初中数学
竞赛辅导50讲

解题思路指导

编著 范子坚
（江苏省数学特级教师）

剖析专题内容
导引思维发散
点燃智慧火花
培养创新能力

北京教育出版社

初中数学

竞赛辅导50讲

解题思路指导

编著 范子坚

（江苏省数学特级教师）

北京教育出版社

初中数学竞赛辅导 50 讲
CHUZHONG SHUXUE JINGSAI FUDAO 50 JIANG
范子坚　编著
*
北京教育出版社出版
（北京北三环中路 6 号）
邮政编码：100011
北京出版社出版集团总发行
新 华 书 店 经 销
德州文源印刷有限公司印刷
*
880×1230 毫米　32 开本　18 印张　450 千字
2003 年 6 月第 1 版　2003 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 7－5303－0842－4
G·815　定价：25.00 元

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与我们联系调换
地址：北京市西三环北路 27 号北科大厦北楼四层　邮编：100089
北京美澳学苑教育考试研究中心　电话：010－68434992

编 写 说 明

我从事数学教学、教研工作已40年，其中经常组织学生参加各级各类初中数学竞赛，与广大教师接触中，深知他们迫切需要一本实用性、指导性强的竞赛辅导用书，这就萌发了我编写这本书的强烈欲望。

为了写好这本书，我参阅了大量的资料，着手解答了约5000道近十年来的全国和一些省市的竞赛试题，并且分门别类进行归档整理，发现竞赛题的类型和涉及的主要知识点都呈现相对集中的趋势，重点非常突出，根据这一特点，我将本书编成三部分共50个专题，其中代数篇、几何篇都是19个专题，综合篇12个专题。

为使本书跻身于众多的同类辅导丛书之列而显现出它强有力的生命力，在广泛征求意见的基础上，体现以下几个方面的特点：

1. 突出重点，精选了50个专题；

2. 紧紧围绕大纲和教材，夯实学生的数学基础，提高学生的数学素养，在学生能力允许的范围内，作适当地拓宽加深，在每讲的开头，都明确指出这一专题知识拓展的内容，为学生掌握和运用数学的思想方法开辟更为广阔的天地；

3. 精心挑选例题，以全国和各省市的竞赛题为主，体现“新”、“精”、“巧”、“活”，注意思维性、实用性和趣味性，使材料具有很强的针对性。

4. 每个专题重在对主要题型的剖析和解题方法的归纳、总结，以激发学生的智慧火花，领悟其中的思想、观点和方法，以便触类旁通，举一反三，提高发散思维能力和创新意识，收到事半而功倍的效果。

5. 每一讲后面都安排适当数量的同步训练题，并且提供了答案，难度大的还作了解答。

本书可作为教师对数学兴趣小组的辅导材料和学生的课外阅读材料。

本书从酝酿到完稿共花了近两年的时间，但由于水平和精力的限制，书中难免有错漏之处，恳请读者批评指正。

范子坚

2003 年 6 月

目　　录

代数篇

几何篇

综合篇

初中数学

竞赛辅导50讲

解题思路指导

代数篇

第一讲　巧算

目标　掌握常见的巧算方法，能根据算式结构的特殊性，选取灵活的方法进行运算，使运算既快又准.

一、有关知识的拓展

1 求前 n 个正整数的和的公式

设前 n 个正整数为 1,2,3,…,n，它们的和为 S_n，则

$$S_n=\frac{(1+n)n}{2}.$$

2 式的变形.

$$n(n+1)=\frac{1}{3}[n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)],$$

$$n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}[n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)].$$

二、知识剖析和例题精讲

常见的几种巧算方法

1 将整数适当变形

例 1 计算：

$1995\times19941994+1996\times19951995-1994\times19951995-1995\times19961996.$

（第六届“希望杯”竞赛试题）

分析 19941994，19951995，19961996 很有规律，可以分别表示成

1994×10001，1995×10001，1996×10001，

于是四个乘积可以两两对消，结果为 0.

解 $1995\times19941994+1996\times19951995-1994\times19951995-1995\times19961996$

$=1995\times1994\times10001+1996\times1995\times10001-1994\times1995\times10001-1995\times1996\times10001$

$=(1995\times1994\times10001-1994\times1995\times10001)+(1996\times1995\times10001-1995\times1996\times10001)$

$=0.$

2 运用因式分解

例 2 计算：

$1.345\times0.345\times2.69-1.345^3-1.345\times0.345^2.$

（江苏省第十二届数学竞赛试题）

分析 当提取 -1.345 以后，括号中出现两个平方数 $1.345^2, 0.345^2$，容易想到用完全平方公式继续分解.

解 $1.345\times0.345\times2.69-1.345^3-1.345\times0.345^2$

$=-1.345(-0.345\times2.69+1.345^2+0.345^2)$

$=-1.345(1.345^2-2\times1.345\times0.345+0.345^2)$

$=-1.345(1.345-0.345)^2$

$=-1.345\times1$

$=-1.345.$

3 整体代入

例3 已知 $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{20}+\frac{1}{41}+\frac{1}{110}+\frac{1}{1640}=1$，则 $-\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{11}-\frac{1}{20}-\frac{1}{41}+\frac{1}{110}+\frac{1}{1640}=$ ______.

（第十届"希望杯"竞赛试题）

分析 观察已知的算式和待求值的算式，其分母是两两相同，只是有的符号不相同，待求值的算式中有五个负数，三个正数，将三个正数分别表示为

$\frac{1}{11}=\frac{2}{11}-\frac{1}{11}, \frac{1}{110}=\frac{2}{110}-\frac{1}{110}, \frac{1}{1640}=\frac{2}{1640}-\frac{1}{1640}$，八个负数提取负号后，可以将已知条件整体代入，运算就方便了.

解 $-\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{11}-\frac{1}{20}-\frac{1}{41}+\frac{1}{110}+\frac{1}{1640}$

$=\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{8}-\frac{1}{11}-\frac{1}{20}-\frac{1}{41}-\frac{1}{110}-\frac{1}{1640}\right)+\left(\frac{2}{11}+\frac{2}{110}+\frac{2}{1640}\right)$

$=-1+2\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{110}+\frac{1}{1640}\right)$

$=-1+2\left(\frac{1640+164+11}{1640\times11}\right)$

$=-1+\left(\frac{1815}{820\times11}\right)$

$=-1+\frac{33}{164}$

$=-\frac{131}{164}.$

4 逆用分数的加减法则

即 $\frac{a\pm b}{ab}=\frac{1}{b}\pm\frac{1}{a}.$

例4 $\frac{1}{19\times21}+\frac{1}{21\times23}+\frac{1}{23\times25}+\cdots+\frac{1}{97\times99}=$ ______.

（第十一届"五羊杯"竞赛试题）

解 $\frac{1}{19\times 21}+\frac{1}{21\times 23}+\frac{1}{23\times 25}+\cdots+\frac{1}{97\times 99}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}+\frac{1}{21}-\frac{1}{23}+\frac{1}{23}-\frac{1}{25}+\cdots+\frac{1}{97}-\frac{1}{99}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{99}\right)$

$=\frac{40}{1881}$.

例 5 若 $n=1\frac{1}{3}-\frac{7}{12}+\frac{9}{20}-\frac{11}{30}+\frac{13}{42}-\frac{15}{56}+\frac{17}{72}$,则 n 的负倒数是______.

解 $n=1\frac{1}{3}-\frac{7}{12}+\frac{9}{20}-\frac{11}{30}+\frac{13}{42}-\frac{15}{56}+\frac{17}{72}$

$=1+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)-\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)$

$=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}$

$=1+\frac{1}{9}$

$=1\frac{1}{9}$.

说明 例 4 与例 5 都是逆向应用分数的加减法则,将各个分数拆成两个分数的和或差,使正负数对消达到化简的目的.当算式中各分母可以表示成连续两个整数的积,而分子恰好是这两个整数的和或差时,就可以用这种方法来进行运算。而例 4 中,分母上不是连续两个整数的积,但两个数的差是常数 2,当拆成两个分数相减时,要注意除以常数 2.

例如,$\frac{1}{19\times 21}\neq\frac{1}{19}-\frac{1}{21}$,$\frac{1}{19}-\frac{1}{21}=\frac{2}{19\times 21}$,

$\therefore\ \frac{1}{19\times 21}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)$.

同样地,$\frac{1}{19\times 22}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{22}\right)$.

想一想

$\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\frac{1}{3\times 4\times 5}+\cdots+\frac{1}{9\times 10\times 11}$

如何计算?

仿照例 4、例 5,仍然将各个分数拆成两个数的差:

$\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\frac{1}{3\times 4\times 5}+\cdots+\frac{1}{9\times 10\times 11}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{2\times 3}-\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{3\times 4}-\frac{1}{4\times 5}+\cdots+\frac{1}{9\times 10}-\frac{1}{10\times 11}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{110}\right)$

$= \frac{27}{110}.$

5 应用运算律

例6 计算：

$\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{4}\right)\times\left(1+\frac{1}{6}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{10}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{9}\right)=$ ______.

（第六届“华罗庚金杯”邀请赛广州赛区竞赛试题）

分析 观察算式，$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$；$1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$，$1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$；$1+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$；$1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$；$1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}$，$1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$，两两相乘其积均为1，因此利用乘法的交换律、结合律，就能迅速求出结果.

解 $\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{4}\right)\times\left(1+\frac{1}{6}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{10}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{9}\right)$

$$= \left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]\times\left[\left(1+\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)\right]\times\left[\left(1+\frac{1}{6}\right)\times\left(1-\frac{1}{7}\right)\right]\times\left[\left(1+\frac{1}{8}\right)\times\left(1-\frac{1}{9}\right)\right]\times\left(1+\frac{1}{10}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{5}{4}\times\frac{4}{5}\right)\times\left(\frac{7}{6}\times\frac{6}{7}\right)\times\left(\frac{9}{8}\times\frac{8}{9}\right)\times\frac{11}{10}=\frac{11}{10}.$$

6 从一般到特殊

例7 $19\times21\times23+21\times23\times25+23\times25\times27+\cdots+95\times97\times99=$ ______.

（第十一届“五羊杯”竞赛试题）

分析 算式是连续三个奇数之积的和，如何简化运算？我们先来研究三个连续奇数之积的恒等变形.

应用因式分解可以得到

$n(n+2)(n+4)(n+6)-(n-2)n(n+2)(n+4)$

$= n(n+2)(n+4)[(n+6)-(n-2)]$

$= 8n(n+2)(n+4).$

因此，$n(n+2)(n+4)$

$= \frac{1}{8}[n(n+2)(n+4)(n+6)-(n-2)n(n+2)(n+4)].$

当 n 依次取19，21，23，…，95时，算式中连续三个奇数之积就可以表示成两个连续四个奇数之积的差，当正负数对消后，就可以将算式化简.

解 $\because n(n+2)(n+4)$

$=\frac{1}{8}[n(n+2)(n+4)(n+6)-(n-2)n(n+2)(n+4)]$,

$\therefore 19\times21\times23+21\times23\times25+23\times25\times27+\cdots+95\times97\times99$

$=\frac{1}{8}[(19\times21\times23\times25-17\times19\times21\times23)+(21\times23\times25\times 27-19\times21\times23\times25)+(23\times25\times27\times29-21\times23\times 25\times27)+\cdots+(95\times97\times99\times101-93\times95\times97\times99)]$

$=\frac{1}{8}(95\times97\times99\times101-17\times19\times21\times23)$

$=\frac{1}{8}[(96^2-1)(100^2-1)-(18^2-1)(22^2-1)]$

$=11498097$

说明 这道例题的运算方法很具有代表性,它是从研究一般情况入手,再用具体数字代入,由于正负数对消,使算式化简.

用同样的方法,可以计算下列各式

$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+49\times50$;

$6\times8\times10+8\times10\times12+\cdots+16\times18\times20$.

7 应用前 n 个正整数的求和公式

例 8 计算

$1949^2-1950^2+1951^2-1952^2+\cdots+1997^2-1998^2+1999^2$.

(1998 年北京市数学竞赛试题)

分析 $1949^2-1950^2,1951^2-1952^2,\cdots,1997^2-1998^2$,利用平方差公式分解后,分别为 $-(1949+1950),-(1951+1952),\cdots,-(1997+1998)$,求它们的和,就要求 1949,1950,…,1997,1998 这 50 个自然数的和,可以转化为求前 50 个自然数的和.

解 $1949^2-1950^2+1951^2-1952^2+\cdots+1997^2-1998^2+1999^2$

$=-[(1949+1950)+(1951+1952)+\cdots+(1997+1998)]+1999^2$

$=1999^2-\begin{bmatrix}(1948+1)+(1948+2)+(1948+3)+(1948+4)+\\ \cdots+(1948+49)+(1948+50)\end{bmatrix}$

$=1999^2-[50\times1948+(1+2+3+4+\cdots+50)]$

$=1999^2-\left[50\times1948+\frac{(1+50)\times50}{2}\right]$

$=1999^2-50\times1948-51\times25$

$=3897326$.

8 设辅助数

例 9 计算

$\left(\frac{1}{37}+\frac{1}{41}+\frac{1}{43}+\frac{1}{47}+\frac{1}{53}\right)\times\left(\frac{1}{41}+\frac{1}{43}+\frac{1}{47}+\frac{1}{53}+\frac{1}{54}\right)-$

$\left(\frac{1}{37}+\frac{1}{41}+\frac{1}{43}+\frac{1}{47}+\frac{1}{53}+\frac{1}{54}\right)\times\left(\frac{1}{41}+\frac{1}{43}+\frac{1}{47}+\frac{1}{53}\right)$.

（1998 年成都市数学竞赛试题）

分析 如果直接通分计算，显然是非常麻烦的，观察被减数和减数的两个乘数，四个括号中的分数相差不多，若设

$$\frac{1}{37}+\frac{1}{41}+\frac{1}{43}+\frac{1}{47}+\frac{1}{53}+\frac{1}{54}=m,$$

$$\frac{1}{41}+\frac{1}{43}+\frac{1}{47}+\frac{1}{53}=n,$$

则原式为

$$\left(n+\frac{1}{37}\right)\left(m-\frac{1}{37}\right)-mn,$$

再进行计算就又快又准.

解 设$\left(\frac{1}{37}+\frac{1}{41}+\frac{1}{43}+\frac{1}{47}+\frac{1}{53}+\frac{1}{54}\right)=m$,

$$\frac{1}{41}+\frac{1}{43}+\frac{1}{47}+\frac{1}{53}=n,$$

则$\left(\frac{1}{37}+\frac{1}{41}+\frac{1}{43}+\frac{1}{47}+\frac{1}{53}\right)\times\left(\frac{1}{41}+\frac{1}{43}+\frac{1}{47}+\frac{1}{53}+\frac{1}{54}\right)-$
$\left(\frac{1}{37}+\frac{1}{41}+\frac{1}{43}+\frac{1}{47}+\frac{1}{53}+\frac{1}{54}\right)\times\left(\frac{1}{41}+\frac{1}{43}+\frac{1}{47}+\frac{1}{53}\right)$

$$=\left(n+\frac{1}{37}\right)\left(m-\frac{1}{37}\right)-mn$$

$$=mn+\frac{1}{37}(m-n)-\frac{1}{37^2}-mn$$

$$=\frac{1}{37}\left(\frac{1}{37}+\frac{1}{54}\right)-\frac{1}{37^2}$$

$$=\frac{1}{37^2}+\frac{1}{37\times 54}-\frac{1}{37^2}$$

$$=\frac{1}{1998}.$$

9 适当地排列

例 10 所有个位数与十位数都是奇数的两位数的和是______.

解 个位数与十位数都是奇数的两位数共 25 个，现将这 25 个数排列如下：

11	31	51	71	91
13	33	53	73	93
15	35	55	75	95
17	37	57	77	97
19	39	59	79	99

第一行中五个数的和是 255，第二行中的每个数比第一行相应位置上的数多 2，

五个数多10,因此第二行中五个数的和是265,同样地,第三、四、五行中五个数的和分别是275、285、295这25个数的和是

$$255+265+275+285+295=1375.$$

10 逆向思维

例11 将1997减去它的$\frac{1}{2}$,再减去余下的$\frac{1}{3}$,再减去余下的$\frac{1}{4}$,再减去余下的$\frac{1}{5}$,…,依次类推,直至最后减去余下的$\frac{1}{1997}$,最后的答数是______.

（第十届"祖冲之"杯数学竞赛试题）

分析 设$1997=a$,如果从减去的入手,第一次减去$\frac{1}{2}a$,

第二次减去　$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a=\frac{1}{6}a$,

第三次减去　$\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}a\right)=\frac{1}{12}a$,

第四次减去　$\frac{1}{5}\left(a-\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}a-\frac{1}{12}a\right)=\frac{1}{20}a$,

如此继续下去就进入了死胡同.

如果不从减去的入手,而从剩下的入手,我们来试试.

第一次剩$\frac{1}{2}a$

第二次剩$\frac{1}{2}a$的$\frac{2}{3}$,即$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}a$.

第三次剩$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}a$.的$\frac{3}{4}$,即$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}a$.

第四次剩$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}a$的$\frac{4}{5}$,即$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}a$.

你会发现剩下的数很有规律,而且分子、分母可以约减.

第一次剩$\frac{1}{2}a$,第二次剩$\frac{1}{3}a$,第三次剩$\frac{1}{4}a$,第四次剩$\frac{1}{5}a$,

最后一次是剩

$$\frac{1996}{1997}\cdot\frac{1995}{1996}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}a=\frac{1}{1997}a=1.$$

解 略

同步训练

1. 计算下列各题:

(1)$2000\times2002\,2002-2002\times2000\,1999$;

(2)$\frac{1999^2+1999\times999+999^2-1000^2}{1999\times999}$;

(3) $\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{6\times8}+\cdots+\frac{1}{2000\times2002}$;

(4) $\frac{1}{1\times3\times5}+\frac{1}{3\times5\times7}+\frac{1}{5\times7\times9}+\cdots+\frac{1}{29\times31\times33}$;

(5) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$;

(6) $2\times4+4\times6+6\times8+\cdots+98\times100$;

(7) $10\times11\times12+11\times12\times13+\cdots+23\times24\times25$;

(8) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2002}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2001}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2002}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2001}\right)$;

(9) $\underbrace{11\cdots1}_{2002个1}\underbrace{22\cdots2}_{2002个2}\div\underbrace{33\cdots3}_{2002个3}$;

(10) $1+\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{4}{4}+\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{50}+\frac{2}{50}+\cdots+\frac{50}{50}+\frac{49}{49}+\cdots+\frac{2}{50}+\frac{1}{50}$;

(11) $(-0.375)^{20}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{10}\cdot\left(2\frac{2}{3}\right)^{20}\cdot(-2.25)^{12}$.

2. 17个连续整数的和是306,那么紧接在这17个数后面的那17个连续整数的和是多少?