工业和信息化部“十二五”规划教材

“十二五”国家重点图书出版规划项目

# 电磁场与电磁波

# Electromagnetic Fields and Waves

陈立甲 李红梅 宗 华 李 伟 主编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

工业和信息化部“十二五”规划教材
“十二五”国家重点图书出版规划项目

# 电磁场与电磁波

# Electromagnetic Fields and Waves

陈立甲 李红梅 宗 华 李 伟 主编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内容简介

本书系统地阐述了电磁场与电磁波的有关基础理论。全书共分10章，主要内容有：矢量分析、静电场、恒定电场、恒定磁场、稳恒场的解法、时变电磁场、均匀平面电磁波、平面电磁波的反射与折射、导行电磁波和电磁波的辐射。书中包含了一定数量的插图、例题和习题，有助于学生对所学知识的运用和理解。

本书可作为高等院校电子与信息工程及信息技术类等专业的本科生教材或教学参考书，也可供其他相关专业的教师、学生和科技人员参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

电磁场与电磁波/陈立甲等主编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2016.8

ISBN 978-7-5603-5892-5

Ⅰ.①电… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①电磁场—高等学校—教材 ②电磁波—高等学校—教材 Ⅳ.①O441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第051433号

电子与通信工程
图书工作室

责任编辑 李长波
封面设计 卞秉利
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张21 字数540千字
版　　次 2016年8月第1版 2016年8月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-5892-5
定　　价 44.00元

# 前　言

根据作者多年的教学实践以及从与本书相关的教材和参考文献中获得的信息，普遍认为“电磁场与电磁波”这门课对学生来说，不容易学；对教师来讲，也不容易教。可以列举出很多难教和难学的原因，比如经常听到学生讲它的物理概念抽象、所用的数学工具不好熟悉并熟练掌握等。从国内外数量繁多的相关教材，可以看出很多教学工作者关于电磁场这门课的教学方法和教学理念也不尽相同。

对于我国高校的大学生而言，在学习专业电磁场理论之前，已经不止一次地接触过电与磁的相关理论，比如高中和大学的物理课中都有相关内容，尤其是大学物理中，内容还很深入。但为什么这些知识好像对专业电磁场的学习没有太多帮助呢？思考之下，可能是之前学习的内容主要从一维空间出发，没有强调场的地位和作用；而专业电磁场理论则以场的概念作为基本思考角度，对场进行三维空间加时间描述，即从标量场扩展到矢量场，而且使用对学生来说全新的矢量微积分作为数学工具。因此几乎全部的内容，对学生来说都很具有挑战性。故而本书以由浅入深、循序渐进的方式介绍电磁场理论的各部分内容，使读者在学习过程中取得比较好的效果。

本书的内容安排具有以下特点：

(1)针对读者对于矢量微积分这个数学工具的生疏问题，专门在第 1 章做了重点介绍。分别从几何直观的角度和数学分析的角度对照进行内容梳理。从最基本的矢量加减法开始，逐渐过渡到矢量的微积分，再到场的散度、旋度以及其他重要定理及公式。对每一个定理，着重强调了其物理意义，这对电磁场内容的理解起到了关键作用。

(2)对电磁理论的概念和公式的介绍尽量做到由浅入深、循序渐进。例如在均匀平面波的章节中，考虑到读者不容易正确想象和体会均匀平面波的空间分布及随时间的变化规律等特性，从最简单的时域余弦波开始介绍，并与空域余弦波相对应，逐步深入到均匀平面波的内容中，便于读者的理解。

(3)对电磁理论，每部分的内容做到数学描述和文字描述并重。数学描述容易晦涩抽象，但比较精准；文字描述便于解说，但有所不及。因此如果读者能够将二者所表达的意思相互印证，会有助于加深和正确理解理论。

(4)在介绍理论过程中，对涉及的对电磁场理论的发展有重要贡献的科学家，进行了生平介绍。介绍中突出了其对电磁场理论做出贡献的事件或过程，使读者明白电磁场理论的发展是以实验为基础的。麦克斯韦方程组之所以完美，是经历了无数次的实验洗礼的。

(5)对涉及的重要的有难度的公式，需要时都在文中详细给出。比如第 1 章中的 $1/r$ 的梯度等，它是理解后面高斯散度定理推导的基础。对文中容易出现理解歧义的公式，比如矢量形式的波动方程，在需要时均给出了它的分量形式，使读者对矢量微分方程掌握得更加准确。

(6)对于复数形式的电磁场方程，尽量强调了其时域形式。因为在场与波的分析中，多数以时谐场为对象。若内容中仅充斥着复数形式的方程，读者容易忘记复数描述的方程与

现实世界物理场的对应关系。

(7)每章都有本章小结,对重点内容进行点睛;学习完每章后,读者可根据小结回想章节内容,以及每一个公式的物理意义。章节中的重点内容后面,配以例题,增加读者对内容的感性认识。每章后面附有比较典型的习题,可以加深对内容的理解。

本书的第1,2章由宗华编写,第3,4,5章由李红梅编写,第6,7,8章由陈立甲编写,第9,10章由李伟编写。全书由陈立甲统稿。

在本书的编写过程中,哈尔滨工业大学电子与信息工程学院微波工程系的全体教师,特别是邱景辉教授、林澍副研究员对有关内容提供帮助,在此表示感谢。感谢杨莘元教授对本书内容提出的宝贵意见和建议。

本书可作为高等院校电子与信息工程及信息技术类等专业的本科生教材或教学参考书,也可供其他相关专业的教师、学生和科技人员参考。

由于作者水平有限,时间也较为仓促,书中疏漏及不足之处在所难免,敬请广大读者批评指正,非常感谢。

作　者

2015年12月

# 目　　录

# 第 1 章　矢量分析

电磁理论需要研究某些物理量(如电位、电场强度、磁场强度等)在空间中的分布和变化规律,因此引入了场的概念。广义而言,如果一个物理量在空间中的某一区域内的每一点都有一个确定值,则称在这个区域中构成该物理量的场。若该物理量为标量,这种场则称为标量场,如温度场、电位场等;若该物理量为矢量,这种场则称为矢量场,如速度场、电场等。若考虑到场量随时间变化的情况,则把不随时间变化的场称为静态场或稳恒场,否则称为动态场或时变场。

场一般用场函数来描述。原则上,场所分布的空间维数在数学上是没有限制的,然而经典电磁学只涉及分布于三维空间的标量场和矢量场,加之时间变量,一般的场函数为四个变量的函数。矢量分析是研究电磁场的时空分布和变化规律的基本数学工具之一,是研究电磁场的数学语言。采用矢量描述和分析电磁场不仅可以为复杂电磁现象提供紧凑的数学描述,而且便于直观想象和运算变换。因此,本章将从标量场和矢量场的基本概念和运算入手,引出描述标量场在空间变化规律的梯度,以及描述矢量场在空间变化规律的散度和旋度,并在此基础上介绍亥姆霍兹定理。

## 1.1　矢量及其运算

### 1.1.1　标量和矢量

在物理学中,被赋予物理单位的量称为物理量,电磁场理论中绝大多数的物理量都可以分为两类 —— 标量和矢量。

一个仅用大小就能完整描述的物理量称为标量。如电压 $u$、电荷量 $Q$、时间 $t$、质量 $m$ 等。

一个既有大小又有方向特性的物理量称为矢量,常用黑体字母或带箭头的字母表示①,如作用力 $\boldsymbol{F}$、速度 $\boldsymbol{v}$、电场强度 $\boldsymbol{E}$、磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 等。

### 1.1.2　矢量的表示方法

一个矢量 $\boldsymbol{A}$ 可用一条有方向的线段来表示。如图 1.1 所示,线段的长度表示矢量 $\boldsymbol{A}$ 的大小或模,$A=|\boldsymbol{A}|$,箭头指向表示矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向,这种描述方法称为矢量的几何表示。$\boldsymbol{A}$ 代表一个从 $O$ 点指向 $P$ 点的矢量。

**注意**　矢量的值与它在空间的位置无关,只要两矢量具有相同的模值和方向,二者即

---

① 本书中矢量用黑斜体字母表示

相等。故可将矢量在空间平移，从而为计算提供方便。

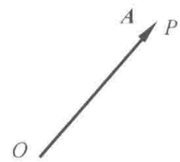


图 1.1　矢量的几何表示

模值为零的矢量称为空矢或零矢。模值和方向都保持不变的矢量称为常矢量。模值为 1 的矢量称为单位矢量，单位矢量可以用于表示任一矢量的方向。本书中用 $\boldsymbol{a}_A$ 表示与矢量 $\boldsymbol{A}$ 同方向的单位矢量，显然

$$\boldsymbol{a}_A = \frac{\boldsymbol{A}}{A} \tag{1.1.1}$$

于是，矢量 $\boldsymbol{A}$ 可以写成

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_A A = \boldsymbol{a}_A |\boldsymbol{A}| \tag{1.1.2}$$

此式也可称为矢量的代数表示或解析表示。

**注意**　单位矢量不一定是常矢量。

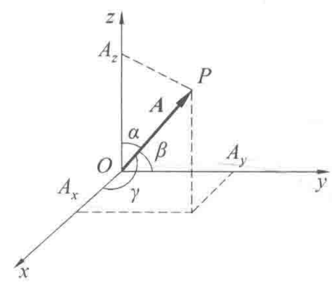


图 1.2　矢量的直角坐标表示

本书的讨论多数是以空间直角坐标系为前提条件，下面给出矢量在直角坐标系中的表示方法。在直角坐标系中，坐标轴是 $x$，$y$，$z$ 轴，一个矢量 $\boldsymbol{A}$ 在直角坐标系中有三个互相垂直的分量，用 $A_x$，$A_y$，$A_z$ 表示，如图 1.2 所示。$A_x$，$A_y$，$A_z$ 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在三个坐标轴上的投影，于是矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_x A_x + \boldsymbol{a}_y A_y + \boldsymbol{a}_z A_z \tag{1.1.3}$$

其中，$\boldsymbol{a}_x$，$\boldsymbol{a}_y$，$\boldsymbol{a}_z$ 称为坐标单位矢量，它们的模均等于 1，方向分别是三个坐标轴的正方向。矢量 $\boldsymbol{A}$ 的长度或模值 $|\boldsymbol{A}|$ 可表示为

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1.1.4}$$

从图 1.2 还可以看出，矢量 $\boldsymbol{A}$ 与坐标轴正向之间的夹角分别是 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$，因此把 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向余弦。借助方向余弦的定义，式(1.1.3) 还可以表示成

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_x \cos\alpha + \boldsymbol{a}_y \cos\beta + \boldsymbol{a}_z \cos\gamma)A = \boldsymbol{a}_A A \tag{1.1.5}$$

因此，利用方向余弦，单位方向矢量 $\boldsymbol{a}_A$ 还可表示为

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_x \cos\alpha + \boldsymbol{a}_y \cos\beta + \boldsymbol{a}_z \cos\gamma \tag{1.1.6}$$

前面所讨论的矢量均是以坐标原点 $O$ 为起点，引向空间中任一点 $P(x,y,z)$ 的矢量 $\boldsymbol{r}$，称为点 $P$ 的矢径。显然点 $P$ 的矢径可表示为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_x x + \boldsymbol{a}_y y + \boldsymbol{a}_z z \tag{1.1.7}$$

空间任一点 $P$ 对应着一个矢径 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP}$，反之，每一矢径 $\boldsymbol{r}$ 确定空间中的一点 $P$，即矢径的终点，故 $\boldsymbol{r}$ 又称为位置矢量，简称位矢。因此，点 $P(x,y,z)$ 也可表示为 $P(\boldsymbol{r})$。

**注意**　位矢的概念在后面的运算中经常用到，且在各个坐标系的表述形式不同。

可见，矢量的表示及矢量之间的运算都是借助于单位矢量进行的，任何一个矢量都可以表示为该矢量的方向矢量与模值的乘积形式。

### 1.1.3　矢量的代数运算

#### 1. 加法和减法

两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相加，其和为另一矢量 $\boldsymbol{C}$，表示为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$。矢量加法按平行四边形法则(或首尾相接法则) 得到：从同一点引出的矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，构成一个平行四边形，其对角线矢量即为矢量 $\boldsymbol{C}$，如图 1.3 所示。

矢量的加法服从交换律和结合律

交换律 $$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \tag{1.1.8}$$

结合律 $$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} \tag{1.1.9}$$

如果 $\boldsymbol{B}$ 是一个矢量，则 $-\boldsymbol{B}$（负 $\boldsymbol{B}$）也是一个矢量，与 $\boldsymbol{B}$ 的大小相同、方向相反。用 $-\boldsymbol{B}$ 表示，可定义矢量减法为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}) \tag{1.1.10}$$

图 1.4 表示 $\boldsymbol{A}$ 减去 $\boldsymbol{B}$，相当于从 $\boldsymbol{B}$ 的末端指向 $\boldsymbol{A}$ 的末端的矢量，即减量末端指向被减量末端。

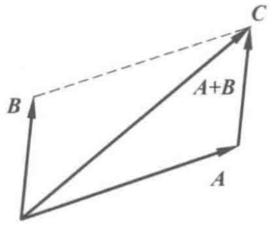


图 1.3　矢量的加法

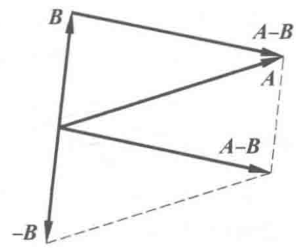


图 1.4　矢量的减法

在直角坐标系中两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的加法和减法是

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_x(A_x\pm B_x)+\boldsymbol{a}_y(A_y\pm B_y)+\boldsymbol{a}_z(A_z\pm B_z) \tag{1.1.11}$$

**2. 标量乘以矢量**

一个标量 $k$ 与一个矢量 $\boldsymbol{A}$ 的乘积 $k\boldsymbol{A}$ 仍为矢量，若用矢量 $\boldsymbol{B}$ 表示，则

$$\boldsymbol{B}=k\boldsymbol{A} \tag{1.1.12}$$

显然，$\boldsymbol{B}$ 的大小是 $\boldsymbol{A}$ 的 $|k|$ 倍。而且，若 $k>0$，则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 同向；若 $k<0$，则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 反向。若 $|k|>1$，$\boldsymbol{B}$ 比 $\boldsymbol{A}$ 长；若 $|k|<1$，$\boldsymbol{B}$ 比 $\boldsymbol{A}$ 短。即 $\boldsymbol{B}$ 平行于 $\boldsymbol{A}$，方向相同或相反，故经常称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的相依矢量。

**3. 点积或标量积**

两个矢量的点积写作 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$，读作“$\boldsymbol{A}$ 点乘 $\boldsymbol{B}$”，它定义为两矢量大小与它们之间较小夹角的余弦之积，如图 1.5 所示，即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta \tag{1.1.13}$$


图 1.5　矢量的点积

从上式可看出，矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的点积是一个标量，因此点积也称为标量积。当两矢量平行时点积最大；若两非零矢量的点积为零，则两矢量互相垂直或正交。

矢量的点积服从交换律和分配率

交换律 $$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \tag{1.1.14}$$

分配律 $$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \tag{1.1.15}$$

式(1.1.13)中的量 $B\cos\theta$ 称为 $\boldsymbol{B}$ 沿 $\boldsymbol{A}$ 的分量，也常称为 $\boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 上的标投影；若引入沿 $\boldsymbol{A}$ 的单位矢量，可以定义 $\boldsymbol{a}_A B\cos\theta$ 为 $\boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 上的矢投影。

在直角坐标系中两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的点积是

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = AB\cos\theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{1.1.16}$$

**4. 叉积或矢量积**

两个矢量的叉积写作 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$，读作“$\boldsymbol{A}$ 叉乘 $\boldsymbol{B}$”，它是一个矢量，其方向垂直于包含 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的平面，模值定义为两矢量大小与它们之间较小夹角的正弦之积，如图 1.6 所示，即

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_n AB\sin\theta \tag{1.1.17}$$

式中，$\boldsymbol{a}_n$ 是垂直于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 所形成的平面的单位矢量，方向为右手四指从 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}$ 旋转 $\theta$ 时大拇指所指的方向（右手关系）。由于叉积得出的是矢量，因此又称矢量积。

如图 1.6 所示，因为 $B\sin\theta$ 等于矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 所组成的平行四边形的高，可见 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ 的模值 $|AB\sin\theta|$ 在数值上等于平行四边形的面积。根据式(1.1.17)及右手关系容易得出

$$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \tag{1.1.18}$$

因此，叉积不服从交换律，但其满足分配律

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C} \tag{1.1.19}$$

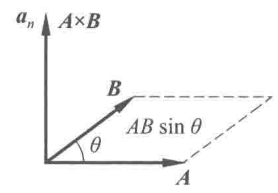

图 1.6　矢量的叉积

在直角坐标系中两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的叉积是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{a}_x(A_y B_z - A_z B_y) + \boldsymbol{a}_y(A_z B_x - A_x B_z) + \boldsymbol{a}_z(A_x B_y - A_y B_x) \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1.1.20}$$

**5. 三重积**

(1) 标量三重积

矢量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的标量三重积是一个标量，可按下式计算

$$\boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = ABC\sin\theta\cos\varphi \tag{1.1.21}$$

其中，$\theta$ 和 $\varphi$ 分别代表矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 和矢量 $\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ 的夹角。显然，若三个矢量代表一个六面体的边，则标量三重积是它的体积。从式(1.1.21)可知，三个共面矢量的标量三重积为零。

变换矢量循环次序，标量三重积满足如下性质

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \tag{1.1.22}$$

(2) 矢量三重积

矢量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的矢量三重积是一个矢量，可写作 $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$，可以证明矢量三重积不满足结合律，但满足如下性质

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{1.1.23}$$

### 1.1.4　矢量函数及微分运算

前面已经介绍过，模值和方向都不变的矢量为常矢；相对而言，模和方向或其中之一会改变的矢量称为变矢。表示物理量的矢量一般都是一个或几个（标量）变量的函数，称为矢量函数。

矢量函数一般是空间坐标 $x$，$y$，$z$ 的函数，有时也是时间 $t$ 的函数。研究矢量场时，必然涉及矢量函数随空间坐标和时间的变化率问题，即对上述变量求导数的问题。

设 $\boldsymbol{F}(u)$ 是单变量 $u$ 的矢量函数，它对 $u$ 的导数定义是

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{F}}{\Delta u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\boldsymbol{F}(u+\Delta u)-\boldsymbol{F}(u)}{\Delta u} \tag{1.1.24}$$

这里假定此极限存在，即极限是单值且有限的。

如图 1.7 所示，矢量的增量 $\Delta\boldsymbol{F}$ 一般与矢量 $\boldsymbol{F}$ 的方向不同。若 $\boldsymbol{F}$ 是常矢量，则 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}u}$ 必为零。若 $\boldsymbol{F}$ 不是常矢量，其二阶导数以及更高阶导数可据式(1.1.24) 逐次求出。

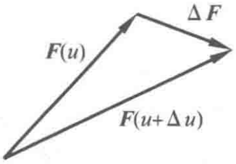


图 1.7　矢量函数的微分

若 $f$ 和 $\boldsymbol{F}$ 分别是变量 $u$ 的标量函数和矢量函数，则二者之积的导数为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(f\boldsymbol{F})}{\mathrm{d}u}&=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{(f+\Delta f)(\boldsymbol{F}+\Delta\boldsymbol{F})-f\boldsymbol{F}}{\Delta u}\\&=f\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{F}}{\Delta u}+\boldsymbol{F}\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}+\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{F}}{\Delta u}\Delta f\end{aligned} \tag{1.1.25}$$

当 $\Delta u\to 0$ 时，上式右端最后一项趋于零，故

$$\frac{\mathrm{d}(f\boldsymbol{F})}{\mathrm{d}u}=f\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}u}+\boldsymbol{F}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \tag{1.1.26}$$

可见，一个标量函数与一个矢量函数之积的导数与两标量函数之积的导数运算方法相同。

若 $\boldsymbol{F}$ 是两个变量 $u_1$ 和 $u_2$ 的函数，则对 $u_1$ 的偏导数的定义是

$$\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial u_1}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\boldsymbol{F}(u_1+\Delta u_1,u_2)-\boldsymbol{F}(u_1,u_2)}{\Delta u_1} \tag{1.1.27}$$

对更多元函数的偏导数可仿照式(1.1.27) 进行定义。由式(1.1.27) 还可以得出

$$\frac{\partial(f\boldsymbol{F})}{\partial u_1}=f\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial u_1}+\boldsymbol{F}\frac{\partial f}{\partial u_1} \tag{1.1.28}$$

对式(1.1.28) 再取偏导数，可得到其二阶偏导数。显然，矢量函数的二阶和更高阶偏导数仍然是矢量函数。若矢量函数 $\boldsymbol{F}$ 至少有连续的二阶偏导数，则有

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{F}}{\partial u_1\partial u_2}=\frac{\partial^2\boldsymbol{F}}{\partial u_2\partial u_1} \tag{1.1.29}$$

在直角坐标系中，坐标单位矢量 $\boldsymbol{a}_x,\boldsymbol{a}_y,\boldsymbol{a}_z$ 都是常矢量，其导数为零。这样，利用式(1.1.29) 可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{a}_xF_x+\boldsymbol{a}_yF_y+\boldsymbol{a}_zF_z)\\&=\boldsymbol{a}_x\frac{\partial F_x}{\partial x}+F_x\frac{\partial\boldsymbol{a}_x}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial F_y}{\partial x}+F_y\frac{\partial\boldsymbol{a}_y}{\partial x}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial F_z}{\partial x}+F_z\frac{\partial\boldsymbol{a}_z}{\partial x}\\&=\boldsymbol{a}_x\frac{\partial F_x}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial F_y}{\partial x}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial F_z}{\partial x}\end{aligned} \tag{1.1.30}$$

由式(1.1.30) 可得结论，在直角坐标系中，矢量函数对某一坐标变量的偏导数(或导数) 仍是一个矢量，它的各个分量等于原矢量函数各分量对该坐标变量的偏导数(或导数)。简单而言，只需把坐标单位矢量提到微分号外即可。但这里需注意的是，在柱坐标和球坐标系中，坐标单位矢量并非常矢量，故不能将其提到微分运算符号外，而需按照函数乘积的求导法则运算。

对于矢量函数的积分，无论是不定积分还是定积分，除了需注意柱坐标和球坐标的坐标单位矢量同样不能提到积分运算符号外，均可按照一般函数积分的基本法则求解，这里不再赘述。

## 1.2 正交坐标系

在学习电磁场时，所讨论的物理量一般来说都是空间和时间的函数。为了描述这样一些物理量在空间的分布和变化规律，必须采用适当的坐标系来表示所有的空间点。根据被研究对象的几何形状不同需要采取不同的坐标系，在电磁场理论中，用得最多的坐标系为直角(笛卡尔)坐标系、圆柱坐标系(简称柱坐标系)和球坐标系。

在三维空间中，一个点可由三个经适当选择的曲面的交点确定。设这三族面可分别表示为 $u_1=$常数、$u_2=$常数和 $u_3=$常数，其中 $u_i$ 既可以是长度也可以是角度。当这三个面互相垂直时，便可获得一个正交坐标系。直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系为众多正交曲线坐标系中最常用的三种。

为了矢量分析的需要，对于空间任一点 $M$，可沿三条坐标曲线的切线方向各取一个单位矢量，即前文提到的坐标单位矢量。设 $\boldsymbol{a}_{u_1}, \boldsymbol{a}_{u_2}, \boldsymbol{a}_{u_3}$ 为三个坐标方向的单位矢量，在一般的右手正交曲线坐标系中①，这些矢量满足如下关系

$$\boldsymbol{a}_{u_1} \times \boldsymbol{a}_{u_2} = \boldsymbol{a}_{u_3} \tag{1.2.1a}$$

$$\boldsymbol{a}_{u_2} \times \boldsymbol{a}_{u_3} = \boldsymbol{a}_{u_1} \tag{1.2.1b}$$

$$\boldsymbol{a}_{u_3} \times \boldsymbol{a}_{u_1} = \boldsymbol{a}_{u_2} \tag{1.2.1c}$$

上述关系表明三个坐标单位矢量相互垂直。而这三个方程并不完全是独立的，因为其中一个成立意味着另外两个必然成立，故有

$$\boldsymbol{a}_{u_1} \cdot \boldsymbol{a}_{u_2} = \boldsymbol{a}_{u_2} \cdot \boldsymbol{a}_{u_3} = \boldsymbol{a}_{u_3} \cdot \boldsymbol{a}_{u_1} = 0 \tag{1.2.2a}$$

和

$$\boldsymbol{a}_{u_1} \cdot \boldsymbol{a}_{u_1} = \boldsymbol{a}_{u_2} \cdot \boldsymbol{a}_{u_2} = \boldsymbol{a}_{u_3} \cdot \boldsymbol{a}_{u_3} = 1 \tag{1.2.2b}$$

任何一个矢量 $\boldsymbol{A}$ 可以写成它在三个正交方向的分量之和，即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_{u_1} A_{u_1} + \boldsymbol{a}_{u_2} A_{u_2} + \boldsymbol{a}_{u_3} A_{u_3} \tag{1.2.3}$$

其中，三个分量 $A_{u_1}, A_{u_2}$ 和 $A_{u_3}$ 的大小可能随 $\boldsymbol{A}$ 空间位置的变化而变化，即它们可能是 $u_1, u_2$ 和 $u_3$ 的函数。据式(1.2.3)，$\boldsymbol{A}$ 的模为

$$A = |\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_{u_1}^2 + A_{u_2}^2 + A_{u_3}^2} \tag{1.2.4}$$

在电磁场计算中，经常要计算线、面和体积分，因此需要在不同的坐标系下写出某一坐标的微分增量相对应的微分长度增量，进而得到线元、面积元和体积元的表达式。然而某些坐标可能并不是长度，这就需要一个变换因子来将微分增量 $\mathrm{d}u_i$ 变换成微分长度增量 $\mathrm{d}l_i$

$$\mathrm{d}l_i = h_i \mathrm{d}u_i \tag{1.2.5}$$

其中，$h_i$ 称为度量系数，其本身可能是 $u_1, u_2$ 和 $u_3$ 的函数。一个沿任意方向的定向线元矢量，可以写成各个分量长度增量的矢量和

① 本书只采用右手正交坐标系：在右手坐标系中，第三个坐标 $u_3$ 的方向被选为右手四指从坐标方向 $u_1$ 向坐标方向 $u_2$ 旋转 90° 时，拇指所指的方向

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{a}_{u_1}\mathrm{d}l_1+\boldsymbol{a}_{u_2}\mathrm{d}l_2+\boldsymbol{a}_{u_3}\mathrm{d}l_3 \tag{1.2.6a}$$

或

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{a}_{u_1}(h_1\mathrm{d}u_1)+\boldsymbol{a}_{u_2}(h_2\mathrm{d}u_2)+\boldsymbol{a}_{u_3}(h_3\mathrm{d}u_3) \tag{1.2.6b}$$

第 2 章会涉及描述流经一个微分面积的电流或流量，就必须用到垂直于电流流动方向的截面积，若将微分面积看作一矢量，其方向定义为该面积的某一法向，则会给计算带来很大方便，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_n\mathrm{d}s \tag{1.2.7}$$

一般地，在广义正交曲线坐标系中，垂直于单位矢量 $\boldsymbol{a}_{u_1}$ 的面积元矢量$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_1$ 可表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_1=\boldsymbol{a}_{u_1}\mathrm{d}l_2\mathrm{d}l_3 \tag{1.2.8}$$

或

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_1=\boldsymbol{a}_{u_1}(h_2h_3\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3) \tag{1.2.9}$$

相似地，垂直于单位矢量 $\boldsymbol{a}_{u_2}$ 和 $\boldsymbol{a}_{u_3}$ 的面积元矢量分别为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2=\boldsymbol{a}_{u_2}(h_1h_3\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_3) \tag{1.2.10}$$

和

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_3=\boldsymbol{a}_{u_3}(h_1h_2\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2) \tag{1.2.11}$$

由三个分别沿 $\boldsymbol{a}_{u_1}$，$\boldsymbol{a}_{u_2}$ 和 $\boldsymbol{a}_{u_3}$ 方向的微分坐标分量 $\mathrm{d}u_1$，$\mathrm{d}u_2$ 和 $\mathrm{d}u_3$ 所构成的体积元 $\mathrm{d}v$ 可表示为($\mathrm{d}l_1\mathrm{d}l_2\mathrm{d}l_3$)，或

$$\mathrm{d}v=h_1h_2h_3\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3 \tag{1.2.12}$$

### 1.2.1　直角坐标系

作三条互相垂直的轴线，使它们相交于原点 $O$，并标明它们为 $x$，$y$，$z$ 轴，如图 1.8 所示。空间任一点对三个坐标轴的投影 $x$，$y$ 和 $z$，可以用来确定通过该点的三个正交平面，即

$$\begin{cases}u_1=x\\u_2=y\\u_3=z\end{cases} \tag{1.2.13}$$

故直角坐标系的任一点 $M(x,y,z)$ 是由三个互相正交的坐标平面的交点确定的，坐标变量为 $x$，$y$，$z$，坐标单位矢量为 $\boldsymbol{a}_x$，$\boldsymbol{a}_y$，$\boldsymbol{a}_z$。

从坐标原点 $O$ 到点 $M(x,y,z)$ 的位置矢量是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_xx+\boldsymbol{a}_yy+\boldsymbol{a}_zz \tag{1.2.14}$$

由于 $x$，$y$ 和 $z$ 都是长度，因此度量系数均为 1，即 $h_1=h_2=h_3=1$，根据式(1.2.6) 和式(1.2.9) ～ (1.2.12)，直角坐标系下的线元矢量、面积元矢量和体积元(图 1.9) 分别为

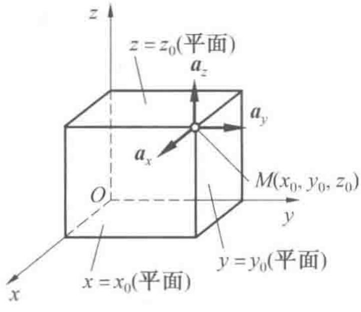


图 1.8　直角坐标系

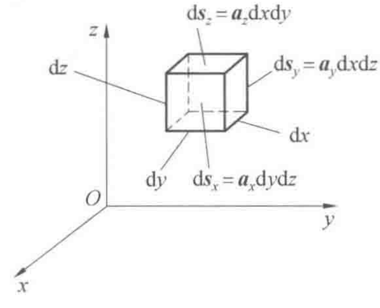


图 1.9　直角坐标系的长度元、面积元、体积元

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{a}_x\mathrm{d}x+\boldsymbol{a}_y\mathrm{d}y+\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}z \tag{1.2.15}$$

$$\begin{cases}\mathrm{d}\boldsymbol{s}_x=\boldsymbol{a}_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ \mathrm{d}\boldsymbol{s}_y=\boldsymbol{a}_y\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\ \mathrm{d}\boldsymbol{s}_z=\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{cases} \tag{1.2.16}$$

和

$$\mathrm{d}v=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{1.2.17}$$

### 1.2.2 圆柱坐标系

坐标为 $\rho$,$\varphi$ 和 $z$ 的圆柱坐标系由以下三族曲面的交点建立

$$\begin{cases}u_1=\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\ u_2=\varphi=\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)\\ u_3=z\end{cases} \tag{1.2.18}$$

这里规定平方根取正号,且 $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$。如图 1.10 所示,第一族曲面由以 $z$ 轴为轴、半径 $\rho$ 为常数的同轴圆柱面组成;第二族曲面由从 $z$ 轴发出且与 $z$ 轴平行的辐射状平面组成,该族的各个曲面由它们与 $xOz$ 平面构成的夹角 $\varphi$ 来确定;第三族曲面由与 $z$ 轴垂直的平面组成,该族的各个曲面由它们至 $xOy$ 平面的距离 $z$ 确定。故圆柱坐标系中的任一点 $M(\rho,\varphi,z)$ 可用通过点 $M$ 的三族曲面分别对应的三个坐标 $\rho$,$\varphi$ 和 $z$ 来确定,坐标单位矢量为 $\boldsymbol{a}_\rho$,$\boldsymbol{a}_\varphi$,$\boldsymbol{a}_z$。

从坐标原点 $O$ 到点 $M(\rho,\varphi,z)$ 的位置矢量是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_\rho\rho+\boldsymbol{a}_z z \tag{1.2.19}$$

三个坐标中的 $\rho$ 和 $z$ 都是长度,故 $h_1=h_3=1$,而 $\varphi$ 是角度,需要一个度量系数 $h_3=\rho$ 才能将 $\mathrm{d}\varphi$ 转换成长度量,于是根据式(1.2.6),柱坐标中线元矢量普遍表达式为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{a}_\rho\mathrm{d}\rho+\boldsymbol{a}_\varphi\rho\mathrm{d}\varphi+\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}z \tag{1.2.20}$$

面积元矢量和体积元分别为

$$\begin{cases}\mathrm{d}\boldsymbol{s}_\rho=\boldsymbol{a}_\rho\mathrm{d}l_\varphi\mathrm{d}l_z=\boldsymbol{a}_\rho\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\\ \mathrm{d}\boldsymbol{s}_\varphi=\boldsymbol{a}_\varphi\mathrm{d}l_\rho\mathrm{d}l_z=\boldsymbol{a}_\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z\\ \mathrm{d}\boldsymbol{s}_z=\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}l_\rho\mathrm{d}l_\varphi=\boldsymbol{a}_z\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\end{cases} \tag{1.2.21}$$

和

$$\mathrm{d}v=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \tag{1.2.22}$$

图 1.11 表示在点$(\rho,\varphi,z)$处,由沿三个正交坐标方向的微分增量 $\mathrm{d}\rho$,$\mathrm{d}\varphi$ 和 $\mathrm{d}z$ 所构成的典型体积元。