概念

(一) 二阶行列式的概念

设有 4 个数排成两行两列(横排称行,竖排称列)的数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为上表所确定的二阶行列式,并记作 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 。

(二) 三阶行列式的概念

设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (1)$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \quad (2)$$

(2) 式称为数表(1)所确定的三阶行列式。

(三) n 阶行列式的相关概念

1. 逆序数的概念

设 n 个元素为 1 到 n 这 n 个自然数,并规定由小到大为标准次序。设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为这 n 个自然数的一个排列,考虑元素 $p_i (i=1,2,\cdots,n)$,如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个,就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i ,全体元素的逆序数之和

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^n t_i,$$

即是这个排列的逆序数。

逆序数为奇数的排列叫作奇排列,逆序数为偶数的排列叫作偶排列。

2. n 阶行列式的概念

设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积,并冠以符号 $(-1)^t$,得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad (3)$$

的项,其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列, t 为这个排列的逆序数,由于这样的排列共有 $n!$

个,因而形如(3)式的项共有 $n!$ 个,所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

称为 n 阶行列式,记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记作 $\det(a_{ij})$, 其中数 a_{ij} 为行列式 D 的 (i, j) 元。

3. 余子式与代数余子式的概念

在 n 阶行列式中,把 (i, j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,留下来的 $n-1$ 阶行列式叫作 (i, j) 元 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij} ; 记

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

A_{ij} 叫作 (i, j) 元 a_{ij} 的代数余子式。

4. 转置行列式的概念

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式。

二、行列式的性质

性质 1 行列式与它的转置行列式相等。

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式变号。

推论 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零。

性质 3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k ,等于用数 k 乘此行列式。

推论 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面。

性质 4 行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式等于零。

性质 5 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,例如第 i 列的元素都是两数之和:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i} + a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i} + a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni} + a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$