# 线性代数与空间解析几何

主　编　陈东升

高等教育出版社

# 线性代数与空间解析几何

XIANXING DAISHU YU KONGJIAN JIEXI JIHE

主 编　陈东升

高等教育出版社·北京

内容提要

本书主要内容包括矩阵及其初等变换、方阵的行列式与逆矩阵、几何空间、$n$ 维向量与线性方程组、方阵的特征值与特征向量、二次型与特殊二次曲面。全书以矩阵、初等变换为主线展开，由方阵直接定义行列式，再由二阶、三阶行列式的对角线法则得到 $n$ 阶行列式按一行（一列）展开的定义；由几何空间中的三维向量自然延伸到 $n$ 维向量空间。每一章节尽量通过实例引入，并适量加入一些实际问题的解析，使学生深入理解线性代数与空间解析几何在实际问题中的应用。例题由实际问题引入，丰富翔实；习题中加入了近几年的考研试题，以满足不同层次读者的需求。

全书纸质内容与数字化资源一体化设计、紧密配合。数字课程涵盖课程介绍、教学大纲、微视频、PPT 课件、知识结构图、重点难点解读、典型例题、考研题型、疑难问题、数学家小传、应用案例、数学实验等板块，在提升课程教学效果的同时，为学生学习提供思维与探索的空间，便于学生自主学习。

本书可作为高等学校非数学专业的线性代数与空间解析几何教材，也可供报考硕士研究生的考生、自学者和科技工作者等参考使用。

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数与空间解析几何 / 陈东升主编. -- 北京：高等教育出版社，2016.8

ISBN 978-7-04-045145-0

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材②立体几何-解析几何-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151.2②O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 076630 号

策划编辑 李晓鹏　责任编辑 李晓鹏　封面设计 王 琰　版式设计 王 琰
插图绘制 尹文军　责任校对 刘 莉　责任印制 刘思涵

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 肥城新华印刷有限公司
开　　本 787 mm ×1092 mm 1/16
印　　张 19.75
字　　数 400 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
http://www.hepmall.com
http://www.hepmall.cn
版　　次 2016 年 8 月第 1 版
印　　次 2016 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 32.60 元


物 料 号 45145-00

# 与本书配套的数字课程资源使用说明

与本书配套的数字课程资源在书中用 标出，资源发布在高等教育出版社易课程网站，请登录网站后开始课程学习。

1. 访问 http://abook.hep.com.cn/45145，点击“注册”。在注册页面输入用户名、密码及常用的邮箱进行注册。已注册的用户直接输入用户名和密码登录即可进入“我的课程”界面。

2. 点击“我的课程”页面右上方“绑定课程”，按网站提示输入教材封底防伪标签上的数字，点击“确定”完成课程绑定。

3. 在“正在学习”列表中选择已绑定的课程，点击“进入课程”即可浏览或下载与本书配套的课程资源。刚绑定的课程请在“申请学习”列表中选择相应课程并点击“进入课程”。

账号自登录之日起一年内有效，过期作废。


**数字资源 先睹为快**

微视频　典型例题　应用案例　重点难点

# 前 言

郑州轻工业学院的线性代数与空间解析几何课程是河南省精品资源共享课程，该课程由线性代数课程改革发展而成。郑州轻工业学院线性代数课程的改革始于 1998 年，2000 年被评为校级优秀课程，并于 2001 年在全校一年级新生的第一学期开设线性代数与空间解析几何课程（之前的线性代数课程安排在第三学期，空间解析几何课程则在高等数学中讲授），2004 年被评为学校精品建设课程，同年通过了第二批河南省“网络工程”项目，2005 年通过学校精品课程评审，2007 年被评为河南省精品课程。2015 年被评为河南省精品资源共享课程。

线性代数是讨论有限维空间理论的课程，它主要是运用代数方法研究具有线性关系的数学对象，建立相应的理论体系，具有很强的逻辑性和抽象性，没有背景材料与实际应用的支持，会对学生理解概念和基本思想构成一定困难。如“矩阵的秩”和“向量组的秩”等概念是学生感到最抽象、最难理解同时又感到最没用的东西，而这些概念在解析几何中却有着广泛的应用，使得对几何问题的讨论变得简捷而明了。解析几何主要是通过直角坐标系，建立空间几何图形与方程之间的关系，用代数方法解决几何问题。电影电视中引人入胜的动画制作，工程技术中正在日益推广的计算机辅助设计（CAD）、科学计算的可视化等，它们的基本数学工具都源自解析几何与线性代数。二者的结合能激发学生学习的主动性，使他们学习数学的潜能得到了充分的发挥。整合线性代数与空间解析几何，不仅可以借助几何直观使一些抽象的代数概念和理论变得比较容易接受，而且也可借助矩阵方法处理解析几何中一些原本比较困难的问题，如直线、直线与平面间的位置关系、二次曲面或平面二次曲线的化简等问题。同时，整合后的课程在一年级开课，为后续课程的学习奠定了坚实的基础。希望这样的课程设计能提高学生学习的兴趣，也企盼对学生的就业有所帮助。

本书既可作为线性代数课程的教材，又可作为空间解析几何课程的教材，也可两者兼顾。书中带

“ * ”号的内容，教师可以根据学时选讲或不讲。书中矩阵的等价关系、相似关系、合同关系分别用符号 $\cong$、$\backsim$、$\simeq$ 表示。为弥补一些学生中学阶段知识的欠缺，附录中加入了复数、求和符号 $\sum$ 和求积符号 $\prod$ 等概念的介绍。

本书将纸质教材和数字化资源一体化设计、密切配合。读者可以充分利用数字课程的资源进行自主学习，提高学习的效率。数字课程涵盖课程介绍、教学大纲、微视频、PPT 课件、知识结构图、重点难点解读、典型例题、考研题型、疑难问题、数学家小传、应用案例、数学实验等板块。数字课程经过精心的设计，以流媒体形式展示了围绕某个知识点或教学环节展开的简短、完整的教学活动；极大地丰富了知识的呈现形式，拓展了教材内容，以满足不同层次学习者的需求，帮助学生奠定扎实的数学基础；拓宽了学生的知识面，提高学生应用数学知识解决实际问题的能力和考研能力。

本书集众人所长，叙个人思想，在编写过程中参考了许多文献和网上资料，限于篇幅，对于没有列出的参考文献表示歉意和感谢！

全书由郑州轻工业学院陈东升编写。青岛理工大学叶林，郑州轻工业学院黄守佳、谭瑞梅、邢培旭、刘强、李乐都做了相应的工作。对各位编委的辛勤工作表示真挚的谢意！

高等教育出版社、郑州轻工业学院数学与信息科学学院、教务处教材科以及相关的兄弟院校，对本书的编写和出版给予了热忱的关怀和支持，在此表示衷心的感谢！

由于编者水平所限，虽然竭尽全力，但书中仍会有欠妥、遗漏之处，恳请专家、同行、读者批评指正或提出宝贵建议（联系 Email：dxfjh@ zzuli.edu.cn）。

陈东升

2016 年 1 月

# 目 录

# 第一章　矩阵及其初等变换

矩阵是线性代数研究的主要对象之一.矩阵作为一种重要的数学方法，不仅是用初等变换研究方程组的有力工具，也被广泛地应用于数学的其他分支以及自然科学、管理科学和工程技术中.本章从实际问题入手，引入矩阵的概念，然后介绍矩阵的基本运算、分块矩阵的概念及运算、矩阵的初等变换等概念.

第一章知识结构图　　第一章重点难点

## §1.1　矩阵的概念

数学家小传 1-1 刘徽

微视频 1-1 矩阵的概念

PPT 课件 1-1 矩阵的概念

### 一、实例

例 1.1.1　某物流中心的某类物质有 3 个产地、4 个销地,其调运方案如表 1.1.1 所示 .

表 1.1.1　调运方案表

| 调运数 | 销地 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 4 | 3 | 1 | 0 |
| 2 | 6 | 5 | 2 | 1 |
| 3 | 7 | 5 | 5 | 8 |

将此表缩略成如下形式

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix},$$

它是有 3 行 4 列的 3×4 个数构成的,我们称之为矩阵 .

## 二、矩阵的定义

定义 1.1.1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 $m$ 行 $n$ 列的数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1.1}$$

叫做 $m$ 行 $n$ 列矩阵,简称 $m\times n$ 矩阵,其中 $a_{ij}$ 表示位于第 $i$ 行第 $j$ 列的数,又称为矩阵的元素.

元素全是实数的矩阵称为实矩阵,元素是复数的矩阵称为复矩阵.本书的矩阵除特别说明外,都指实矩阵.(1.1.1)式可简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,这里下标 $i$ 指明行序数,下标 $j$ 指明列序数.$m\times n$ 矩阵也可记作$\boldsymbol{A}_{m\times n}$, 如果 $m=n$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶矩阵或 $n$ 阶方阵,$n$ 阶矩阵也记为$\boldsymbol{A}_n$. 矩阵常用大写黑体英文字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$表示.

$n$ 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 $m$ 个变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 之间的关系

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n, \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

表示一个从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的线性变换,其中 $a_{ij}$是常数,线性变换(1.1.2)的系数构成 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$.

给定线性变换(1.1.2),它的系数所构成的矩阵也就确定了. 反之,如果给出一个矩阵作为线性变换的矩阵,则线性变换也就确定了. 从这个意义上说,线性变换和矩阵之间存在着一一对应关系.

例如,线性变换

$$\begin{cases} y_1=x_1, \\ y_2=x_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n=x_n \end{cases}$$

叫做恒等变换,它对应着 $n$ 阶方阵

$$E_n=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}_{n\times n},$$

此方阵叫做 $n$ 阶单位矩阵,简记作 $E$ 或 $I$,这个方阵的特点是:从左上角到右下角的连线上的元素为 1,其余元素都是 0,即 $E=(\delta_{ij})$,其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\0, & i\neq j\end{cases}\quad (i,j=1,2\cdots,n).$$

只有一行的矩阵 $A=(a_1\quad a_2\quad\cdots\quad a_n)$ 称为行矩阵,也称作行向量. 为避免元素间的混淆,行矩阵也记作 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 只有一列的矩阵

$$B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

称为列矩阵,也称作列向量.

含有 $n$ 个未知量 $m$ 个方程的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{1.1.3}$$

的系数也可构成一个 $m\times n$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},$$

称为方程组(1.1.3)的系数矩阵,它的常数项可以表示为一个 $m\times1$ 的列矩阵

$$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

线性方程组(1.1.3)的系数矩阵与常数项一起可以表示成一个 $m\times(n+1)$ 的矩阵

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

称为方程组(1.1.3)的增广矩阵.

线性方程组(1.1.3)的未知量可以表示成一个列矩阵

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

例 1.1.2 写出线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5, \\ x_1-x_2+x_3+x_4=1 \end{cases}$ 的系数矩阵和增广矩阵.

解 系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,增广矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

两个行数相等、列数相等的矩阵,称为同型矩阵. 如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是同型矩阵,并且它们的对应元素都相等,即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,那么就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等,记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

只有一个元素 $a$ 的矩阵称为一阶矩阵,记作 $(a)$,所有元素都为数 0 的矩阵称为零矩阵,记作 $\mathbf{0}$. 注意,不同型的零矩阵是不同的.

例 1.1.3 当 $\begin{pmatrix} x & 2y \\ z & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2u & u \\ 1 & 2x \end{pmatrix}$ 时,$x,y,z,u$ 各取何值?

解 由 $x=2u,2y=u,z=1,-8=2x$ 可得,$x=-4,y=-1,z=1,u=-2$.

例 1.1.4 各城市之间交通连接形成一个交通网络图. 设图上有 $n$

个城市构成的节(顶)点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$,在每两个节点(城市)之间以线段相连接,这些线段可以是有向的,用箭头表示;也可以是双向的,因而可画出双箭头. 这就形成了一个交通网络图,这样的图称为有向图(如果图上线段都是双向的,可以不画箭头,称为无向图),这个图可以用 $n\times n$ 矩阵表示,这个矩阵叫做邻接矩阵,它的行和列分别表示这些节点的编号,行号表示出发节点,列号表示到达节点. 任何一条有向线段,在矩阵中用一个数值为 1 的元素表示,即若邻接矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,则

$$a_{ij}=\begin{cases}1,\text{节点}v_i\text{到}v_j\text{有箭头(不含中间节点)},\\0,\text{节点}v_i\text{到}v_j\text{没有箭头}.\end{cases}$$

有向图 1.1.1 的邻接矩阵(假设自身不相通,即 $a_{ii}=0$;也可假设 $a_{ii}=1$)是

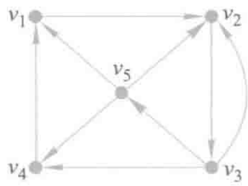



图 1.1.1

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5\end{array}\\ \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 1 & 1\\1 & 0 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

## 三、常见的特殊矩阵

前面的行(列)矩阵、零矩阵、单位矩阵都是特殊矩阵,下面再介绍几种常见的特殊类型的矩阵.

$n$ 阶方阵的左上角与右下角之间的连线称为它的主对角线. $n$ 阶方阵的主对角线下(上)方的元素全为零的方阵称为上(下)三角矩阵,即方阵

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\quad\text{和}\quad\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

分别称为上三角矩阵和下三角矩阵.

$n$ 阶方阵的主对角线以外的元素全为零,即只有主对角线上可能有

非零元素的方阵称为对角方阵,简称对角矩阵,即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

常简记为 $A=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$. $n$ 阶单位矩阵 $E$ 就是一个特殊的对角矩阵,即 $E=\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1)$.

线性变换

$$\begin{cases} y_1=\lambda_1 x_1, \\ y_2=\lambda_2 x_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n=\lambda_n x_n \end{cases}$$

对应的也是一个 $n$ 阶对角矩阵,记为

$$\Lambda_n=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

在对角矩阵中,若 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a$,则称其为数量矩阵,即方阵

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

为数量矩阵. 单位矩阵是一种特殊的数量矩阵.

定义 1.1.2　如果 $m\times n$ 矩阵 $A$ 满足以下条件:

(1) 如果 $A$ 有零行(元素全为 0 的行),且零行都在非零行的下边;

(2) 非零行的非零首元(自左至右第一个不为 0 的元素)的列标随行的递增而严格递增,

则称 $A$ 为行阶梯形矩阵. 这时称 $A$ 中非零行的行数为 $A$ 的阶梯数,即如下形状的矩阵称为行阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} *_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & *_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & *_i & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & *_r & \cdots & \cdots \\ & & & & & & & \end{pmatrix},$$

其中空白处的元素全为零，$*_i(1\leqslant i\leqslant r)$表示第$i$行中第一个不为零的元素(非零首元)，每行的非零首元必在前一行非零首元的右下方.

例如，$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$都是行阶梯形矩阵，而$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$不是行阶梯形矩阵.

定义 1.1.3 如果行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{A}$ 还满足条件：

(1) 各非零首元全为1；

(2) 非零首元所在列的其余元素全为0，

则称 $\boldsymbol{A}$ 为行简化阶梯形矩阵，简称行最简形矩阵.

如单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 就是一个特殊的行最简形矩阵，而

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

也是一个行最简形矩阵.

同理，我们可以定义列阶梯形矩阵及列最简形矩阵. 如矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

为列阶梯形矩阵，其特点是：零列(元素全为0的列)位于最右边，非零列的非零首元(自上至下第一个不为0的元)都在前一列非零首元的右下侧；而

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是列最简形矩阵，其特点是列阶梯形各列的非零首元全是1，非零首元所在行的其余元素全为零.

## 习题 1.1

1. 某企业生产 A，B，C，D 四种产品，各种产品的季度产值如表 1.1.2.

表 1.1.2 季度产值表

| 产值 | | 产品 | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D |
| 季度 | 1 | 60 | 85 | 75 | 87 |
| | 2 | 88 | 78 | 90 | 84 |
| | 3 | 98 | 75 | 95 | 95 |
| | 4 | 80 | 70 | 82 | 80 |

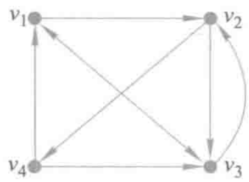
试用矩阵表示此表格.

2. 写出线性变换$\begin{cases} y_1 = x_1\cos\theta - x_2\sin\theta, \\ y_2 = x_1\sin\theta + x_2\cos\theta, \\ y_3 = x_3 \end{cases}$所对应的矩阵.

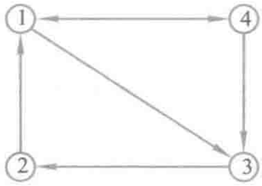
3. 写出线性方程组$\begin{cases} x \quad\; -3z = 0, \\ 2x+3y+z=0, \\ 3x+2y \quad\; =5 \end{cases}$的系数矩阵和增广矩阵.

4. 写出下列有向图的邻接矩阵:

应用案例 1-1
城市交通网络流量问题

(1) 

;

(2) 

.

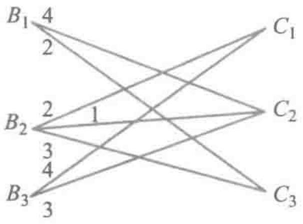


图 1.1.2

5. 图 1.1.2 表示了 $B$ 省的 3 个城市 $B_1, B_2, B_3$ 与 $C$ 省的 3 个城市 $C_1, C_2, C_3$ 的交通连接图(既非有向图,也非无向图). 每条线上的数字表示此通路上不同的运路(公路、铁路、水路、空路)数目. 若以 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 表示从 $B_i$ 到 $C_j$ 的运路数,试写出矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$.

6. 写出即是上三角形矩阵又是下三角形矩阵的 $n$ 阶矩阵的一般形式.

7. 下列矩阵哪些是行阶梯形矩阵? 哪些是行最简形矩阵? 哪些不是?

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; (5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.