国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

■ 21世纪高职高专规划教材
■ 21世纪高等学校精品教材
■ 东北大学出版社重点推荐教材

高等数学

主编 周志燕 程黄金

GAODENG SHUXUE

東北大學出版社
Northeastern University Press

■ 21世纪高职高专规划教材
■ 21世纪高等学校精品教材
■ 东北大学出版社重点推荐教材

高等数学

主　编　周志燕　程黄金
副主编　喻为民　冯英华　唐晓东
编　委　（按编写章节排序）
喻为民　唐晓东　周志燕
程黄金　冯英华　宫传瑞
李　俊　邓　军　张千里

GAODENG SHUXUE

东北大学出版社
Northeastern University Press

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 周志燕，程黄金主编．—沈阳：东北大学出版社，2014. 8
ISBN 978 -7 -5517 -0719 -0

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①周…　②程　Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材
Ⅳ. ①O3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 165928 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化街 3 号巷 11 号
邮编：110819
电话：024—83680267（社务室）83687331（市场部）
传真：024—83680265（办公室）83680178（出版部）
网址：http：//www. neupress. com
E-mail：neuph@ neupress. com
印 刷 者：北京俊林印刷有限公司
发 行 者：东北大学出版社 北京志远思博文化有限公司
幅面尺寸：185mm ×260mm
印　　张：22. 25
字　　数：498 千字
出版时间：2014 年 8 月第 1 版
印刷时间：2014 年 8 月第 1 次印刷
策划编辑：志远思博
责任编辑：孙　锋
责任校对：潘佳宁
封面设计：唐韵设计
责任出版：唐敏志

ISBN 978 -7 -5517 -0719 -0　　　　定　价：39. 00

前 言

高等数学的理论基础、思想方法不仅是学生学习后继课程的基本工具，也是培养学生创造能力的重要途径，在为社会培养大批高素质技能型人才方面发挥着不可替代的作用。为了适应新的高职高专教育人才培养要求，并结合《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010－2020年)》中提出的人才培养目标和培养模式，我们在继承原有教材建设与改革成果的基础上，充分汲取了近年来一些高职院校在基础课程教学改革方面的成功经验，组织编写了这本《高等数学》教材。本书共分三篇，第一篇为基础数学模块，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数微积分学，无穷级数，常微分方程等八章；第二篇为专业数学模块，内容包括行列式与矩阵，线性方程组，随机事件与概率，随机变量及其数字特征，积分变换等五章；第三篇为应用数学模块，内容包括数学建模简介一章。每章内容后依次编有本章小结、数学文库和复习题，书后附有初等数学常用公式、导数与微分公式、积分基本公式、标准正态分布数值表等，供学生学习时参考。

全书体系结构新颖、内容涵盖全面、篇章设置合理，具有以下几个特色：

第一，有较强的针对性和可读性。教材从当今高职高专院校的学生实际出发，注意高等数学与初等数学的衔接，在渐进式的思维与推理模式下，尽可能地借助客观实例与几何图形来阐述数学概念与定理，力求使抽象的数学概念形象化、复杂的论证过程简明化，便于读者的理解和掌握。

第二，突出数学应用能力的培养。为体现高等教育要“以就业为导向”、“以培养技能型人才为目标”的要求，本书不但在很多章节增加或调整了有实际应用背景的例题与习题，还扩充了数学建模简介等应用数学的内容，力图体现教育的实践性和应用性。

第三，注重数学文化在数学素质中的地位。教材在充分考虑数学课程的工具功能的前提下，更加注重发挥其文化功能的作用，在每章的结束部分都给出了有关阅读材料“数学文库”，为学生的可持续发展奠定基础。

第四，内容编排与例题设置更加合理。教材在编写过程中考虑到了现在高职教育的多样性和差异性，删去了一些不必要的逻辑推导和理论证明，列举了大量的典型例题，习题和复习题不仅题型丰富，而且难易比例适当，适合不同层次学生学习的需要。

本书由淮南联合大学周志燕老师、程黄金老师担任主编，喻为民老师、冯英华老师和唐晓东老师担任副主编。参加编写的人员主要分工如下：喻为民、唐晓东、周志燕、程黄金和冯英华老师编写了全书第1章至第12章，宫传瑞、李俊、邓军和张千里老师合作编

写了第 13 章和第 14 章，全书由周志燕老师负责策划与统稿。编写组在编写过程中得到了淮南联合大学教务处、基础部和有关出版社的大力支持和帮助，在此一并致谢。

由于成书仓促，编审人员水平有限，不足之处，请有关专家、学者及使用本书的师生指正。我们诚恳地希望各界同仁及广大教师关注并支持这套教材的建设，及时将教材使用过程中遇到的问题和改进意见反馈给我们，以供修订时参考。

编者

2014 年 8 月

目　录

第一篇　基础数学模块

第二篇　专业数学模块

第三篇 应用数学模块

第一篇　基础数学模块

第1章　函数、极限与连续

函数是描述事物变化过程中变量相依关系的数学模型，是数学的基本概念之一. 与初等数学不同的是，高等数学是在动态的过程中以函数为主要研究对象的一门数学学科. 极限是高等数学中研究函数的一个重要工具. 连续则是函数的一个重要性质，连续函数是高等数学研究的主要对象.

本章在总结中学已有函数知识的基础上，进一步阐述初等函数的概念，介绍高等数学最基本的工具——极限的概念，进而研究极限的性质、极限的运算法则以及有关函数连续性的基本知识，为后续知识的学习奠定必要的基础.

1.1　函　数

1.1.1　函数的概念与性质

1.1.1.1　函数的概念

在研究自然的、社会的以及工程技术的某个过程中，经常会遇到各种不同的量. 例如时间、速度、质量、温度、成本和利润等. 这些量一般可以分为两类. 其中一类在所研究的过程中保持不变，这样的量称为**常量**；而另一类在所研究的过程中是变化的，这样的量称为**变量**.

在同一过程中，往往会有几个变量同时变化，但是它们的变化不是孤立的，而是按照一定的规律相互联系着，也就是说它们之间存在着相互依赖关系. 例如：

例 1.1.1　自由落体的规律为

$$h=\frac{1}{2}gt^2.$$

式中，h 表示下降的距离，t 表示下落的时间，g 表示重力加速度(视为常量).

这个公式给出了在物体自由降落的过程中，距离 h 与时间 t 之间的依赖关系. 而这种变量之间的相互依赖关系，用数学的语言描述出来就得到了函数的定义.

定义 1.1　设 D 为非空实数集. 如果按照某种对应法则(或关系) f，对于任意的 $x\in D$，都有唯一的实数 y 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的 x 的函数，记作 $y=f(x)$.

这里，称 x 为**自变量**，其变化范围 D 为**函数的定义域**，通常记作 $D(f)$. 称 y 为**因变量**，当自变量 x 取遍 D 上每一个值时，相应的 $y=f(x)$ 的变化范围称为**函数的值域**，通常记作 $R(f)$.

如果 x_0 是一个确定的数，则 $f(x_0)$ 表示自变量 $x=x_0$ 时的**函数值**，也可记作 $y(x_0)$ 或者

$y|_{x=x_0}$.

注 由函数的定义可知，确定函数的两个要素分别是对应法则和函数的定义域，函数的定义域就是使得函数有意义的自变量的取值范围.

例 1.1.2 研究 $y = x$ 与 $y = \dfrac{x^2}{x}$ 是否为同一函数.

解 $y = x$ 的定义域是$(-\infty, +\infty)$，而 $y = \dfrac{x^2}{x}$ 的定义域是$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. 因此，虽然这两个函数在$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 的值是相同的，但由于它们的定义域不同，因而它们不是同一函数.

例 1.1.3 求下列函数的定义域：

(1) $y = \sqrt{\ln(x-1)}$；　　(2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}} + \arcsin\left(\dfrac{x}{2} - 1\right)$.

解 (1) 要使函数有意义，当且仅当 $\ln(x-1) \geqslant 0$. 要使 $\ln(x-1) \geqslant 0$，当且仅当 $x - 1 \geqslant 1$. 所以函数的定义域是$[2, +\infty)$.

也可以用集合的一般形式表示为 $D = \{x \mid x \geqslant 2\}$.

(2) 要使函数有意义，必须同时满足：分母不为零且偶次根式的被开方式非负，反正弦函数符号内的式子的绝对值小于或等于 1. 即 $\begin{cases} 3 - x^2 > 0, \\ \left|\dfrac{x}{2} - 1\right| \leqslant 1, \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}, \\ 0 \leqslant x \leqslant 4, \end{cases}$$

故不等式组的解集为

$$0 \leqslant x < \sqrt{3}.$$

因此，该函数的定义域为$[0, \sqrt{3})$.

也可以表示为 $D = \{x \mid 0 \leqslant x < \sqrt{3}\}$.

例 1.1.4 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域是$[2,5]$，求函数 $f(2x+1)$ 的定义域.

解 要使函数 $y = f(2x+1)$ 有意义，当且仅当 $2 \leqslant 2x + 1 \leqslant 5$，所以，$\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$，即 $y = f(2x+1)$ 的定义域为$\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$.

例 1.1.5 设函数 $f(x) = x^2 - 2x + 3$，求 $f(2)$，$f(a)$，$f(x+1)$.

解

$$f(2) = 2^2 - 2 \times 2 + 3 = 3,$$
$$f(a) = a^2 - 2a + 3,$$
$$f(x+1) = (x+1)^2 - 2(x+1) + 3 = x^2 + 2.$$

注 函数 $y = \arcsin x$，$y = \arccos x$ 中，$|x| \leqslant 1$.

1.1.1.2　函数的一些重要性质

一般地，为了更全面地了解函数的性态，往往从有界性、单调性、奇偶性和周期性这四个方面加以研究.

(1) 有界性

定义 1.2 设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在常数 $M > 0$，使得对于任意的 $x \in$

D,都有 $|f(x)| \leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**,或者称 $f(x)$ 是 D 上的**有界函数**.

例如,函数 $y = \sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$ 内是有界函数,函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在$(1, +\infty)$ 内是有界函数. 但是,函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在$(0, +\infty)$ 内是无界函数. 因此,有界性是针对于某一区间而言的.

(2) 单调性

定义 1.3　设函数 $f(x)$ 是定义在集合 D 上的函数,如果对于任意的 $x_1, x_2 \in D$,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称函数 $y = f(x)$ 在 D 上为**单调增加函数**;当 $x_1 < x_2$ 时,恒有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称函数 $y = f(x)$ 在 D 上为**单调减少函数**.

单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**. 如果 $f(x)$ 是区间 I 上的单调函数,则把区间 I 称为函数 $f(x)$ 的**单调区间**. 例如,函数 $y = x^2$ 的单调增加区间是$(0, +\infty)$,单调减少区间是$(-\infty, 0)$,如图 1.1 所示.

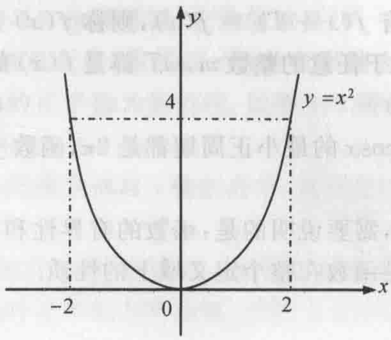

图 1.1

单调函数的图像的特征:单调增加函数其图像表现为自左至右是单调上升的曲线;单调减少函数其图像表现为自左至右是单调下降的曲线.

(3) 奇偶性

定义 1.4　设函数 $f(x)$ 是定义在集合 D(D 是关于原点对称的非空集合)上的函数. 如果对于任意的 $x \in D$,都有 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 是**偶函数**;如果对于任意的 $x \in D$,都有 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 是**奇函数**.

通常见到的偶函数和奇函数其定义域是关于原点对称的区间.

例如,$y = \sin x$ 是定义在$(-\infty, +\infty)$ 内的奇函数,$y = \cos x$ 是定义在$(-\infty, +\infty)$ 内的偶函数.

既不是奇函数也不是偶函数的函数,称为**非奇非偶函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

例 1.1.6　判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{2}$;　　(2) $f(x) = x \cdot \sin x$;

(3) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$;　　(4) $f(x) = 4x + \cos x$.

解　(1) 因为 $f(-x) = \dfrac{2^{-x} + 2^x}{2} = f(x)$,所以 $f(x)$ 是偶函数.

(2) 因为 $f(-x)=(-x)\cdot\sin(-x)=-x\cdot(-\sin x)=x\cdot\sin x=f(x)$,所以 $f(x)$ 是偶函数.

(3) 因为 $\quad f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1}),\ f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$

$$f(-x)+f(x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})=0,$$

即 $f(-x)=-f(x)$,所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数.

(4) 因为 $\quad f(-x)=4(-x)+\cos(-x)=-4x+\cos x,$

从而

$$f(-x)\neq f(x)\text{ 且 }f(-x)\neq -f(x),$$

所以函数 $f(x)=4x+\cos x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

(4) 周期性

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,如果存在一个常数 $T\neq 0$,使得对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的**周期函数**.

当 $f(x)$ 以 T 为周期时,对于任意的整数 m,mT 都是 $f(x)$ 的一个周期. 而通常所说的周期一般是指**最小正周期**.

例如,函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 的最小正周期都是 2π,函数 $y=\tan x$,$y=\cot x$ 的最小正周期都是 π.

关于函数的以上四个性质,需要说明的是:函数的有界性和单调性是函数在某个区间上的性质,而奇偶性和周期性则是函数在整个定义域上的性质.

1.1.2 初等函数

1.1.2.1 基本初等函数

在大量的函数关系中,有几种函数是最常见、最基本的,它们分别是常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数以及反三角函数. 这几类函数称为**基本初等函数**.

(1) 常数函数 $y=c$

它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,由于无论 x 取何值,都有 $y=c$,所以,它的图像是过点 $(0,c)$ 且平行于 x 轴的一条直线,如图 1.2 所示,它是偶函数.

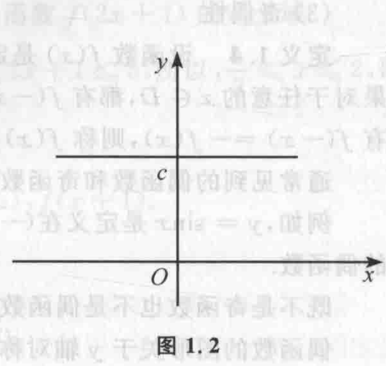

图 1.2

(2) 幂函数 $y=x^a$(a 为实数)

幂函数的情况比较复杂,分 $a>0$ 和 $a<0$ 来讨论. 当 a 取不同的值时,幂函数的定义域不同,为了便于比较,只讨论 $x\geqslant 0$ 的情形,而 $x<0$ 时的图像可以根据函数的奇偶性确定.

当 $a>0$ 时,函数的图像过原点 $(0,0)$ 和点 $(1,1)$,在 $(0,+\infty)$ 内单调增加且无界,如图 1.3 所示.

当 $a<0$ 时,图像不过原点,但仍过点 $(1,1)$,在 $(0,+\infty)$ 内单调减少、无界,曲线以 x 轴的正半轴和 y 轴的正半轴为渐近线,如图 1.4 所示.

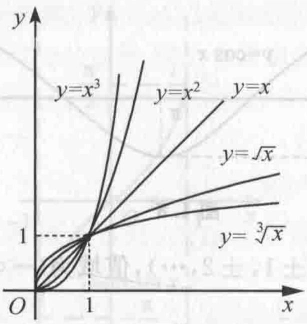

图 1.3

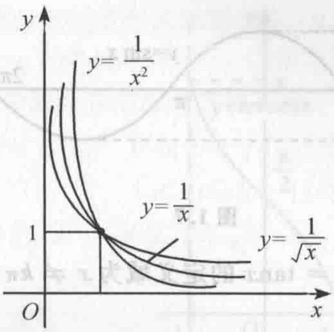

图 1.4

(3) 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$

它的定义域是$(-\infty, +\infty)$. 由于无论 x 取何值,总有 $a^x > 0$,且 $a^0 = 1$,所以它的图像全部在 x 轴的上方,且经过点$(0,1)$. 也就是说,它的值域是$(0, +\infty)$.

当 $a > 1$ 时,函数单调增加且无界,曲线以 x 轴的负半轴为渐近线;当 $0 < a < 1$ 时,函数单调减少且无界,曲线以 x 轴的正半轴为渐近线. 如图 1.5 所示.

(4) 对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$

它的定义域是$(0, +\infty)$,图像全部在 y 轴的右方,值域是$(-\infty, +\infty)$. 无论 a 取何值,曲线都经过点$(1,0)$.

当 $a > 1$ 时,函数单调增加且无界,曲线以 y 轴的负半轴为渐近线;当 $0 < a < 1$ 时,函数单调减少且无界,曲线以 y 轴的正半轴为渐近线. 如图 1.6 所示.

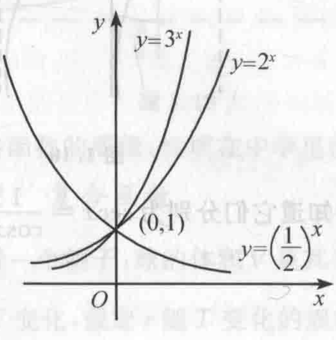

图 1.5

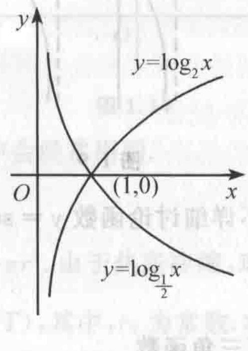

图 1.6

对数函数 $y = \log_a x$ 和指数函数 $y = a^x$ 互为反函数,它们的图像关于 $y = x$ 对称.

以无理数 $e = 2.7182818\cdots$ 为底的对数函数 $y = \log_e x$ 叫作**自然对数函数**,简记作 $y = \ln x$. 自然对数函数是微积分中常用的函数.

(5) 三角函数

三角函数包括下面六个函数:正弦函数 $y = \sin x$,余弦函数 $y = \cos x$,正切函数 $y = \tan x$,余切函数 $y = \cot x$,正割函数 $y = \sec x$,余割函数 $y = \csc x$.

函数 $y = \sin x$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域为$[-1,1]$,奇函数,以 2π 为周期,有界,如图 1.7 所示.

函数 $y = \cos x$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域为$[-1,1]$,偶函数,以 2π 为周期,有界,如图 1.8 所示.

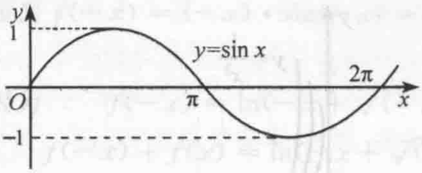

图 1.7

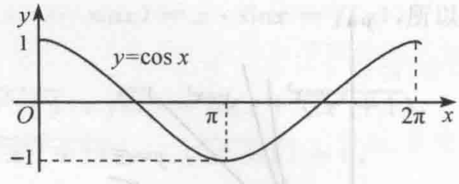

图 1.8

函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，奇函数，以 π 为周期，在每一个周期内单调增加，以直线 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为渐近线. 如图 1.9 所示.

函数 $y=\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，奇函数，以 π 为周期，在每一个周期内单调减少，以直线 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为渐近线. 如图 1.10 所示.

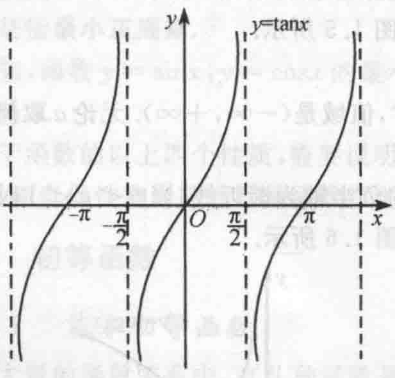

图 1.9

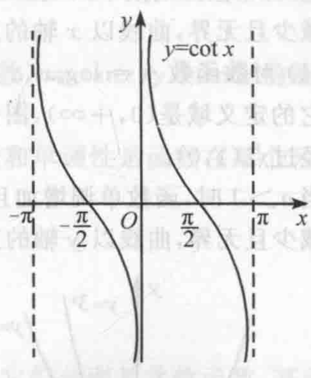

图 1.10

本书不详细讨论函数 $y=\sec x$ 和 $y=\csc x$，只需知道它们分别为 $\sec x=\frac{1}{\cos x}$ 和 $\csc x=\frac{1}{\sin x}$ 即可.

(6) 反三角函数

常用的反三角函数有四个：反正弦函数 $y=\arcsin x$，反余弦函数 $y=\arccos x$，反正切函数 $y=\arctan x$，反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$. 它们是相应三角函数的反函数.

函数 $y=\arcsin x$ 的定义域是 $[-1,1]$，值域是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，是单调增加的奇函数，有界，如图 1.11 所示.

函数 $y=\arccos x$ 的定义域是 $[-1,1]$，值域是 $[0,\pi]$，是单调减少的函数，有界，如图 1.12 所示.