昆明理工大学研究生教育“十二五”规划教材
昆明理工大学研究生百门核心课程教材

# 高等运筹学

刘文奇　编著

科学出版社

昆明理工大学研究生教育“十二五”规划教材
昆明理工大学研究生百门核心课程教材

# 高等运筹学

刘文奇　编著

科学出版社
北京

## 内 容 简 介

“高等运筹学”是系统科学、应用数学、管理科学与工程、信息科学等众多学科博士、硕士研究生的一门必修的应用基础课程. 通过本书的学习, 使学生比较系统地掌握运筹学的基本理论, 了解前沿领域与某些应用背景, 培养学生应用课程所学知识解决现实工程和管理中碰到的最优化、平衡、综合评价、决策分析等问题, 使学生能够根据具体的应用问题建立运筹学模型, 提高学生的理论分析能力、数学建模及求解能力. 本书是在本科“运筹学”课程基础上, 提高理论起点, 以泛函分析、凸分析、高等概率统计为数学基础, 结合经济学、金融学、风险管理、多目标决策、多因素评价、计算机网络、无线通信等相关学科分支的应用背景, 全面提高学生的理论基础和建模水平. 内容主要包括 Hilbert 空间上的最优化理论、随机决策基础、效用理论、多准则决策与群决策、博弈论和复杂网络理论.

本书可供系统科学、应用数学、管理科学与工程、信息科学、控制科学与工程等众多学科博士、硕士研究生使用, 也可作为相关科技工程人员的参考资料.

**图书在版编目 (CIP) 数据**

高等运筹学/刘文奇编著. —北京: 科学出版社, 2016.6

昆明理工大学研究生教育“十二五”规划教材　昆明理工大学研究生百门核心课程教材

ISBN 978-7-03-049262-3

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①刘…　Ⅲ. ①运筹学–高等学校–教材　Ⅳ. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 144268 号

责任编辑: 王胡权 / 责任校对: 高明虎
责任印制: 张　伟 / 封面设计: 迷底书装

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2016 年 6 月第　一　版　开本: 720×1000　B5
2016 年 6 月第一次印刷　印张: 15 3/8
字数: 302 000

**定价: 59.00 元**

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

# 前　　言

运筹学是一门交叉学科, 为系统科学、经济学、管理科学、金融学、信息科学和工程科学等众多学科提供理论和方法. 自诞生以来, 在应用的推动下, 运筹学迅速发展. 特别地, 近二十年来, 伴随信息技术、人工智能和复杂工程技术的兴起, 运筹学的理论和应用都取得了丰硕的成果, 运筹学学科发展对社会科学、自然科学和工程技术的支撑作用已毋庸置疑. 为此, 国内外高等教育机构不仅在大学课程中广泛设置运筹学, 而且根据不同学科的要求在研究生阶段设立“高等运筹学”课程或讲座.

1998 年, 国务院学位委员会首次批准设立系统科学一级学科, 考虑到系统科学需要一些运筹学的建模和分析方法, 我们就在系统科学专业的硕士研究生课程中设计了“高等运筹学”课程, 同时向应用数学、管理科学与工程等学科的研究生开放. 但是, 对于课程内容的安排, 我们一直十分犹豫. 因为国内外已经有很多优秀的运筹学教材, 而且其他学科优秀教材中也有非常精彩的运筹学内容, 加之运筹学成果丰富, 要从中选择一些内容相对固定下来也不容易. 所以, 在教学中, 我们一直采用临时编撰的讲义给学生参考. 讲义的内容基本撇开了本科运筹学的教学思维, 甚至忽略了注重算法的思路, 以适当区隔“运筹学”与“最优化方法”等课程, 以期突出运筹学学科的核心内容. 由于在使用过程中, 研究生教育改革带来的变化和学科发展, “运筹学”讲义一直在修订中, 本人更倾向借助一些参考书来补充课程的各种缺憾, 故此前没有打算把讲义成书出版.

运筹学的内容日益庞大, 教学时间却越来越少, 伴随本科教学改革和扩招带来的学生数学基础训练的减少, 教学中的供需矛盾更加突出, 使我们更加坚定地把算法层次的内容去掉, 以便加强理论基础部分的教学, 并尽量地提供运筹学前沿领域发展所必需的理论支持. 因此, 在早期讲授内容基础上, 非线性分析部分增加了不动点定理的分量, 目的是更好地为讲授博弈论做准备, 在适当减少决策分析的内容的同时, 增加博弈论基础部分的内容以适应工程社会化、经济管理和无线网络技术等领域研究中对博弈论知识日益增长的需要, 尤其在最后特意新增了复杂网络基础和演化博弈的内容, 算是对经典图论、网络流和复杂性科学发展的反映. 对于经典的排队论、调度理论和库存论部分, 本书不再涉及. 原因有三, 一则大多数高等院校设有组合优化等研究生课程; 二则教学时数不足; 三则全球化、网络化带来的生产制造和服务的模式及物流系统的变革, 似乎还未看清未来调度理论发展方向. 为了弥补调度方面内容的缺失, 我们在研究生讨论班上特别安排了团队中擅长该领域的青年学者进行专门指导.

但是, 不管怎么调整, 我总觉得本书最多只能算作一本参考书, 还远不是一本好的教材. 在教学过程中, 我感觉学生将书中的基本概念和证明看懂已属不易, 基本没有精力去做练习题, 故没有安排, 只是在教学中根据学生兴趣布置一些开放式题目作为课程作业. 这些开放作业的目的也只是期望引导学生对运筹学的个别内容的兴趣而设置, 学生可以选择性思考, 没有任何强制性要求和固定答案. 由于这些作业往往结合某个时髦的课题, 比如“一带一路”“国际产能合作”“柔性制造”等即兴布置, 故作业也未在书中列出. 作为补充, 我们建议, 可以考虑给学生选择一些实际应用的案例作为课外阅读材料.

作为硕士研究生必修的应用基础型课程用书, 本书在内容安排上也同样适用于博士研究生.

我们最终有勇气将本书付梓呈献给读者得益于昆明理工大学研究生院的推动,“高等运筹学”教学团队获得昆明理工大学研究生百门核心课程项目的资助, 在此感谢研究生院对本书写作和教学研究的支持.

在成书之际, 感谢国家自然科学基金委员会给予我们团队的国家自然科学基金项目资助, 包括面上项目“中国公共数据库数据质量控制的粒化方法”(61573173)和其他三项国家自然科学基金项目(11561036, 61562050, 71501086). 正是这些项目研究加深了我们对“高等运筹学”基础作用的认识.

多年来, 在本书初稿的写作和试用过程中, 历届研究生提出了有益的意见, 特别地, 黄晨晨、赵颖秀同学承担了书中部分图表的制作和校对工作, 在此感谢他们. 还要感谢科学出版社, 特别是王胡权编辑和李香叶编辑, 他们为本书的出版付出了辛勤的劳动.

尽管作者本人对选材和写作进行了精心安排, 在多年教学和科研工作中也积累了一定的经验, 但是由于水平所限, 疏漏之处在所难免. 在此恳请读者见谅并批评指正.

刘文奇

2016 年 3 月于书香大地

# 目　　录

# 第 1 章　非线性分析

## 1.1　极小化问题的基本定理

### 1.1.1　基本定义

极小化问题的一般提法为: $K$ 为非空集, $f$ 为实函数

$$\min_{x\in K} f(x) \tag{1.1.1}$$

即求一个 $\bar{x}\in K$ 使对任意 $x\in K$ 有 $f(\bar{x})\leqslant f(x)$, 此时称 $\bar{x}$ 为问题(1.1.1)的最优解, 简称为解.

我们知道, 若 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数且 $K$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的紧集(在 $\mathbf{R}^n$ 中等价于有界闭集, 如 $[a,b]^n$ ), 则问题(1.1.1)有解, 其特例是闭区间上的连续函数必达最小(大)值. 这一结论在距离空间中也是对的. 在这里, 我们希望获得更一般的结论. 比如, 将函数 $f$ 减弱为下半连续函数、凸函数, 或将 $K$ 的紧性减弱为有界闭(对一般距离空间, 有界闭与紧性是不等价的)、闭凸等.

**定义 1.1.1**　设 $X$ 为距离空间, $K$ 为 $X$ 的非空子集, $f:K\to\mathbf{R}$ 为实值函数, 定义广义实值函数 $f_K:X\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 为

$$f_K(x):=\begin{cases} f(x), & x\in K,\\ +\infty, & x\notin K\end{cases} \tag{1.1.2}$$

显然有

(1) $K=\{x\in X \mid f_K(x)<+\infty\}$;

(2) $\bar{x}$ 为问题(1.1.1)的解当且仅当 $f_K(\bar{x})=\inf\limits_{x\in K} f(x)$.

$f_K$ 的作用是将一个条件极小化问题转化为无条件极小化问题, 即广义实值函数的普通极小化问题.

对一般 $X$ 上的广义实值函数 $f(x)$, 称

$$\operatorname{Dom} f:=\{x\in X \mid f(x)<+\infty\}$$

为其定义域. 退化情形为 $\operatorname{Dom} f=\varnothing$, 可理解为 $f(x)\equiv+\infty$. 对前述 $f_K$, 有 $K=\operatorname{Dom} f_K$.

**定义 1.1.2**　我们称广义实值函数 $f$ 是严格的, 是指其定义域为非空, 也就是说至少存在一点处 $f(x)$ 有限.

我们还常用函数来描述一个集合, 即得如下定义.

**定义 1.1.3**　设 $K$ 为 $X$ 的子集, 称函数 $\psi_K:X\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$:

$$\psi_K(x):=\begin{cases}0, & x\in K,\\ +\infty, & x\notin K\end{cases}$$

为 $K$ 的指示函数.

应该注意到, 若 $f:X\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$, $K\subseteq X$, 则 $f+\psi_K$ 将约束条件 $K$ 吸纳到目标函数中, 即两个问题

$$\min_{x\in K} f(x)\quad 与\quad \min\{f(x)+\psi_K(x)\}$$

同解. 后面将会用集合描述函数. 函数与集合之间的相互转化可以使我们方便地得出极小化问题解的某些有趣性质.

**定义 1.1.4** 设 $X$ 为距离空间, $f:X\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$, 称 $X\times\mathbf{R}$ 的子集

$$\mathrm{Ep}(f):=\left\{(x,\lambda)\in X\times\mathbf{R}\,\middle|\,f(x)\leqslant\lambda\right\}$$

为 $f$ 的附图.

易见, $f$ 是严格的当且仅当 $f$ 的附图是非空的. 明显有以下结论.

**命题 1.1.1** 设 $\{f_i\}_{i\in I}$ 是一族 $X$ 上的广义实值函数, $\sup\limits_{i\in I} f_i$ 为其上包络, 即 $(\sup\limits_{i\in I} f_i)(x)=\sup\limits_{i\in I} f_i(x)(\forall x\in X)$, 则

$$\mathrm{Ep}(\sup_{i\in I} f_i)=\bigcap_{i\in I}\mathrm{Ep}(f_i)\tag{1.1.3}$$

**定义 1.1.5** 设 $X$ 为距离空间, $f:X\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$, $\lambda\in\mathbf{R}$, 称

$$S(f,\lambda):=\{x\in X\,|\,f(x)\leqslant\lambda\}$$

为 $f$ 的 $\lambda$-下截集.

令 $\alpha:=\inf\limits_{x\in X} f(x)$, $M$ 是问题(1.1.1)的解集, 则

$$M=\bigcap_{\lambda>\alpha} S(f_K,\lambda)\tag{1.1.4}$$

事实上, 若 $\bar{x}\in M$, 则 $\bar{x}\in K$ 且 $f(\bar{x})=\alpha$, 从而 $\forall\lambda>\alpha$ 有 $f(\bar{x})=\alpha<\lambda$ 且 $f_K(\bar{x})=f(\bar{x})$, 即 $\bar{x}\in S(f_K,\lambda)$. 反之, 若 $\bar{x}\in\bigcap\limits_{\lambda>\alpha} S(f_K,\lambda)$, 则对一切 $\lambda>\alpha$, 有 $f_K(\bar{x})<\lambda$, 故 $f_K(\bar{x})\leqslant\inf\limits_{\lambda>\alpha}\lambda=\alpha$, 即 $f_K(\bar{x})=\alpha$. 所以, $\bar{x}\in M$.

由此可见, 下截集的对无限交封闭的性质可以“遗传”给解集 $M$ (如闭性、紧性和凸性等).

**命题 1.1.2** 设 $\{f_i\}_{i\in I}$ 是一族 $X$ 上的广义实值函数, $\sup\limits_{i\in I} f_i$ 为其上包络, 则

$$S(\sup_{i\in I} f_i,\lambda)=\bigcap_{i\in I} S(f_i,\lambda)\tag{1.1.5}$$

证明留作练习.

### 1.1.2 下半连续函数与下半紧函数

设 $(X,d)$ 为距离空间, $f:X\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$, $x_0\in\mathrm{Dom}\,f$. 在距离空间中我们熟知的 $f$ 在 $x_0$ 点处连续的定义有等价的叙述:

$$B(x_0,\eta)=\{x\in X\,|\,d(x,x_0)<\eta\}$$

(1) $\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0$, 当 $x\in B(x_0,\eta)$ 时 $f(x_0)-\varepsilon\leqslant f(x)\leqslant f(x_0)+\varepsilon$;

(2) $\forall\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1<f(x_0)<\lambda_2,\exists\eta>0$, 当 $x\in B(x_0,\eta)$ 时, $\lambda_1\leqslant f(x)\leqslant\lambda_2$.

直观地讲, 极限符号可以与函数符号相交换, 即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$. 这与我们在数学分析课程里的理解是一样的. 在数学分析里, 我们考虑的是实数空间 $\mathbf{R}$, 对实数轴上的点的距离, 形成距离空间. 但由于实数集是全序集, 有大小(即左右)比较. 因此, 我们有了左右极限和左右连续的概念. 但是, 在一般距离空间里, 由于序的缺失, 可以按(2)的叙述方式, 引入的是上下极限和上下连续的概念.

**定义 1.1.6**　设 $f$ 为定义在距离空间 $X$ 上的广义实值函数, $x_0\in\mathrm{Dom}f$. 若

$$\forall\lambda<f(x_0),\exists\eta>0, 当\ x\in B(x_0,\eta)\ 时, 有\ \lambda\leqslant f(x)$$

则称 $f$ 在 $x_0$ 点处下半连续. 若 $f$ 在所有点处都下半连续, 则称 $f$ 下半连续.

$f$ 在 $x_0$ 点处上半连续阙如

$$\forall\lambda>f(x_0),\exists\eta>0, 当\ x\in B(x_0,\eta)\ 时, 有\ \lambda\geqslant f(x)$$

但是我们这里研究的是极小化问题, 因此似乎不关心上半连续. 显然,

$$f\ 在\ x_0\ 点处连续\Leftrightarrow f\ 在\ x_0\ 点处下半连续且上半连续$$

(自己试着写证明).

对如上 $f$ 及 $x_0$, 可以用引入下极限的方式, 定义 $f$ 在 $x_0$ 处的下极限:

$$\liminf_{x\to x_0}f(x):=\sup_{\eta>0}\inf_{x\in B(x_0,\eta)}f(x)$$

稍作考察, 由于 $F(\eta)=\inf\limits_{x\in B(x_0,\eta)}f(x)$ 为 $\eta$ 的减函数, 故

$$\liminf_{x\to x_0}f(x)=\lim_{\eta\to0^+}\inf_{x\in B(x_0,\eta)}f(x)$$

**命题 1.1.3**　$f:X\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\},x_0\in\mathrm{Dom}f$. $f$ 在 $x_0$ 处下半连续的充要条件是 $\liminf\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

**证明**　若 $f$ 在 $x_0$ 处下半连续, 则对任意 $\lambda<f(x_0),\exists\eta(\lambda)>0$, 使当 $x\in B(x_0,\eta)$ 时 $\lambda<f(x)$, 从而

$$\lambda\leqslant\inf_{x\in B(x_0,\eta(\lambda))}f(x)\leqslant\sup_{\eta(\lambda)>\eta>0}\inf_{x\in B(x_0,\eta)}f(x)\leqslant\sup_{\eta>0}\inf_{x\in B(x_0,\eta)}f(x)=\liminf_{x\to x_0}f(x)$$

取 $\lambda_n=f(x_0)-\dfrac{1}{n}$, 并利用上面的不等式且取极限, 立即得

$$f(x_0)\leqslant\liminf_{x\to x_0}f(x)\leqslant f(x_0),\quad 即\quad f(x_0)=\liminf_{x\to x_0}f(x)$$

反之，设 $f(x_0)=\liminf\limits_{x\to x_0} f(x)$. 则有 $f(x_0)\leqslant \liminf\limits_{x\to x_0} f(x)$. 对任意 $\lambda<f(x_0)$, 有 $\lambda\leqslant \liminf\limits_{x\to x_0} f(x)=\sup\limits_{\eta>0}\inf\limits_{x\in B(x_0,\eta)} f(x)$. 由上确界的定义, $\exists\eta(\lambda)>0$ 使 $\inf\limits_{x\in B(x_0,\eta(\lambda))} f(x)\geqslant\lambda$. 从而当 $x\in B(x_0,\eta(\lambda))$ 时, $f(x)\geqslant\lambda$. 即 $f$ 在 $x_0$ 处下半连续. 证毕!

**命题 1.1.4** 设 $X$ 为距离空间, $f:X\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$, 则下列叙述等价:

(a) $f$ 下半连续;

(b) $\mathrm{Ep}(f)$ 为 $X\times\mathbf{R}$ 中的闭集;

(c) $\forall\lambda, S(f,\lambda)$ 闭.

**证明** (1) (a) $\Rightarrow$ (b). 设 $f$ 下半连续, $\{(x_n,\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathrm{Ep}(f)$ 且 $(x_n,\lambda_n)\to(x,\lambda)$ $(n\to\infty)$. 注意, 这里的 $X\times\mathbf{R}$ 中的乘积拓扑也是度量拓扑, 其中收敛等价于依坐标收敛. 欲证 $(x,\lambda)\in\mathrm{Ep}(f)$. 事实上, 由命题 1.1.3, $\forall x\in X$, $\liminf\limits_{x'\to x} f(x')=f(x)$. 故对给定的某个 $\eta_0>0$, $f(x)\leqslant\inf\limits_{x'\in B(x,\eta_0)} f(x')$. 由于 $x_n\to x(n\to\infty)$, 知 $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时, $x_n\in B(x,\eta_0)$, 从而 $f(x)\leqslant f(x_n)\leqslant\lambda_n$. 又由于 $\lambda_n\to\lambda(n\to\infty)$, 故有 $f(x)\leqslant\lambda$, 即 $(x,\lambda)\in\mathrm{Ep}(f)$.

(2) (b) $\Rightarrow$ (c). 设 $\mathrm{Ep}(f)$ 是闭集且 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq S(f,\lambda), x_n\to\lambda(n\to\infty)$. 往证 $x\in S(f,\lambda)$. 事实上, 由 $x_n\to x$ 且 $\lambda_n\equiv\lambda\to\lambda(n\to\infty)$ 知 $(x_n,\lambda)\to(x,\lambda)(n\to\infty)$. 故由 $\mathrm{Ep}(f)$ 的闭性可知, $x\in S(f,\lambda)$.

(3) (c) $\Rightarrow$ (a). 设 $f$ 的所有下截集 $S(f,\lambda)$ 为闭, $x_0\in\mathrm{Dom}f, \lambda<f(x_0)$. 由于 $x_0\notin S(f,\lambda)$ 且 $S(f,\lambda)$ 闭, 故存在 $x_0$ 的某个 $\eta$-邻域 $B(x_0,\eta)$ 使 $B(x_0,\eta)\cap S(f,\lambda)=\varnothing$. 即, 当 $x\in B(x_0,\eta)$ 时, $\lambda\leqslant f(x)$. 因此, $f$ 在 $x_0$ 处下半连续.

**推论 1.1.1** $X$ 的子集 $K$ 为闭集当且仅当其指示函数下半连续.

**证明** 事实上, $\mathrm{Ep}(\psi_K)=K\times[0,+\infty]$ 闭当且仅当 $K$ 闭.

易得下半连续函数的系列性质, 可得如下命题.

**命题 1.1.5** 设 $f,g,f_i\,(i\in I)$ 为 $X$ 上的下半连续函数, 则

(a) $f+g$ 为下半连续函数;

(b) $\forall\alpha>0,\alpha f$ 为下半连续函数;

(c) $\inf(f,g)$ 为下半连续函数;

(d) 设 $Y$ 也是距离空间, $A:Y\to X$ 为连续映射, 则 $f\circ A$ 也是下半连续函数;

(e) $\sup\limits_{i\in I} f_i$ 也是下半连续函数.

**注** (1) 例如, 可用 $\mathrm{Ep}(\sup\limits_{i\in I} f_i)=\bigcap\limits_{i\in I}\mathrm{Ep}(f_i)$ 解读 (e).

(2) 若 $f:X\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 为下半连续函数, 则 $f_0:\mathrm{Dom}f\to\mathbf{R}$ 也是下半连续函数. 其中, $\mathrm{Dom}f$ 的拓扑是指诱导拓扑. 反之未必, 有如下结论.

**命题 1.1.6** 设 $K$ 是距离空间 $X$ 的闭子集, $f:K\to\mathbf{R}$ 为下半连续函数, 则 $f_K$

是 $X$ 上的下半连续函数.

**证明**　事实上, $S(f_K,\lambda)=S(f,\lambda)$, 而 $S(f,\lambda)$ 在 $K$ 中闭且 $K$ 在 $X$ 中闭, 故 $S(f_K,\lambda)$ 在 $X$ 中闭. 证毕!

下面介绍下半紧函数. 紧性是距离空间或一般拓扑空间的集合的几何性质. 我们熟知的有紧、相对紧和可数紧. 我们说 $A\subseteq X$ 是紧的, 是指 $A$ 的任一开覆盖都有有限子覆盖; $A\subseteq X$ 是相对紧的, 是指 $A$ 的闭包 $\mathrm{cl}A$ 是紧的. 因此, 对于闭集 $A$, 紧和相对紧是等价的.

**定义 1.1.7**　设 $X$ 为距离空间, $f:X\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 称为下半紧函数是指其所有的 $\lambda$-下截集都是相对紧的.

**定理 1.1.1**　设 $(X,d)$ 为距离空间, $f:X\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 为下半连续且下半紧的, 且 $\mathrm{Dom}\,f\neq\varnothing$, 则 $\min f(x)$ 的解集 $M$ 是非空且紧的.

**证明**　设 $\alpha=\inf f(x)(\in\mathbf{R}\cup\{+\infty\})$ 且 $\lambda_0>\alpha$. $\forall\lambda\in(\alpha,\lambda_0],\exists x_\lambda\in S(f,\lambda)\subseteq S(f,\lambda_0)$. 由于 $f$ 下半连续, 故 $S(f,\lambda_0)$ 闭. 又由 $f$ 下半紧知 $S(f,\lambda_0)$ 紧, 故自列紧. 所以存在 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in(\alpha,\lambda_0)}$ 中的一个序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 收敛于 $S(f,\lambda_0)$ 中某个点 $\bar{x}$. 又由 $f$ 的下半连续性知

$$f(\bar{x})=\liminf_{x\to\bar{x}} f(x)=\sup_{\eta>0}\inf_{x\in B(\bar{x},\eta)} f(x)\leqslant\sup_{\eta>0}\inf_{d(x_n,\bar{x})<\eta} f(x_n)\leqslant\inf_{\lambda>\alpha}\lambda=\alpha\leqslant f(\bar{x})$$

因此 $\alpha=f(\bar{x})$. 又 $M=\bigcap\limits_{\alpha<\lambda\leqslant\lambda_0}S(f,\lambda)$ 为无限个紧集的交, 故 $M$ 为紧集. 证毕!

**推论 1.1.2**　设 $(X,d)$ 为距离空间, $K$ 为 $X$ 的紧子集, $f:K\to\mathbf{R}$ 下半连续且有下界, 则必达极小值, 即 $\min\limits_{x\in K}f(x)$ 有解.

**证明**　对 $f_K$ 使用定理 1.1.1 即可. 事实上, $f_K$ 下半连续(命题 1.1.6)且下半紧(因 $K$ 紧). 证毕!

**注**　这个推论是数学分析中"闭区间上连续函数可达最小(最大)值"的推广.

下面的命题可以帮助我们进一步了解下半连续性.

**命题 1.1.7**　设 $X,Y$ 分别为距离空间, $K\subseteq Y$ 为 $Y$ 的紧子集, $g:X\times K\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 下半连续, $f:X\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 定义如

$$\forall x\in X,\quad f(x):=\inf_{y\in K}g(x,y)$$

则 $f$ 是下半连续的.

**证明**　取 $\lambda\in\mathbf{R}$, 设 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subseteq S(f,\lambda)$ 且 $x_n\to x_0(n\to\infty)$. 由于 $g(x,y)$ 下半连续且 $K$ 紧, 故对每个 $x_n$, 存在 $y_n$ 使 $f(x_n)=g(x_n,y_n)$. 又由于 $K$ 紧, 故 $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ 有收敛子列 $\{y_{n_k}\}_{n=1}^\infty$ 收敛于某个 $y_0\in K$. 从而 $\{(x_{n_k},y_{n_k})\}_{n=1}^\infty$ 收敛于 $(x_0,y_0)$. 由于 $g(x,y)$ 下半连续, 知 $S(g,\lambda)$ 闭, 即 $(x_0,y_0)\in S(g,\lambda)$. 从而 $x_0\in S(f,\lambda)$, 因 $f(x_0)\leqslant g(x_0,y_0)\leqslant\lambda$. 证毕!

### 1.1.3 极小化问题的近似解与 Ekeland 定理

在定理 1.1.1 及推论 1.1.2 中, 紧性起着决定性作用, 但紧性要求是很强的. 当紧性不满足时我们可以得到问题(1.1.1)近似极小解的存在性定理, 这就是著名的 Ekeland 定理. 所谓 $\bar{x}$ 为问题(1.1.1)的 $\varepsilon$-近似解, 是指

$$\forall x \neq \bar{x}, \quad f(\bar{x}) < f(x) + \varepsilon d(x, \bar{x})$$

**定理 1.1.2**(Ekeland)　设 $(X,d)$ 为完备的距离空间, $f: X \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ 为严格的、正的下半连续函数, $x_0 \in \mathrm{Dom} f, \varepsilon > 0$. 那么, 存在 $\bar{x} \in X$ 使

(i) $f(\bar{x}) + \varepsilon d(x_0, \bar{x}) \leqslant f(x_0)$;

(ii) $\forall x \neq \bar{x}, f(\bar{x}) < f(x) + \varepsilon d(x, \bar{x})$.

**证明**　不妨设 $\varepsilon = 1$. 作集值映射 $F: X \to \mathcal{P}(X)$, 如 $F(x) := \{y \mid f(y) + d(x,y) \leqslant f(x)\}$. 由于 $f$ 和 $g_x(y) = d(x,y)$ 是下半连续函数, 故 $F(x)$ 是闭集. 另外, $F(x)$ 具有如下性质: ① $y \in F(y)$ (自反性); ② $y \in F(x) \Rightarrow F(y) \subseteq F(x)$ (传递性).

①是明显的. 至于②, 当 $x \notin \mathrm{Dom} f$ 时, $f(x) = +\infty$, $F(x) = X$, 故 $F(y) \subseteq F(x)$. 当 $x \in \mathrm{Dom} f$ 时, 取 $y \in F(x), z \in F(y)$, 即

$$f(z) + d(y,z) \leqslant f(y), \quad f(y) + d(x,y) \leqslant f(x)$$

将上述两式相加并用距离的三角不等式得

$$f(z) + d(x,z) \leqslant f(x), \quad \text{即 } z \in F(x)$$

所以, $F(y) \subseteq F(x)$.

现在考虑极小值函数 $v: \mathrm{Dom} f \to \mathbf{R}$, $v(y) := \inf\limits_{z \in F(y)} f(z)$. 明显有

$$\forall y \in F(x), \quad d(x,y) \leqslant f(x) - v(x) \tag{1.1.6}$$

因此 $F(x)$ 的直径满足: $\mathrm{Diam}[F(x)] \leqslant 2[f(x) - v(x)]$.

另外, 我们以 $x_0$ 为初始点, 按下列方式产生一个迭代序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使

$$f(x_{n+1}) \leqslant v(x_n) + 2^{-n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

(这是可行的, 因为 $v(x)$ 是下确界). 由于 $F(x_{n+1}) \subseteq F(x_n)$, 故 $v(x_n) \leqslant v(x_{n+1})$.

另一方面, 因为总有 $v(y) \leqslant f(y)$, 所以有如下不等式:

$$v(x_{n+1}) \leqslant f(x_{n+1}) \leqslant v(x_n) + 2^{-n} \leqslant v(x_{n+1}) + 2^{-n}$$

从而有

$$0 \leqslant f(x_{n+1}) - v(x_{n+1}) \leqslant 2^{-n}, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{1.1.7}$$

故闭集套 $\{F(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 的直径趋于零. 由于 $X$ 完备, 故存在 $\bar{x} \in X$ 使 $\bigcap\limits_{n \geqslant 0} F(x_n) = \{\bar{x}\}$. 由 $\bar{x} \in F(x_0)$, 即得(i). 又 $\bar{x}$ 属于所有的 $F(x_n)$, 故 $F(\bar{x}) \subseteq F(x_n)$ 且有 $F(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$, 即当

$x \neq \bar{x}$ 时, $x \notin F(\bar{x})$, 亦即 $f(x)+d(x,\bar{x})>f(\bar{x})$, 此乃(ii). 对一般 $\varepsilon>0$, 上述证明阙如. 证毕!

**推论 1.1.3** 在定理 1.1.2 的条件下, 假设对 $\varepsilon,\lambda>0,x_0 \in X$ 有 $f(x_0) \leqslant \inf f(x)+\varepsilon\lambda$, 则存在 $\bar{x} \in X$ 使

(i) $\forall x \in X, f(\bar{x}) \leqslant f(x)$;

(ii) $d(x_0,\bar{x}) \leqslant \lambda$;

(iii) $\forall x \in X, f(\bar{x}) \leqslant f(x)+\varepsilon d(x,\bar{x})$.

此情形下, 近似解的意义更明确.

**例 1.1.1** 生产与消费问题. 比较简单的生产问题是生产者在资源约束的条件下追求收益最大化. 设可以用 $m$ 种资源来生产 $n$ 种产品, $x_j$ 表示第 $j$ 种产品的数量 ($j=1,2,\cdots,n$), $c_j$ 表示第 $j$ 种产品的单位收益 ($j=1,2,\cdots,n$), $b_i$ 表示第 $i$ 种资源的总量 ($i=1,2,\cdots,m$), 在现有技术条件下第 $j$ 种产品对第 $i$ 种资源的消耗系数是 $a_{ij}$ ($i=1,2,\cdots,m$; $j=1,2,\cdots,n$). 用矩阵表示, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$, $b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$, $A=(a_{ij})_{m\times n}$, 则最优资源配置问题为线性规划模型(LP):

$$\max_{Ax\leqslant b,x\geqslant 0} c^{\mathrm{T}}x \quad \text{或} \quad \min_{Ax\leqslant b,x\geqslant 0}[-c^{\mathrm{T}}x]$$

以及资源的影子价格问题的对偶线性规划模型(DLP):

$$\min_{y^{\mathrm{T}}A\geqslant c^{\mathrm{T}},y\geqslant 0} y^{\mathrm{T}}b$$

由于(LP)中约束条件 $D=\{x \mid Ax\leqslant b,x\geqslant 0\}\subseteq \mathbf{R}^n$ 是有界闭集, 即是紧集(按 $\mathbf{R}^n$ 中的欧几里得(Euclid)距离), 而 $f(x)=-c^{\mathrm{T}}x$ 连续(故下半连续). 因此最优资源配置 $x^*$ 和市场影子价格 $y^*$ 都是存在的.

作为供求关系的另一方, 消费者将受到财富水平 $W$ 和市场价格 $p=(p_1, p_2,\cdots,p_n)^{\mathrm{T}}$ 约束, 在此条件下消费者将追求效用 $U(x)$ 最大化, 归结为消费分配问题:

$$\max_{p^{\mathrm{T}}x\leqslant W,x\geqslant 0} U(x)$$

在商品组合选择的连续性假设下, 存在最优消费分配 $\bar{x}$.

### 1.1.4 不动点定理及其应用

很多数学模型的解的存在性和唯一性可以归结为某类映射不动点的存在性和唯一性, 如各类方程、最优化问题等. 这使得不动点理论在运筹学中具有特殊的作用. 对非空集合 $X$ 上的单值映射 $T:X\to X$, $x\mapsto Tx$, 若 $T\bar{x}=\bar{x}$, 则称 $\bar{x}$ 为 $T$ 的不动点.

**例 1.1.2**　设 $f_j:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}(j=1,2,\cdots,n)$ 为 $n$ 个实值函数,

$$T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n, x\mapsto Tx=(x_1-f_1(x),\ x_2-f_2(x),\cdots,x_n-f_n(x))^{\mathrm{T}}$$
$$F(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))^{\mathrm{T}}$$

那么

$$\bar{x}\text{ 为方程 }F(x)=0\text{ 的解}\Leftrightarrow\bar{x}\text{ 为 }T\text{ 的不动点}$$

**例 1.1.3**　设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 为二阶光滑的实值函数, 且 Hesse 矩阵 $H=\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{n\times n}$ 在 $\bar{x}$ 的某个邻域 $A$ 内是正定的, $\nabla f$ 为 $f$ 的梯度, $T:A\to A, x\mapsto Tx=x-\lambda\nabla f$, $\lambda>0$. 那么

$$x^*\text{ 为 }\min_{x\in A}f(x)\text{ 的解}\Leftrightarrow x^*\text{ 为 }T\text{ 的不动点}$$

下面, 作为一般情形, 引入集值映射的不动点概念.

**定义 1.1.8**　设 $X$ 为距离空间, $G:X\to\mathcal{P}(X)$ 为 $X$ 到自身的集值映射, $\bar{x}\in X$, 若 $\bar{x}\in G(\bar{x})$, 则称 $\bar{x}$ 为 $G$ 的不动点.

显然, 集值映射的不动点以单值映射不动点为其特例.

**定理 1.1.3**(Caristi)　设 $(X,d)$ 为完备的距离空间, $G:X\to\mathcal{P}(X)$ 为 $X$ 到自身的集值映射且 $G(x)\neq\varnothing$. 若存在严格的、正的下半连续函数 $f:X\to\mathbf{R}_+\cup\{+\infty\}$ 满足

$$\forall x\in X,\exists y\in G(x)\text{ 使 }f(y)+d(x,y)\leqslant f(x)\tag{1.1.8}$$

则集值映射 $G$ 具有不动点. 进一步, 如果 $f$ 与 $G$ 有更强的关系

$$\forall x\in X,\forall y\in G(x)\text{ 使 }f(y)+d(x,y)\leqslant f(x)\tag{1.1.9}$$

则集值映射 $G$ 具有唯一不动点 $\bar{x}$ 且 $G(\bar{x})=\{\bar{x}\}$.

**证明**　由 Ekeland 定理, 存在 $\bar{x}\in X$ 使

$$\forall x\neq\bar{x},\quad f(\bar{x})<f(x)+\varepsilon d(x,\bar{x})$$

(取 $0<\varepsilon<1$). 按条件 (1.1.8), 存在 $\bar{y}\in G(\bar{x})$ 使 $f(\bar{y})+d(\bar{x},\bar{y})\leqslant f(\bar{x})$. 那么 $\bar{x}=\bar{y}$. 事实上, 倘若 $\bar{x}\neq\bar{y}$, 则

$$d(\bar{x},\bar{y})\leqslant f(\bar{x})-f(\bar{y})\leqslant\varepsilon d(\bar{x},\bar{y})$$

矛盾!所以, $\bar{x}\in G(\bar{x})$. 同理, 可证第二部分. 证毕!

下面我们给出 $f$ 不必满足下半连续性但 $G$ 有闭图像的条件下集值映射的不动点定理. 所谓集值映射 $G:X\to\mathcal{P}(Y)$ 的图像是指点集

$$\mathrm{Graph}G:=\{(x,y)\in X\times Y\,|\,y\in G(x)\}\tag{1.1.10}$$

**定理 1.1.4**　设 $(X,d)$ 为完备的距离空间, $G:X\to\mathcal{P}(X)$ 为 $X$ 到自身的集值映

射且具有闭图像. 若 $f: X \to \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ 满足(1.1.8), 则 $G$ 具有不动点.

**证明**　取 $x_0 \in \mathrm{Dom} f$, 作迭代序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ 满足:

$$x_{n+1} \in G(x_n), \quad d(x_{n+1}, x_n) \leqslant f(x_n) - f(x_{n+1}) \tag{1.1.11}$$

这意味着正数列 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是递减的且有下界 0, 故收敛. 设 $f(x_n) \to \alpha (n \to \infty)$. 将(1.1.11)各式累加多次即得

$$d(x_p, x_q) \leqslant \sum_{n=p}^{q-1} d(x_{n+1}, x_n) \leqslant f(x_p) - f(x_q)$$

令 $p \to \infty, q \to \infty$, 有 $d(x_p, x_q) \to 0$. 因此 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列. 又 $(X,d)$ 完备, 所以 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有极限, 设为 $\bar{x}$. 而 $(x_n, x_{n+1}) \in \mathrm{Graph}G$ 且 $\mathrm{Graph}G$ 闭, 故 $(\bar{x}, \bar{x}) \in \mathrm{Graph}G$, 即 $\bar{x} \in G(\bar{x})$, 亦即 $\bar{x}$ 为 $G$ 的不动点. 证毕!

作为定理 1.1.4 的推论, 我们方便得到熟知的 Banach 不动点定理, 即压缩映射原理.

**定理 1.1.5**(Banach)　设 $(X,d)$ 为完备的距离空间, $g: X \to X$ 为 $X$ 到自身的压缩映射, 即

$$\exists k \in (0,1) \text{ 使 } \forall x, y \in X, \quad d(g(x), g(y)) \leqslant k d(x, y) \tag{1.1.12}$$

则 $g$ 有唯一的不动点.

**证明**　定义 $f: X \to \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$, $x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} d(g^n(x), g^{n+1}(x))$. 由于

$$d(g^n(x), g^{n+1}(x)) \leqslant k d(g^{n-1}(x), g^n(x)) \leqslant k^2 d(g^{n-2}(x), g^{n-1}(x)) \leqslant \cdots \leqslant k^n d(x, g(x))$$

因此

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{1-k} d(x, g(x)) \leqslant +\infty$$

另一方面, 注意到

$$f(x) = d(x, g(x)) + \sum_{n=1}^{\infty} d(g^n(x), g^{n+1}(x)) = d(x, g(x)) + f(g(x))$$

而 $G$ 由 $g$ 定义, 即 $G(x) = \{g(x)\}$ 且 $g$ 为连续映射, 知 $G$ 有闭图像, 从而满足定理 1.1.4 的条件, 所以 $g$ 有不动点. 又若 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 均为 $g$ 的不动点, 则

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = d(g(\bar{x}), g(\bar{y})) \leqslant k d(\bar{x}, \bar{y}) \quad (0 < k < 1)$$

所以 $\bar{x} = \bar{y}$. 证毕!

接下来的 Brouwer 不动点定理在研究方程和博弈论中有重要作用.

**定义 1.1.9**　设 $x_0, x_1, \cdots, x_r \in \mathbf{R}^n$, 且 $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \cdots, x_r - x_0$ 线性无关, 则称由 $x_0, x_1, \cdots, x_r$ 生成的凸包

$$\mathrm{co}\left\{x_0,x_1,\cdots,x_r\right\}=\left\{x=\sum_{i=0}^{r}\lambda_i x_i \left| \sum_{i=0}^{r}\lambda_i=1,0\leqslant\lambda_i\leqslant 1,i=0,1,2,\cdots,r\right.\right\}$$

为 $\mathbf{R}^n$ 中以 $x_0,x_1,\cdots,x_r$ 为顶点的 $r$ 维单纯形，记为 $S^r(x_0,x_1,\cdots,x_r)$，简记为 $S^r$.

如图 1.1.1 所示为 $\theta,x_1,x_2,x_3$ 生成的单纯形.

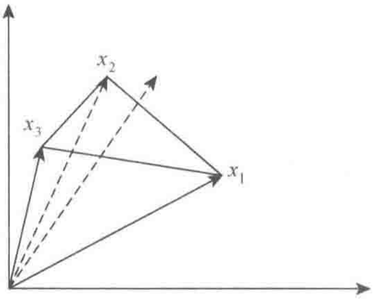

图 1.1.1

**定义 1.1.10** 设 $S^r(x_0,x_1,\cdots,x_r)\subseteq\mathbf{R}^n$ 为单纯形，$x=\sum\limits_{i=0}^{r}\lambda_i x_i\in S^r$，则称 $\lambda(x)=(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_r)^{\mathrm{T}}$ 为 $x$ 关于顶点 $x_0,x_1,\cdots,x_r$ 的坐标. 对 $\left\{x_{j_0},x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_k}\right\}\subseteq\left\{x_0,x_1,\cdots,x_r\right\}$，若 $x_{j_1}-x_{j_0},x_{j_2}-x_{j_0},\cdots,x_{j_k}-x_{j_0}$ 线性无关，则称 $S^k(x_{j_0},x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_k})$ 为 $S^r$ 的 $k$ 维面. 若 $x=\sum\limits_{i=0}^{r}\lambda_i x_i\in S^r$，$\lambda_{j_0},\lambda_{j_1},\cdots,\lambda_{j_k}$ 为 $x$ 的非零坐标，则称 $S^k(x_{j_0},x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_k})$ 为 $x$ 在 $S^r$ 中的负荷. 将 $S^r$ 分解为若干个单纯形，使得其中任意两个单纯形要么不相交，要么它们的交即为它们的公共面，则称这些单纯形的集合为 $S^r$ 的一个三角剖分.

**定义 1.1.11** 设 $S^r(x_0,x_1,\cdots,x_r)\subseteq\mathbf{R}^n$ 为单纯形，$\Lambda=\left\{T_1^r,T_2^r,\cdots,T_m^r\right\}$ 为 $S^r$ 的一个 $r$ 维三角剖分. $\varphi$ 是这样的映射：它将每个 $T_j^r\,(j=1,2,\cdots,m)$ 的顶点映成这个顶点在 $S^r$ 的负荷的某个顶点. 若某个 $T_{j^*}^r=S^r(x_0^*,x_1^*,x_2^*,\cdots,x_r^*)\in\Lambda$ 满足：

$$\left\{\varphi(x_0^*),\varphi(x_1^*),\varphi(x_2^*),\cdots,\varphi(x_r^*)\right\}=\{x_0,x_1,\cdots,x_r\}$$

则称 $T_{j^*}^r$ 与 $S^r$ 吻合. 若某个 $T_{i^*}^r$ 的某个 $r-1$ 维面 $V=S^{r-1}(x_0',x_1',\cdots,x_{r-1}')$ 的顶点满足：

$$\left\{\varphi(x_0'),\varphi(x_1'),\varphi(x_2'),\cdots,\varphi(x_{r-1}')\right\}=\{x_1,\cdots,x_r\}$$

则称 $V$ 为 $T_{i^*}^r$ 的一个特异面.

**引理 1.1.1** (Sperner) 单纯形 $S^r$ 的任意三角剖分 $\Lambda$ 中至少有一个 $r$ 维单纯形与 $S^r$ 吻合.

**证明** 只需证明 $\Lambda$ 中有奇数个 $r$ 维单纯形与 $S^r$ 吻合. 我们对维数进行归纳. 当 $r=0$，结论显然成立. 假设 $r>0$ 且维数为 $r-1$ 结论成立. 往证，维数为 $r$ 时，结论也成立.

易知，对 $\Lambda$ 的每个单纯形 $T_j^r\,(j=1,2,\cdots,m)$，分两种情况：① $T_j^r$ 与 $S^r$ 吻合，则 $T_j^r$ 恰有一个特异面；② $T_j^r$ 不与 $S^r$ 吻合，则 $T_j^r$ 要么没有特异面，要么恰有两个特异面. 用 $a_j$ 表示 $T_j^r$ 的特异面个数 $(j=1,2,\cdots,m)$. 要证明有奇数个 $\Lambda$ 中的单纯形与 $S^r$