精彩数学系列

JINGCAISHUXUEXILIE

计数原理与统计

JISHUYUANLIYUTONGJIQIANTIQIAOJIEJISHUYUANLIYUTONGJIQIANTIQIAOJIE

千题巧解

- 奇思妙解
- 专题突破
- 让数学变得如此生动

■张祖寅 编著

高中数学必备

長春出版社

精彩数学系列

JINGCAISHUXUEXILIE

计数原理与统计

JISHUYUANLIYUTONGJIQIANTIQIAOJIE

千题巧解

■张祖寅　编著

长春出版社

图书在版编目（CIP）数据
计数原理与统计千题巧解/张祖寅编著. —长春：长春出版社，2007.7
（精彩数学系列）
ISBN 978-7-5445-0462-1

Ⅰ. 计... Ⅱ. 张... Ⅲ. 数学课—高中—解题 Ⅳ. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 075197 号

责任编辑：杨爱萍
封面设计：郝　威
版式设计：王久慧

出版发行：长春出版社　　总编室电话:0431-88563443
发行部电话:0431-88561180　　读者服务部电话:0431-88561177
地　　址：吉林省长春市建设街 1377 号
邮　　编：130061
网　　址：www.cccbs.net
制　　版：吉林省久慧文化有限公司
印　　刷：长春市新世纪印业有限公司
经　　销：新华书店

开　　本：880×1230 毫米　32 开本
字　　数：220 千字
印　　张：7.375 印张
版　　次：2007 年 7 月第 1 版
印　　次：2007 年 7 月第 1 次印刷
定　　价：11.00 元

前 言

数学枯燥乏味吗？我不这样想。

我觉得数学生动、精彩。我在解数学题的时候常常被那种简洁的解法感动，陶醉在优美的逻辑推理中。

一个看起来并不复杂的问题，甚至，一个简单的选择题，因为思维的角度不同，往往会出现各种不同的解题方法；一个看上去陌生的问题，深思熟虑之后，把它化归到熟悉的题型中去，于是豁然开朗，于是内心充满了甜蜜。

是的，数学有它独特的魅力，这种魅力决不是轻而易举就能觉察与体验到的，而真正要享受这魅力带给我们的愉悦，必须付出艰辛和血汗。

我真诚地希望高中学生能从心底里喜爱数学，从而激发智慧和创造力，这也便是我倾其全力写作的本意。

《精彩数学》系列丛书能让你爱不释手吗？希望这巧妙的解法能让你在顿悟中不断进取，能让你的一生更加的精彩！

编者

目　录

CONTENS

计数原理与统计千题巧解

第一章 计数原理

1 分类计数原理、分步计数原理

双基提炼

1. 分类计数原理

做一件事,完成它可以有 n 类办法. 在第一类办法中有 m_1 种不同方法,在第二类办法中有 m_2 种不同的方法,……,第 n 类办法中有 m_n 种不同方法. 那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法.

2. 分步计数原理

做一件事,完成它需要分成 n 个步骤,做第一步有 m_1 种不同的方法,做第二步有 m_2 种不同的方法,……,做第 n 步有 m_n 种不同的方法. 那么完成这件事共有 $N=m_1\cdot m_2\cdots m_n$ 种不同的方法.

3. 分类计数原理和分步计数原理的共同点是:它们都是研究完成一件事情,共有多少种不同的方法;不同点在于完成一件事情的方式不同,分类计数原理是在"分类完成",即任何一类办法中任何一种方法都能独立完成这件事. 分步计数原理是在"分步完成",即这些方法需要分步,各个步骤顺次相依,且每一步都完成了,才能完成这件事情.

4. 运用两个基本原理时，应注意以下两个方面：

分类计数原理中的“做一件事，完成它可以有 n 类办法”，是对完成这件事的所有方法的一个分类. 分类时，首先要根据问题的特点确定一个分类的标准，然后在确定的分类标准下进行分类，其次分类时要注意满足一个基本要求：完成这件事的任何一种方法必属于某一类，并且分别属于不同两类的两种方法是不同的方法. 只有满足这些条件，才能用分类计数原理.

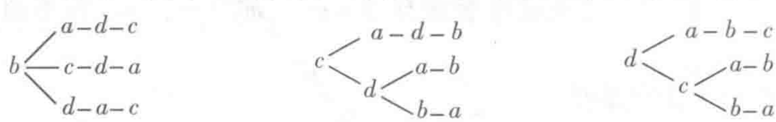
分步计数原理中的“做一件事，完成它需要分成 n 个步骤”，是指完成这件事的任何一种方法，都要分成 n 个步骤. 分步时，首先要根据问题的特点确定一个分步的标准，其次分步时还要注意满足完成一件事必须并且只需连续完成这 n 个步骤后这件事才算完成. 只有满足这些条件，才能用分步计数原理.

好 题 导 航

例 1 a,b,c,d 排成一行，其中 a 不排第一，b 不排第二，c 不排第三，d 不排第四的不同排法共有 ( )

A. 8 种　　B. 9 种　　C. 16 种　　D. 23 种

解析 依题意，符合要求的排法可分为第一个排 b,c,d 中的某一个，共 3 类，每一类中不同排法可采用画“树状图”的方式逐一排出：



则符合题意的不同排法共有 9 种，选 B.

点评 按照分“类”的思路，本题应用了分类计数原理，为把握不同排列的规律，“树状图”是一种具有直观性的有效做法.

例 2 三边长均为整数，且最大边长为 11 的三角形的个数是 ( )

A. 16　　B. 26　　C. 36　　D. 46

解析 设较小的两边长为 x、y 且 $x \leqslant y$，

则 $x \leqslant y \leqslant 11$，$x+y>11$，$x$、$y \in \mathbf{N}^*$.

当 $x=1$ 时，$y=11$；

当 $x=2$ 时，$y=10,11$；

当 $x=3$ 时，$y=9,10,11$；

当 $x=4$ 时，$y=8,9,10,11$；

当 $x=5$ 时，$y=7,8,9,10,11$；

当 $x=6$ 时，$y=6,7,8,9,10,11$；

当 $x=7$ 时，$y=7,8,9,10,11$；

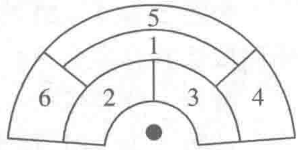
……

当 $x=11$ 时，$y=11$.

所以不同三角形的个数为 $1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1=36$. 选 C.

点评 本题关键是列出约束条件，然后寻找 $x=1,2,\cdots,11$ 时，y 的取值个数的规律，再用分类计数原理求解.

例 3 某城市在中心广场建造一个花圃，花圃分为 6 个部分(如下图). 现要栽种 4 种不同颜色的花，每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花，不同的栽种方法有________种(以数字作答).



解法一 从题意来看 6 部分种 4 种颜色的花，又从图形看知必有 2 组同颜色的花，从同颜色的花入手分类求：

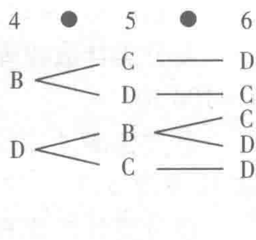
(1)②与⑤同色，则③⑥也同色或④⑥也同色，所以共有 $N_1=4\times3\times2\times2\times1=48$ 种；

(2)③与⑤同色，则②④或⑥④同色，所以共有 $N_2=4\times3\times2\times2\times1=48$ 种；

(3)②与④且③与⑥同色，则共有 $N_3=4\times3\times2\times1=24$ 种.

所以，共有 $N=N_1+N_2+N_3=48+48+24=120$ 种.

解法二 设颜色为 A、B、C、D 四色，先安排 1、2、3 有 A_4^3 种不同的栽法，不妨设 1、2、3 已分别栽种 A、B、C，则 4、5、6 栽种方法共 5 种，由左侧树状图清晰可见.



根据分步计数原理，

不同栽种方法有 $N=A_4^3\times5=120$.

点评 ①解法一是常规解法,解法二安排4、5、6时又用了分类和列举的方法. ②较复杂的应用题,需确定或设计出完成事件的程序,依需要分类或分步("类"与"类"之间独立且并列,"步"与"步"相依且连续),每个程序都是简单的排列组合问题.

例4 已知直线 l 上的三点 P_1、P_2、P_3 及 l 外一点 A,过这四点中的两点连直线,则可连得________条不同的直线.

解析 以直线过不过 A 点为分类标准,过 A 点的3条,不过 A 点的1条,由分类计数原理得可连不同的直线 $3+1=4$ 条.

变式1:在1~20共20个整数中取两个数相加,使其和为偶数的不同取法共有多少种?

解析 取 $a+b$ 与取 $b+a$ 是同一种取法. 分类标准为两加数的奇偶性,

第一类,偶偶相加,由分步计数原理得 $(10\times9)/2=45$ 种取法;

第二类,奇奇相加,也有 $(10\times9)/2=45$ 种取法.

根据分类计数原理共有 $45+45=90$ 种不同取法.

变式2:在1~20共20个整数中取两个数相加,使其和大于20的不同取法共有多少种?

解析 分类标准一:设两加数为 A、B,固定加数 A.

加数 A 为1时,加数 B 只有20这1种取法;

加数 A 为2时,加数 B 有19或20两种取法;

加数 A 为3时,加数 B 为18,19或20共3种取法;

……

加数 A 为10时,加数 B 为11,12,…,20共10种取法;

加数 A 为11时,加数 B 有9种取法……

加数 A 取19时,加数 B 有1种取法.

由分类计数原理,得不同取法共有 $1+2+\cdots+9+10+9+\cdots+2+1=100$ 种.

分类标准二:固定和的值. 有和为21,22,…,39这几类,依次有取法10,9,9,8,8,…,2,2,1,1种.

由分类计数原理得不同取法共有 $10+9+9+\cdots+2+2+1+1=100$ 种.

例 5 一个口袋内装有 5 个小球,另一个口袋装有 4 个小球,所有这些小球的颜色互不相同.

(1)从两个口袋内任取 1 个小球,有多少种不同的取法?

(2)从两个口袋内各取 1 个小球,有多少种不同的取法?

解析 (1)从两个口袋中任取一个小球,有两类办法:

第一类办法是从第一个口袋内任取 1 个小球,从 5 个小球中任取 1 个,有 5 种方法;

第二类办法是从第二个口袋内任取 1 个,有 4 种方法.

根据分类计数原理,得到不同的取法的种数是 $N=m_1+m_2=5+4=9$(种).

(2)从两个口袋内各取 1 个小球,可以分成两个步骤来完成:

第一步从第一个口袋内取 1 个小球,有 5 种方法;

第二步在第二个口袋内取 1 个小球,有 4 种方法.

根据分步计数原理,得到不同的取法种数是 $N=m_1\cdot m_2=5\times4=20$(种).

即:从两个口袋内任取 1 个小球,有 9 种不同的取法;从两个口袋内各取 1 个小球,有 20 种不同取法.

点评 在用两个原理解决问题时,一定要分清完成这件事,是有 n 类办法还是需分成 n 个步骤.应用分类计数原理必须要求各类的每一种方法都保证了完成这件事;应用分步计数原理则是各步均是完成这件事必须经由的若干彼此独立的步骤.

解题时分清用分类计数原理还是分步计数原理的关键在于“分类完成”还是“分步完成”.

例 6 用 0,1,2,3,4 这一组数字.

(1)组成比 1000 小的正整数有多少种不同的方法?

(2)组成无重复数字的三位偶数有多少种不同的方法?

解析 (1)解法一(直接法):

据题意,比 1000 小的正整数可以是一位数、两位数或三位数三类.

一位数的取法,从 1,2,3,4 中任取一个,即有 4 种;

两位数:十位从 1,2,3,4 中任取一个,有 4 种取法,接着取个位,从 0,1,2,3,4 中任取一个有 5 种取法,即 $4\times5=20$(种);

三位数：百位从 1,2,3,4 中取，有 4 种取法，个位、十位都可以从 0,1,2,3,4 中任取一个，各有 5 种取法，即三位数有 $4\times5\times5=100$(种).

则共有 $4+20+100=124$ 种不同的方法.

解法二（间接法）：

首先从 0,1,2,3,4 中任取一个数字分别作为百位、十位、个位，

则有 $5\times5\times5=125$ 种取法.

又因百、十、个位都取 0 时，得到的不是正整数，

则应有 $125-1=124$ 种不同取法.

(2)解法一：

要组成无重复数字的三位偶数，个位只能取 0,2,4，百位不能取 0.

所以我们可以先从个位看起.

	个 百 十
个位取 0 时	$1\times4\times3=12$(种)
个位取 2 或 4 时	$2\times3\times3=18$(种)

则共有 $12+18=30$(种).

解法二：

从百位看起：

	百 个 十
百位取 1 或 3 时	$2\times3\times3=18$(种)
百位取 2 或 4 时	$2\times2\times3=12$(种)

则共有 $18+12=30$(种).

解法三：

先不考虑偶数的要求，则可组成无重复数字的三位数有：

	百 十 个
	$4\times4\times3=48$(种).
减去三位奇数：	个 百 十
个位从 1 或 3 中取	$2\times3\times3=18$(种)

则共有 $48-18=30$(种).

解法四：

由题意：百位不可以取 0，则可以从 0 这个特殊元素入手，分为三类：个位取 0、十位取 0 或三个数字都不取 0.

个 百 十

则个位取0 $1\times4\times3=12$(种)

十 个 百

十位取0 $1\times2\times3=6$(种)

个 百 十

不选0,个位选2或4 $2\times3\times2=12$(种)

则共有$12+6+11=30$(种).

点评 在具体分类或分步时,要分析题目的要求,对元素(本题中0、1、2、3、4这些数字)和位置(百、十、个位)的特殊性进行识别,得到0、2、4为特殊元素(以下简称特元),百、个位为特位.在逐步分类、分步时,优先考虑特元、特位,如(2)中解法1、2、3先考虑百、个位的特殊要求,即从特位入手;解法四从0出发,即特元出发进行分类.

例7 电视台在"欢乐今宵"节目中拿出两个信箱,其中存放着先后两次竞猜中成绩优秀的观众来信,甲信箱中有30封,乙信箱中有20封.现由主持人抽奖确定幸运观众,若先确定一名幸运之星,再从两信箱中各确定一名幸运伙伴,有多少种不同的结果?

解析 分两类:

(1)幸运之星在甲箱中抽,再在两箱中各定一名幸运伙伴,有$30\times29\times20=17400$种结果;

(2)幸运之星在乙箱中抽,同理有$20\times19\times30=11400$种结果.

因此共有$17400+11400=28800$种不同结果.

点评 在综合运用两个原理时,既要合理分类,又要合理分步,一般情况是先分类再分步.

例8 从集合$\{1,2,3,\cdots,10\}$中,选出由5个数组成的子集,使得这5个数中的任何两个数的和不等于11,这样的子集共有多少个?

解析 和为11的数共有5组:1与10,2与9,3与8,4与7,5与6,子集中的元素不能取自同一组中的两数,即子集中的元素取自5个组中的一个数.而每个数的取法有2种,

所以子集的个数为$2\times2\times2\times2\times2=2^5=32$.

点评 解本题的关键是找出和为11的5组数,然后再用分步计数原理求解.若将例中选出5个数组成子集改为选出4个数呢?答案:

$C_5^4 \cdot 2^4 = 80$ 个.

例 9 有红、黄、白色旗子各 n 面($n > 3$),取其中一面、两面、三面组成纵列信号,可以有多少不同的信号?

解析 因为纵列信号有上、下顺序关系,所以是一个排列问题,信号分一面、两面、三面三种情况(三类),各类之间是互斥的,所以用加法原理:

(1)升一面旗,共有 3 种信号;

(2)升两面旗,要分两步,连续完成每一步,信号方告完成,而每步又是独立的事件,故用乘法原理,因同色旗子可重复使用,故共有 $3 \times 3 = 9$ 种信号;

(3)升三面旗,有 $3 \times 3 \times 3 = 27$ 种信号.

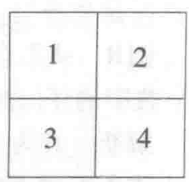
所以共有 $3 + 9 + 27 = 39$ 种信号.

点评 (1)加法原理与乘法原理的区别在于联斥性,前者"斥"——互斥独立事件,后者"联"——相依事件.因而有"顺序"决"问题","联斥"定"原理"的说法.

(2)加、乘原理是排列、组合问题的理论依据,在分析问题和指导解题中起着关键作用,运用加法原理的关键在于恰当地分类(分情况),要使所分类别既不遗漏,也不重复;运用乘法原理的关键在于分步,要正确设计分步的程序,使每步之间既互相联系,又彼此独立.

例 10 用五种不同的颜色给图中的四个区域涂色,每个区域涂一种颜色,共有多少种不同的涂法?

解析 从第 1 号区域开始涂,有 5 种不同的涂法;余下的区域,第 2 号区域有 4 种不同的涂法,第 3、4 号区域分别有 3 种和 2 种不同的涂法,根据分步计数原理知,按题意共有 $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 种不同的涂法.



错!

点评 本题采用分步计数原理来解是正确的,但对每个区域不同的涂法种数来说,第 1 号区域有 5 种,第 2、3、4 号区域同样也有 5 种.

正确 由于每一个区域都有 5 种不同的涂法,所以给这四个区域

涂色,不同的涂法共有 $5\times5\times5\times5=625$ 种.

变式 用五种不同的颜色给图中的四个区域涂色,每个区域涂一种颜色,且相邻(有公共边)的区域的颜色要不同,则共有多少种不同的涂法?

解析 第1号区域有5种不同的涂法,第2号区域有4种不同的涂法,第3号区域有3种不同的涂法,第4号区域有3种不同的涂法,根据分步计数原理,共有 $5\times4\times3\times3=180$ 种不同的涂法.

错!

点评 第1号区域有5种不同的涂法,则第2号区域有4种不同的涂法,第3号区域只与1号区域相邻,它的涂色只要与1号区域不同即可,故它也有4种不同的涂法.4号区域涂法种数受3号区域与2号区域共同影响,3号与2号区域同色与否,4号区域的涂法种数是不同的.

正确 第1号区域有5种不同的涂法,则第2号区域有4种不同的涂法;当第3号区域与第2号区域同色时,3号区域有1种涂法,此时第4号区域有4种不同的涂法;当第3号区域与第2号区域不同色时,3号区域有3种涂法,此时4号区域也有3种不同的涂法.根据分步计数原理和分类计数原理,共有 $5\times4\times(1\times4+3\times3)=260$ 种不同的涂法.

智力冲浪

一、选择题

1. 用1,2,3,4,5可组成各位上的数字允许重复的三位数有( )

A. 60个　B. 75个　C. 125个　D. 225个

2. 用数字1,2,3可写出各位上的数字允许重复的小于1000的正整数 ( )

A. 9个　B. 27个　C. 39个　D. 81个

3. 十字路口来往的车辆,如果不允许回头,共有行车路线的种数为 ( )

A. 24　B. 16　C. 12　D. 10

4. 从正方体的6个面中选取3个面,其中2个面不相邻的选法共有 ( )

A. 8 种　　B. 12 种　　C. 16 种　　D. 20 种

5. 某城市的电话号码，由六位升为七位（首位数字均不为零），则该城市可增加的电话部数是　　（　　）

A. $9\times8\times7\times6\times5\times4\times3$　　B. 8×9^6

C. 9×10^6　　D. 81×10^5

6. 从长度分别为 1、2、3、4 的四条线段中，任取三条的不同取法共有 n 种. 在这些取法中，以取出的三条线段为边可组成的三角形的个数为 m，则 $\frac{m}{n}$ 等于　　（　　）

A. 0　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

7. 某班新年联欢会原定的 6 个节目已排成节目单，开演前又增加了 3 个新节目，如果将这 3 个节目插入节目单中，那么不同的插法种数为　　（　　）

A. 504　　B. 210　　C. 336　　D. 120

8. 从 1 到 10 的正整数中，任意抽取两个相加，所得和为奇数的不同情形的种数为　　（　　）

A. 10　　B. 15　　C. 20　　D. 25

9. 72 的正约数（包括 1 和 72）共有　　（　　）

A. 6 个　　B. 9 个　　C. 12 个　　D. 15 个

二、填空题

10. 从甲地到乙地有 2 条路可通，从乙地到丙地有 3 条路可通，从甲地到丁地有 4 条路可通，从丁地到丙地有 2 条路可通，则从甲地到丙地共有________种不同的走法.

11. 一种号码拨号锁有 4 个拨号盘，每个拨号盘上有从 0 到 9 共 10 个数字，这 4 个拨号盘可以组成________个四位数号码.

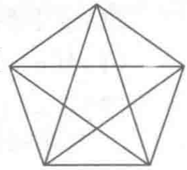
12. 从 $-1,0,1,2$ 这四个数中选三个不同的数作为函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的系数，可组成不同的二次函数共有________个，其中不同的偶函数共有________个（用数字作答）.

13. 集合 $\{1,2,3,4,5\}$ 的子集的个数共有________个.

14. 在所有两位数中，个位数字大于十位数字的两位数共有

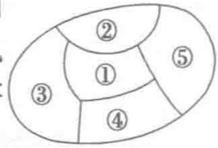
________个.

15. 要从甲、乙、丙 3 名工人中选出 2 名分别上日班和晚班,则不同的选法有________种.



16. 如图的五边形中,共有________个不同的三角形.

17. 如图,一个地区分为 5 个行政区域,现给地图着色,要求相邻区域不得使用同一颜色. 现有 4 种颜色可供选择,则不同的着色方法共有________种(以数字作答).



三、解答题

18. 75600 有多少个正约数? 有多少个奇约数?

19. 关于正整数 2160,求:

(1)它有多少个不同的正因数?

(2)它的所有正因数的和是多少?

20. 用 0,1,2,3,4,5 这六个数字,

(1)可以组成多少个数字不重复的三位数?

(2)可以组成多少个数字允许重复的三位数?

(3)可以组成多少个数字不允许重复的三位数的奇数?

(4)可以组成多少个数字不重复的小于 1000 的自然数?

(5)可以组成多少个大于 3000,小于 5421 的数字不重复的四位数?

21. 求下列集合的元素个数.

(1) $M=\{(x,y)\mid x,y\in N,x+y\leqslant 6\}$;

(2) $H=\{(x,y)\mid x,y\in N,1\leqslant x\leqslant 4,1\leqslant y\leqslant 5\}$.

22. 五封不同的信投入四个邮筒.

(1)随便投完五封信,有多少种不同投法?

(2)每个邮筒中至少要有一封信,有多少种不同投法?

23. 满足 $A\cup B=\{1,2\}$ 的集合 A、B 共有多少组?

24. (1)设 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$,$B=\{x,y,z\}$,从 A 到 B 共有多少个不同映射?

(2)6 个人分到 3 个车间,共有多少种分法?

25. 甲、乙、丙、丁四个人各写一张贺卡,放在一起,再各取一张不是自己所写的贺卡,共有多少种不同的取法?