考研数学复习指导系列丛书

高等代数中的典型问题与方法

——考研题解精粹

曲阜师范大学　王利广　李本星　编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

考研数学复习指导系列丛书

高等代数中的典型问题与方法
——考研题解精粹

曲阜师范大学　王利广　李本星　编

机械工业出版社

本书是作者在为数学专业本科生讲授高等代数过程中形成的习题课讲义，是本科生深入学习高等代数的重要学习资料，也是考研学生高质量的自学资料。

本书共分为9章，包括多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、λ-矩阵的标准形、欧几里得空间。各章均分为三部分，第一部分提供了系统、全面的知识点，帮助学生掌握高等代数的重要思想与方法；第二部分通过大量例题帮助学生开阔视野，拓宽解题思维；第三部分给出了大量习题并配有详细答案，对前两部分进行了有力补充。

图书在版编目（CIP）数据

高等代数中的典型问题与方法：考研题解精粹 / 王利广，李本星编．—北京：机械工业出版社，2016.6

（考研数学复习指导系列丛书）

ISBN 978-7-111-53977-3

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①王…　②李…　Ⅲ．①高等代数－研究生－入学考试－题解　Ⅳ．①O15-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 126543 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

策划编辑：汤　嘉　责任编辑：汤　嘉　王　芳

责任校对：陈延翔　封面设计：张　静

责任印制：李　菲

北京振兴源印务有限公司印刷

2016 年 11 月第 1 版第 1 次印刷

184mm × 260mm · 26.25 印张 · 504 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-53977-3

定价:59.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务　网络服务

服务咨询热线：010-88379833　机 工 官 网：www.cmpbook.com

读者购书热线：010-88379649　机 工 官 博：weibo.com/cmp1952

教育服务网：www.cmpedu.com

金 书 网：www.golden-book.com

前　言

高等代数是高等院校数学专业最重要的基础课之一，也是数学专业研究生入学考试的必考科目. 由于它具有抽象性高、理论性强等特点，所以无论是教师的“教”还是学生的“学”都必须给该课程足够的重视. 教师在有限的学时内仅能讲授完课程的基本内容，而那些更为重要的思想、方法、技巧则不能深入、系统地传授给学生. 课程学习结束后，留在学生脑子中的往往只是些零乱的概念、定理、结论. 大多数学生尚未领悟该课程的核心思想，搞不清各章节间的联系，不能够系统地掌握分析、解决高等代数问题的方法和技巧, 他们常常抱怨“能看懂课本, 就是不会做题”.

本书作者在曲阜师范大学数学科学学院为数学专业本科生讲授高等代数十余年，积累了丰富的教学经验，对“教”与“学”中存在的问题进行了深入的思考, 并将多年的教学经验和探索进行了总结, 初步形成了本讲义的草稿, 作为高等代数习题课和考研辅导的讲义. 本书与北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组编写的《高等代数》(第三版)教材配套, 章节划分也一致. 每章包括三部分内容：基本知识、典型例题(按照专题进行划分)和习题.

本书的一个显著特色是注重从“高等代数”课程全局的高度审视每个知识点和每个例题, 每章精心遴选出若干重要思想、方法, 以专题形式进行讲解. 专题讲解着眼于学生综合能力的提高, 往往涉及多个章节的内容, 以期达到“理论成体系、观点高屋建瓴”的目的.

通过一题多解开阔解题思路成为本书的另一特色. 本书所选例题大部分都出自全国知名重点高校和科研院所的研究生入学考试真题; 有不少题目我们 给出了多种证明方法或者解题办法, 并对不同方法进行点评, 这有益于开阔学生的思路, 培养其发散思维的能力.

近年来, 作者在为立志考研的学生辅导高等代数时就使用了本书初稿, 取得

了令人满意的效果. 从这几年我院本科生考研情况来看, 高等代数的考研成绩令人瞩目, 考140分以上的学生大有人在, 甚至有学生考了满分：2012年, 王运朝同学考取中国科学院, 高等代数得了满分150 分; 白志军同学考取了南京大学, 高等代数得了满分150分.

读者如能认真研读本书, 并且自己动手完成课后习题, 则将在高等代数的概念、定理、重要结论的理解有一种豁然开朗的感觉, 解题能力、思维能力、创造能力会得到显著提高. 因此, 本书适用于那些想把高等代数真正学懂、学好的数学专业学生和立志报考数学专业研究生的莘莘学子.

在机械工业出版社韩效杰先生与汤嘉先生、曲阜师范大学教务处和数学科学学院的各位领导和同行的大力支持下, 我们决定将讲义正式出版, 并定名为《高等代数中的典型问题与方法——考研题解精粹》.

感谢我们的家人, 是她们的理解和支持使得我们能够顺利地完成本书.

编者

2016年1月于曲阜师范大学

目　　录

第 1 章　多项式

1.1　基本知识

1. 多项式的定义. 设$\mathbb{P}$为一个数域, x为一个文字(或者符号). 当a_0, a_1, $\cdots$, $a_n \in \mathbb{P}$, 称

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

为数域$\mathbb{P}$上的一个(一元)多项式. 若$a_n \neq 0$, 则称$f(x)$是n次多项式, n为$f(x)$的次数, 记为$n = \partial(f(x))$. 若$a_n = \cdots = a_1 = a_0 = 0$, 此时称$f(x)$ 为0 多项式, 记为$f(x) = 0$, 并规定0 多项式没有次数. 注意0次多项式为非零常数.

用$\mathbb{P}[x]$表示数域$\mathbb{P}$上的所有一元多项式构成的集合. 称$\mathbb{P}[x]$为数域$\mathbb{P}$上的一元多项式环.

2. 带余除法. 对于$\mathbb{P}[x]$中任意两个多项式$f(x)$与$g(x)$, 其中$g(x) \neq 0$, 一定存在$\mathbb{P}[x]$中的多项式$q(x)$和$r(x)$使得

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

成立, 其中$\partial(r(x)) < \partial(g(x))$或$r(x) = 0$, 并且这样的$q(x), r(x)$是唯一的.

3. 整除. 设$f(x)$和$g(x)$为$\mathbb{P}[x]$中的两个多项式. 若存在$h(x) \in \mathbb{P}[x]$使得

$$g(x) = f(x)h(x),$$

则称$f(x)$整除$g(x)$, 记为$f(x)|g(x)$.

4. 整除的性质. 设$f(x), g(x), h(x)$是数域$\mathbb{P}$上的多项式. 多项式的整除有以下性质:

(1) 若$g(x) \neq 0$, 则 $g(x)|f(x)$的充要条件为$g(x)$按带余除法除$f(x)$所得的余式为零.

(2) $f(x)|f(x)$, $f(x)|0$.

(3) 如果$f(x)|g(x)$, $g(x)|f(x)$, 那么$f(x) = cg(x)$, 其中c为非零常数. 特别地, $f(x) = g(x)$的充要条件为$f(x)$与$g(x)$的首项系数相同, 且$f(x)|g(x)$, $g(x)|f(x)$.

(4) 如果$f(x)|g(x)$, $g(x)|h(x)$, 那么$f(x)|h(x)$, 即整除具有传递性.

(5) 设$g_1(x), g_2(x), \cdots, g_r(x) \in \mathbb{P}[x]$. 如果$f(x)|g_i(x)$, $i = 1, 2, \cdots, r$, 那么

$$f(x)|[u_1(x)g_1(x) + \cdots + u_r(x)g_r(x)],$$

其中$u_i(x)$为$\mathbb{P}[x]$中任意多项式. 我们称

$$u_1(x)g_1(x) + \cdots + u_r(x)g_r(x)$$

为$g_1(x),\cdots,g_r(x)$的一个组合.

5. 注. (1)多项式的带余除法和多项式的整除关系不因所考虑数域的改变而改变.

(2)证明多项式整除问题时常用到下列运算公式:

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})$$
$$x^{2k+1}+a^{2k+1}=(x+a)(x^{2k}-ax^{2k-1}+\cdots-a^{2k-1}x+a^{2k})$$

6.综合除法. 用$x-a$除$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$时, 常用如下简便格式求得商式$q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-1}$及余式$r=f(a)$.

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\
a & \downarrow & +)\ ab_0 & +)\ ab_1 & \cdots & +)\ ab_{n-2} & +)\ ab_{n-1} \\
\hline
 & b_0=a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & \multicolumn{1}{|c}{r}
\end{array}$$

注. 把$f(x)$表成$x-a$的方幂和, 即表成

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots+c_n(x-a)^n$$

的形式时, 可以连续用综合除法.

7. 最大公因式. 设$\mathbb{P}$为一个数域, $f(x),g(x),d(x)\in\mathbb{P}[x]$.称$d(x)$为$f(x)$和$g(x)$的一个最大公因式, 如果它满足:

(1) $d(x)|f(x)$, $d(x)|g(x)$, 即$d(x)$为$f(x)$和$g(x)$的一个公因式;

(2) 对$\varphi(x)\in\mathbb{P}[x]$, $\varphi(x)|f(x)$, $\varphi(x)|g(x)$, 都有$\varphi(x)|d(x)$.

注. 求两个多项式的最大公因式最一般的方法是辗转相除法.

8. 定理. 对于$\mathbb{P}[x]$中任意两个多项式$f(x),g(x)$, 在 $\mathbb{P}[x]$中存在一个最大公因式$d(x)$, 且存在$u(x)$, $v(x)\in\mathbb{P}[x]$使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

满足上式的$u(x)$和$v(x)$未必唯一.

9. 设$\mathbb{P}$为一个数域, $f(x),g(x)\in\mathbb{P}[x]$.

(1) $f(x)$和$g(x)$的最大公因式的非零常数倍仍是$f(x)$和$g(x)$的最大公因式. 若$f(x)$ 和$g(x)$不全为0, 则$f(x)$和$g(x)$的最大公因式不为0. 此时我们用$(f(x),g(x))$表示$f(x)$和$g(x)$的首项系数为1的那个最大公因式.

(2) 如果$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$成立, 那么 $f(x)$, $g(x)$和$g(x)$, $r(x)$的公因式的集合是相同的, 特别地, 它们也具有相同的最大公因式.

(3) 两个多项式的最大公因式在相差一个非零倍数的意义下是唯一的.

10. 证明最大公因式的方法. 设$\mathbb{P}$为一个数域, $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{P}[x]$, $f(x), g(x)$不全为0. 证明$(f(x), g(x)) = h(x)$的常用办法有:

(1) 根据最大公因式的定义;

(2) 证明$(f(x), g(x)) = h(x)$的等式左右两边相互整除, 且首项系数均为1;

(3) 证明$h(x)|f(x), h(x)|g(x)$且$h(x)$为$f(x), g(x)$的组合, 然后再证明$h(x)$的首项系数为1.

11. 多项式互素的定义. 设$\mathbb{P}$为一个数域, $f(x), g(x) \in \mathbb{P}[x]$. 若

$$(f(x), g(x)) = 1,$$

则称$f(x)$和$g(x)$是互素的.

12. 多项式互素的性质. 设$\mathbb{P}$为一个数域, $f(x), g(x), h(x), f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{P}[x]$, $a, b \in \mathbb{P}$.

(1) $f(x), g(x)$互素的充要条件为存在$\mathbb{P}[x]$中的多项式$u(x), v(x)$使

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$

(2) 如果$(f(x), g(x)) = 1$, 且$f(x)|g(x)h(x)$, 那么$f(x)|h(x)$.

(3) 如果$f_1(x)|g(x)$, $f_2(x)|g(x)$, 且$(f_1(x), f_2(x)) = 1$, 那么$f_1(x)f_2(x)|g(x)$.

(4) 如果$(f(x), g(x)) = 1$, $(f(x), h(x)) = 1$, 那么$(f(x), g(x)h(x)) = 1$.

(5) 一次多项式$x - a$与$x - b$互素当且仅当$a \neq b$.

13. 证明多项式互素的方法. 设$\mathbb{P}$为一个数域, $f(x), g(x) \in \mathbb{P}[x]$不全为0. 证明$(f(x), g(x)) = 1$的办法有:

(1) 找$u(x), v(x) \in \mathbb{P}[x]$使得$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$;

(2) 直接证明$f(x), g(x)$的任一公因式均为非零常数;

(3) 反证法. 假设存在不可约多项式$p(x)$使得$p(x)|f(x), p(x)|g(x)$, 找到矛盾;

(4) 证明$f(x)$的根全部不是$g(x)$的根.

14. 多个多项式的最大公因式. 设$f_1(x), \cdots, f_n(x) \in \mathbb{P}[x]$不全为0, 则其最大公因式

$$d(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$$

存在且唯一, 并且存在$u_1(x), \cdots, u_n(x) \in \mathbb{P}[x]$使

$$u_1(x)f_1(x) + \cdots + u_n(x)f_n(x) = d(x).$$

注. 数域$\mathbb{P}$上的两个多项式的最大公因式、互素等不随数域的扩大而改变.

15. 最小公倍式. 设$f(x), g(x), m(x) \in \mathbb{P}[x]$. 称$m(x)$为$f(x), g(x)$的一个最小公倍式, 如果它满足:

(1)$f(x)|m(x), g(x)|m(x)$,即$m(x)$为$f(x), g(x)$的公倍式;

(2)$m(x)$能整除$f(x), g(x)$的任一公倍式.

$f(x)$与$g(x)$的首项系数为1的最小公倍式记为$[f(x), g(x)]$. 可以证明:

$$[f(x), g(x)] = \frac{f(x)g(x)}{c\,(f(x), g(x))},$$

这里c为$f(x)g(x)$的首项系数.

16. 不可约多项式的定义. 设$f(x)$是数域$\mathbb{P}$上的多项式, $\partial(f(x)) \geqslant 1$. 若$f(x)$不能够表示为两个次数都比$f(x)$低的多项式的乘积, 则称$f(x)$为数域$\mathbb{P}$上的一个不可约多项式.

17. 不可约多项式的性质. 数域$\mathbb{P}$上的不可约多项式具有下述性质.

(1) 一个次数$\geqslant 1$的多项式为不可约多项式当且仅当它的因式只有非零常数与它自身的非零常数倍.

(2) 一个多项式是否为不可约多项式依赖于系数域, 从而多项式的分解也与数域有关.

(3) 数域$\mathbb{P}$上的不可约多项式$p(x)$与数域$\mathbb{P}$上的任一多项式$f(x)$之间只可能有两种关系: $p(x)|f(x)$ 或者 $(p(x), f(x)) = 1$.

(4) 如果数域$\mathbb{P}$上的多项式$p(x)$为不可约多项式, 那么对任意的$f(x), g(x) \in \mathbb{P}[x]$, 由$p(x)|f(x)g(x)$一定可以推出$p(x)|f(x)$或$p(x)|g(x)$. 进而若

$$p(x)|f_1(x)\cdots f_s(x),$$

则存在i使$p(x)|f_i(x)$.

(5) 数域$\mathbb{P}$上的一次多项式总是不可约多项式.

18. 多项式的因式分解定理. 数域$\mathbb{P}$上每个次数$\geqslant 1$ 的多项式$f(x)$都可以唯一地分解成数域$\mathbb{P}$上一些不可 约多项式的乘积. 所谓唯一性是说如果有两个这样的分解式

$$f(x) = p_1(x)\cdots p_s(x) = q_1(x)\cdots q_t(x),$$

那么必有$s = t$, 并且适当排列因式的次序后有$p_i(x) = c_i q_i(x), i = 1, \cdots, s$, 其中$c_i$ $(i = 1, \cdots, s)$ 是一些非零常数.

19. 标准分解式. 设$\mathbb{P}$为一个数域. $\mathbb{P}[x]$中任一次数$\geqslant 1$的多项式$f(x)$有唯一的标准分解式

$$f(x) = cp_1^{r_1}(x)\cdots p_s^{r_s}(x),$$

这里$p_1(x), p_2(x), \cdots, p_s(x)$为首项系数为1的两两互素的不可约多项式, r_i为正整数, $i = 1, \cdots, s$.

注. 数域$\mathbb{P}$上的次数$\geqslant 1$的多项式$f(x)$的标准分解式$f(x) = cp_1(x)^{r_1}\cdots p_s(x)^{r_s}$在讨论整除以及没有关于$f(x)$的更多具体信息时经常会用到, 特别是讨论幂的时

候.

20. 复系数多项式因式分解定理. 每个次数$\geqslant 1$的复系数多项式在复数域上都可以唯一地分解成一些一次因式的乘积.

因此, 复系数多项式$f(x)$具有标准分解式

$$f(x)=c(x-a_1)^{r_1}\cdots(x-a_s)^{r_s},$$

其中$a_1,\cdots,a_s$是不同的复数, $r_1,\cdots,r_s$是正整数. 这也说明了每个n次复系数多项式恰有n个复根(重根按重数计算).

21. 实系数多项式因式分解定理. 每个次数$\geqslant 1$的实系数多项式在实数域上都可以唯一地分解成一些一次因式与二次不可约因式的乘积.

因此, 实系数多项式$f(x)$具有标准分解式

$$f(x)=c(x-a_1)^{l_1}\cdots(x-a_s)^{l_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{k_t},$$

其中$a_1,\cdots,a_s,p_1,\cdots,p_t,q_1,\cdots,q_t$ 全是实数, $a_1,\cdots,a_s$两两不同, l_1, $\cdots$, l_s, k_1, $\cdots$, k_t是正整数, 并且 $p_i^2-4q_i<0$ $(i=1,\cdots,t)$, $x^2+p_1x+q_1$, $\cdots$, $x^2+p_tx+q_t$是两两互素的不可约多项式.

22. 重因式的定义. 设$k\geqslant 0$为整数, $p(x)$是数域$\mathbb{P}$上的不可约多项式. 若$p^k(x)|f(x)$, 而$p^{k+1}(x)\nmid f(x)$, 则称$p(x)$为$f(x)$的一个k重因式.

23. 重因式的性质. 设$\mathbb{P}$为一个数域, $f(x)$, $p(x)\in\mathbb{P}[x]$. 如果$p(x)$是不可约多项式, $p(x)$为$f(x)$的k重因式, 那么它是微商$f'(x)$的$k-1$重因式. 进而, 它分别是$f''(x)$, $\cdots$, $f^{(k-1)}(x)$ 的$k-2$, $\cdots$, 1重因式, 而不是$f^{(k)}(x)$的因式.

不可约多项式$p(x)$为$f(x)$的重因式的充要条件是$p(x)$为$f(x)$与$f'(x)$的公因式. 从而多项式$f(x)$没有重因式当且仅当$(f(x),f'(x))=1$.

24. 注. 设数域$\mathbb{P}$上的多项式$f(x)$的标准分解式为$f(x)=cp_1^{r_1}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$. 利用

$$\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=p_1(x)\cdots p_s(x)$$

可去掉因式重数, 而保留所有的不可约因式.

25. 余数定理. 设$\mathbb{P}$为一个数域, $f(x)\in\mathbb{P}[x]$, $a\in\mathbb{P}$. 用一次多项式$x-a$去除多项式 $f(x)$, 所得的余式是一个常数, 这个常数等于函数值$f(a)$.

26. 多项式函数根的定义. 设$\mathbb{P}$为一个数域, $f(x)\in\mathbb{P}[x]$, $a\in\mathbb{P}$. 若$f(a)=0$, 则称a为$f(x)$在数域$\mathbb{P}$ 中的一个根.

27. 多项式函数根的性质. 设$\mathbb{P}$为一个数域, $f(x)\in\mathbb{P}[x]$, $a\in\mathbb{P}$.

(1) a是$f(x)$的根的充要条件是$(x-a)|f(x)$.

(2)$\mathbb{P}[x]$中$n(n\geqslant 0)$次多项式在数域$\mathbb{P}$中的根不可能多于n 个, 重根按重数计算.

28. 定理. 设$\mathbb{P}$为一个数域, $f(x),g(x)\in\mathbb{P}[x]$. 如果$f(x),g(x)$的次数都不超过$n$, 而它们在$n+1$个两两不同的数$a_1,\cdots,a_{n+1}$上有相同的函数值, 即 $f(a_i)=g(a_i),i=1,\cdots,n+1$, 那么$f(x)=g(x)$.

29. 代数基本定理. 每个次数$\geqslant 1$的复系数多项式在复数域中一定有一个根.

30. 多项式函数有重根的判定. 设$f(x)\in\mathbb{P}[x],c\in\mathbb{P}$.

(1) c为$f(x)$的重根, 当且仅当$f(c)=f'(c)=0$;

(2) c为$f(x)$的重根, 当且仅当c为$(f(x),f'(x))$的根;

(3) 若$(f(x),f'(x))=1$, 则$f(x)$无重根;

(4) 若$f(x)$在数域$\mathbb{P}$上不可约, 则$f(x)$无重根, 特别地, 在复数域$\mathbb{C}$上无重根.

31. 设$f(x)$与$g(x)$是$\mathbb{P}[x]$中两个多项式. $f(x)|g(x)$当且仅当$f(x)$的根全是$g(x)$的根(计算重数). 最常用的是$f(x)$的根全是单根, 尤其是n次单位根的情况.

32. 本原多项式. 设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$是一个整系数多项式. 如果系数$a_0,a_1,\cdots,a_n$除$\pm1$外没有其他的公因数, 则称$f(x)$为一个本原多项式.

33. 定理. 任一非零的有理系数多项式$f(x)$都可以表示为一个有理数r 与一个本原多项式$g(x)$的乘积, 且这种表示除相差一个正负号外是唯一的. 因此有理系数多项式是否可约、是否有根、是否可以分解等问题都可以转化为整系数多项式的对应问题.

34. 高斯(Gauss)引理. 两个本原多项式的乘积还是本原多项式.

35. 定理. 如果一非零的整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积, 那么它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

36. 性质. 设$f(x),g(x)$是整系数多项式, 且$g(x)$是本原多项式. 如果$f(x)=g(x)h(x)$, 其中$h(x)$是有理系数多项式, 那么$h(x)$一定是整系数的.

37. 整系数多项式的有理根. 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是一个整系数多项式, 而$\frac{r}{s}$是它的一个有理根, 其中r,s是互素的整数, 那么必有$s|a_n,r|a_0$. 特别地, 如果$f(x)$的首项系数$a_n=1$, 那么$f(x)$的有理根都是整根, 而且是a_0的因子.

38. 艾森斯坦判别法. 设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

是一个整系数多项式. 如果有一个素数p使得

(1) $p \nmid a_n$;

(2) $p | a_{n-1}, \cdots, a_0$;

(3) $p^2 \nmid a_0$.

那么$f(x)$在有理数域上不可约.

39. 注. (1) 当不能直接用艾森斯坦判别法判断一个次数不小于1次的有理系数多项式$f(x)$是否可约时, 可以做一个适当的替换, 把$f(x)$变成一个可以直接应用艾森斯坦判别法的情况, 常用的替换有$x = ay + b$(要求$a \neq 0$)等.

(2) 对高斯引理、艾森斯坦判别法以及上述几个结果的证明思想可以用来解决许多问题. 希望读者能够掌握它们的证明思想.

(3) 下面的事实在研究整系数多项式在有理数域上是否可约时经常用到: 设$f(x)$为整系数多项式, $m, n \in \mathbb{Z}$. 则作为整数, $(m-n)|(f(m)-f(n))$.

40. n次单位原根的定义. $x^n - 1$在复数域上有n个根, 令$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$, 则

$$\begin{aligned} x^n - 1 &= (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1) \\ &= (x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)\cdots(x-\omega^{n-1}), \end{aligned}$$

其中ω叫作n次单位元根. 我们在解决问题时会经常利用

$$1 + \omega + \cdots + \omega^{n-1} = 0$$

这一关系式.

41. 多元多项式. 设$\mathbb{P}$为一个数域, $x_1, x_2, \cdots, x_n$是n个文字. 形如$a x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$的式子称为一个单项式, 其中$a \in \mathbb{P}$, $k_1, k_2, \cdots, k_n$是非负整数. $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$称为该单项式的次数.

一些单项式的和

$$\sum_{k_1, k_2, \cdots, k_n} a_{k_1, k_2, \cdots, k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$$

称为n元多项式, 其中系数不为0的次数最高的单项式的次数称为这个多项式的次数.

称所有系数在数域$\mathbb{P}$中的n元多项式的全体$\mathbb{P}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$为数域$\mathbb{P}$上的$n$元多项式环.

42. n元多项式的字典排列法. (1)设$(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 和$(l_1, l_2, \cdots, l_n)$为两个n元数组, 若有某个$i \leqslant n$使

$$k_1 - l_1 = 0, \cdots, k_{i-1} - l_{i-1} = 0, k_i - l_i > 0,$$

则称数组$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$先于数组$(l_1,l_2,\cdots,l_n)$, 记作

$$(k_1,k_2,\cdots,k_n)>(l_1,l_2,\cdots,l_n).$$

(2)任取n元多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n} a_{k_1,k_2,\cdots,k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$$

中的两个单项式

$$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n} \tag{1}$$

$$bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n} \tag{2}$$

若数组$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$先于数组$(l_1,l_2,\cdots,l_n)$, 则在多项式$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$中, 把单项式(1)写在单项式(2)的前面. 这种排列多元多项式中项的方法称为字典排列法. 按字典排列法写出的第一个系数不为零的单项式称为多项式的首项.

(3)多元多项式的首项未必是最高次项.

43. 定理. 当$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0, g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$时, 乘积

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

的首项等于$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的首项的乘积.

44. 推论. (1) 若$f_i\neq 0, i=1,2,\cdots,m$, 则乘积$f_1f_2\cdots f_m$ 的首项等于这m个f_i的首项相乘之积.

(2) 如果$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0, g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$, 那么

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0.$$

45. 齐次多项式. 若多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n} a_{k_1,k_2,\cdots,k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$$

中每个单项式全是m次的, 则称$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为m次齐次多项式.

(1)两个齐次多项式的乘积仍然是齐次多项式, 乘积的次数等于这两个齐次多项式的次数之和.

(2)任一m次多项式$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$都可唯一地表示成

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{m} f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

其中$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是i次齐次多项式, 称之为$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的i次齐次成分.

(3)设

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{m} f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$