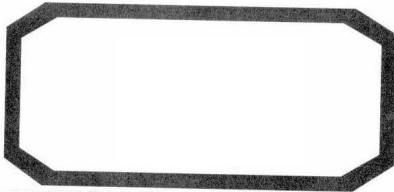


应用型本科数学基础课程教材

高等数学(上册)

吴炳焯 主编
郭晶 孙锋 副主编

高等教育出版社



应用型本科数学基础课程教材

高等数学(上册)

吴炳焯 主编
郭晶 孙锋 副主编

高等教育出版社·北京

内容简介

本书以教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”及“经济和管理类本科数学基础课程教学基本要求”为指导,结合应用型本科院校相关专业数学教学的特点,以严密、通俗的语言,较系统地介绍了高等数学的知识。全书分为上、下两册。上册共分五章,包括函数、极限与连续,导数和微分,微分中值定理和导数的应用,不定积分及定积分等。全书纸质内容与数字课程一体化设计,紧密配合。数字课程涵盖微视频、电子教案、自测题、综合练习、数学史、数学家小传等板块,为应用型本科院校学生的学习提供思维与探索的空间。

本书可作为应用型本科院校理工类、经济管理类专业的高等数学教材,也可作为相关专业学生考研的参考材料,还可供相关专业人员和广大教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册 / 吴炳焯主编. -- 北京: 高等教育出版社, 2016.8

ISBN 978-7-04-045314-0

I. ①高… II. ①吴… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第089393号

策划编辑 李晓鹏
插图绘制 郝林

责任编辑 李晓鹏
责任校对 李大鹏

封面设计 王琰
责任印制 刘思涵

版式设计 王琰

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印刷 唐山市润丰印务有限公司
开本 787 mm×1092 mm 1/16
印张 16.75
字数 330千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
版 次 2016年8月第1版
印 次 2016年8月第1次印刷
定 价 28.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物料号 45314-00

与本书配套的数字课程资源使用说明

与本书配套的数字课程资源在书中用  标出，资源发布在高等教育出版社易课程网站，请登录网站后开始课程学习。

1. 访问 <http://abook.hep.com.cn/45314>，点击“注册”。在注册页面输入用户名、密码及常用的邮箱进行注册。已注册的用户直接输入用户名和密码登录即可进入“我的课程”界面。
 2. 点击“我的课程”页面右上方“绑定课程”，按网站提示输入教材封底防伪标签上的数字，点击“确定”完成课程绑定。
 3. 在“正在学习”列表中选择已绑定的课程，点击“进入课程”即可浏览或下载与本书配套的课程资源。刚绑定的课程请在“申请学习”列表中选择相应课程并点击“进入课程”。
- 账号自登录之日起一年内有效，过期作废。



The screenshot shows the user interface of the digital course resource website. At the top left is a logo with a book icon. The main title is "高等数学 (上册)" (Advanced Mathematics, Volume 1), with editors listed as 吴炳焯 (Editor) and 郭昆 孙锋 (Associate Editor). Below the title is a registration form with fields for "用户名" (Username), "密码" (Password), and "验证码" (Verification Code), which contains the number "0837". There is a "进入课程" (Enter Course) button and a "注册" (Register) button. Below the form are four tabs: "内容介绍" (Content Introduction), "纸质教材" (Paper Textbook), "版权信息" (Copyright Information), and "联系方式" (Contact Information). The "内容介绍" tab is active, showing a paragraph of text about the digital course's integration with the paper textbook. To the right of the text is a QR code labeled "Android客户端" (Android Client). At the bottom right, there are three buttons: "注册" (Register), "登录" (Login), and "绑定课程" (Bind Course).

前言

高等数学是理工类及经济管理类专业的一门重要的基础课程,对于提高相关专业学生的综合素质有重要的作用。作为一门基础学科,数学有其固有的特点,这就是高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性。数学的高度抽象性及严密逻辑性在很大程度上造成了非数学类专业学生学习数学的困难。随着高等教育的大众化,这一问题显得越来越突出。高等数学课程教学如何适应应用型人才培养的需要,是当前应用型本科院校教学改革与研究的一个重要课题。

本书就是在这一背景下,结合编者多年的教学实践和教改成果,以教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”及“经济和管理类本科数学基础课程教学基本要求”为指导而编写的,以满足应用型本科院校理工类及经济管理类专业高等数学课程教学的需要,同时在教材内容与习题编排上兼顾这些专业学生考研的需求。

与其他同类教材相比,本书有以下特色:

1. 充分考虑学生学习方式改变的新趋势,以“纸质教材+数字课程”的方式对教材的内容和形式进行了整体设计。纸质教材通过正文旁边设置旁白的方式,对正文内容进行补充说明、拓展讨论和归纳总结,数字课程对纸质内容进行巩固、补充和拓展,形成以纸质教材为核心、数字化教学资源配合的综合知识体系。数字课程包含的教学资源有微视频、电子教案、自测题、综合练习、数学史、数学家小传等。

2. 全书体系完备清晰,知识叙述循序渐进,难度适中。在内容编排上,引入数学概念时注重介绍相应的数学或物理等背景,并围绕基本内容构造了丰富的例题。此外,几何图形对于学生理解与掌握数学概念与方法起到十分重要的作用,与同类教材相比,本书配有丰富的插图,有利于学生理解与掌握数学知识。

3. 一定量的习题训练是学生学习与掌握数学知识不可或缺的重要环节。本书根据教学内容精心编制习题,在习题编排上分为 A 题与 B 题两类。A 题为基础题,以帮助学生掌握基础知识与基本方法为目的,可作为课后书面作业选用;B 题为提高题,其中包含历年来非数学类专业的部分考研真题,适合对数学有兴趣的学生进一步学习及考研训练使用。

4. 全书书稿及配套的电子教案用数学编辑软件 LATEX 编写而成,电子教案在形式上模拟“黑板+粉笔”的传统教学模式,具备“擦黑板”、标注、打草稿、按步骤作图、图文交替演示等功能,同时充分体现多媒体课件书写规范美观、富于变化、图形准确、动态演示形象直观等特点,十分适合教师教学及学生学习的需要。

本书由吴炳焯任主编,参加编写的教师为:郭晶(第 1、2、3 章)、孙锋(第 4、5 章)。本书在编写过程中参考了国内有关著作、教材,主要参考书目已列在书末,在此表示感谢。

本书的编写还得到编者单位及高等教育出版社的大力支持与热情帮助,在此谨致谢意。限于编者的水平,书中难免存在错漏之处,敬请专家和读者批评指正。

编者

2016 年 1 月

目 录

—001	第 1 章 函数、极限与连续
001	1.1 函数
001	1.1.1 集合、常量和变量
004	1.1.2 函数
011	1.1.3 反函数和复合函数
016	1.1.4 初等函数
020	习题 1-1
023	1.2 数列的极限
023	1.2.1 数列极限的定义
027	1.2.2 收敛数列的性质
030	1.2.3 数列极限的运算法则
031	1.2.4 数列极限存在的判别定理
035	习题 1-2
037	1.3 函数的极限
037	1.3.1 函数极限的定义
042	1.3.2 函数极限的性质
047	1.3.3 函数极限的判别定理、重要极限
051	习题 1-3
053	1.4 无穷大和无穷小

053	1.4.1	无穷小
054	1.4.2	无穷大
057	1.4.3	无穷小的比较
060		习题 1-4
062	1.5	连续函数
062	1.5.1	函数的连续性
064	1.5.2	函数的间断点
066	1.5.3	连续函数的运算和初等函数的连续性
071	1.5.4	闭区间上连续函数的性质
073		习题 1-5
—077		第 2 章 导数和微分
077	2.1	导数的概念
077	2.1.1	引例
078	2.1.2	导数的定义
084		习题 2-1
086	2.2	函数的求导法则
086	2.2.1	函数和、差、积、商的求导法则
088	2.2.2	反函数的求导法则
090	2.2.3	复合函数的求导法则
094	2.2.4	基本求导法则与导数公式
095		习题 2-2
097	2.3	高阶导数
097	2.3.1	高阶导数
100	2.3.2	莱布尼茨公式
101		习题 2-3
102	2.4	隐函数及由参数方程所确定的函数的求导法则
102	2.4.1	隐函数及其求导法则
105	2.4.2	由参数方程所确定的函数的导数
109		习题 2-4

111	2.5 函数的微分
112	2.5.1 微分的定义
114	2.5.2 微分的几何意义
115	2.5.3 基本初等函数的微分公式和微分运算法则
118	2.5.4 微分在近似计算中的应用
121	习题 2-5
122	2.6 边际与弹性
123	2.6.1 经济学中的常用函数
126	2.6.2 边际
128	2.6.3 弹性
137	习题 2-6
138	第 3 章 微分中值定理和导数的应用
138	3.1 微分中值定理
138	3.1.1 罗尔定理
137	3.1.2 拉格朗日中值定理
141	3.1.3 柯西中值定理
142	习题 3-1
144	3.2 洛必达法则
144	3.2.1 $\frac{0}{0}$ 型
146	3.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型
147	3.2.3 其他型的未定式
149	习题 3-2
151	3.3 泰勒公式
151	3.3.1 泰勒公式
156	3.3.2 几个常用函数的展开式
159	3.3.3 泰勒公式的应用
161	习题 3-3

162	3.4 函数的单调性与曲线的凹凸性
162	3.4.1 函数单调性的判定法
165	3.4.2 曲线的凹凸性与拐点
168	习题 3-4
170	3.5 函数的极值与最值
170	3.5.1 函数的极值及其求法
173	3.5.2 最大值和最小值问题
176	3.5.3 经济问题应用举例
177	习题 3-5
179	3.6 函数图形的描绘
179	3.6.1 渐近线
180	3.6.2 函数图形的描绘
183	习题 3-6
184	3.7 曲率
184	3.7.1 曲率的概念
186	3.7.2 曲率的计算公式
188	3.7.3 曲率圆与曲率半径
189	习题 3-7
190	3.8 方程的近似解
190	3.8.1 二分法
192	3.8.2 切线法
193	习题 3-8
195	第 4 章 不定积分
195	4.1 不定积分的概念和性质
195	4.1.1 原函数
196	4.1.2 不定积分的性质和基本积分公式
199	习题 4-1
199	4.2 换元积分法
200	4.2.1 第一类换元积分

203	4.2.2 第二类换元积分
206	习题 4-2
207	4.3 分部积分法
209	习题 4-3
210	4.4 有理函数和可以化为有理函数的积分
210	4.4.1 有理函数的积分
212	4.4.2 可以化为有理函数的积分
214	习题 4-4
—217	第 5 章 定积分
217	5.1 定积分的概念和性质
217	5.1.1 定积分的概念
220	5.1.2 定积分的基本性质
221	习题 5-1
222	5.2 定积分的基本公式
222	5.2.1 积分上限函数
224	5.2.2 牛顿-莱布尼茨公式
227	习题 5-2
229	5.3 定积分的计算
229	5.3.1 定积分的换元法
231	5.3.2 定积分的分部积分法
233	习题 5-3
234	5.4 广义积分
235	5.4.1 无限区间上函数的广义积分
237	5.4.2 无界函数的广义积分
240	5.4.3 Γ 函数
241	习题 5-4
242	5.5 定积分的应用
242	5.5.1 定积分的微元法
243	5.5.2 定积分的几何应用

248	5.5.3 定积分的物理应用
250	习题 5-5
—253	附录 高等数学第一学期期末考试卷
—254	参考文献

第 1 章 函数、极限与连续

高等数学是关于变量的数学，函数的关系就是变量之间的依赖关系，而极限的方法则是研究变量的一种基本方法。本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念与基本性质，为讨论函数的微分与积分作准备。

1.1 函数

1.1.1 集合、常量和变量

集合是数学中的一个重要概念，现代数学各个分支几乎都构筑在严格的集合理论上。为今后学习的需要，本节从介绍微积分所涉及的有关集合论的一些基本知识开始。

○ PPT 课件 1-1

函数



1. 集合的概念

定义 1.1.1 具有某种特定性质的事物的全体，称为集合，或简称集。组成这个集合的事物，称为该集合的元素。

通常用大写字母 A, B, X, Y, \dots 表示集合，用小写字母 a, b, x, y, \dots 表示元素。若集合不含任何元素，称为空集，记为 \emptyset 。仅含有限个元素的集合称为有限集，否则称为无限集。

若元素 x 在集合 A 中，则称 x 属于 A ，记为 $x \in A$ 。若元素 x 不在集合 A 中，则称 x 不属于 A ，记为 $x \notin A$ 。

设 A, B 是两个集合，若集合 A 中的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记为 $A \subset B$ (读为 A 包含于 B)，或 $B \supset A$ (读为 B 包含 A)。

若集合 A 和 B 互为子集，即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ ，则称 A 和 B 相等，记为 $A = B$ 。若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$ ，则称 A 是 B 的真子集，记为 $A \subsetneq B$ 。

例如,我们一般用字母 \mathbf{N}^+ 表示全体正整数集合, \mathbf{Z} 表示全体整数集合, \mathbf{Q} 表示全体有理数集合, \mathbf{R} 表示全体实数集合, 则 $\mathbf{N}^+ \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. 另外, \mathbf{R}^* 通常表示非零实数的集合, \mathbf{R}^+ 表示全体正实数的集合.

2. 集合的表示方法

表示集合的方法有两种,一种是枚举法,即把集合中的元素一一列举出来. 如 $\mathbf{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, $\mathbf{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$.

另一种是描述法,即把元素的特性描述出来. 例如

$$\mathbf{R}^+ = \{x > 0\};$$

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^+ \text{ 且 } p \text{ 和 } q \text{ 互质} \right\}.$$

3. 集合的运算

集合的基本运算有并、交、差三种.

设 A, B 是两个集合,由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的并集(简称并),记为 $A \cup B$,即 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$. 一般地, n 个集合 A_1, A_2, \dots, A_n 的并集记为 $\bigcup_{i=1}^n A_i$, 即

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{x \mid x \in A_1 \text{ 或 } x \in A_2 \cdots \text{ 或 } x \in A_n\}.$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的交集(简称交),记为 $A \cap B$,即 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

一般地, n 个集合 A_1, A_2, \dots, A_n 的交集记为 $\bigcap_{i=1}^n A_i$, 即

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{x \mid x \in A_1 \text{ 且 } x \in A_2 \cdots \text{ 且 } x \in A_n\}.$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的差集(简称差),记为 $A \setminus B$, 即

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

有时我们仅把问题限于在某一个确定的集合 X 中讨论,所研究的其他集合 A 都是 X 的子集,这时称集合 X 为全集或基本集,称 $X \setminus A$ 为 A 的余集或补集,记为 A^c , 即

$$A^c = \{x \mid x \in X \text{ 且 } x \notin A\}.$$

集合的并、交、差三种运算满足下列法则. 设 A, B, C 为任意三个集合, 则有

$$(1) \text{ 交换律: } A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A;$$

$$(2) \text{ 结合律: } (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

$$(3) \text{ 分配律: } (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$$

$$(4) \text{ 对偶律: } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

以上法则都可根据集合相等的定义验证.

此外我们还可以定义两个集合的笛卡儿乘积.

设 A, B 是任意两个集合, 在集合 A 中任意取一个元素 x , 在集合 B 中任意取一个元素 y , 它们组成一个有序对 (x, y) , 把这样的有序对作为新元素, 它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的笛卡儿乘积或直积, 记为 $A \times B$, 即

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \text{ 且 } y \in B \}.$$

例如, $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{ (x, y) \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } y \in \mathbf{R} \}$, 即为 xOy 平面上全体点的集合. $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 常记作 \mathbf{R}^2 .

4. 区间和邻域

区间是一类用得较多的数的集合. 设 a 和 b 为实数, 且 $a < b$.

数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间, 记为 (a, b) , 即 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$.

数集 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记为 $[a, b]$, 即 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$.

数集 $\{x \mid a < x \leq b\}$ 和 $\{x \mid a \leq x < b\}$ 均称为半开半闭区间, 分别记为 $(a, b]$ 和 $[a, b)$.

a, b 称为上述各区间的端点, 数 $b - a$ 称为区间长度. 由于 a, b 是有限的实数, 故上述各区间均称为有限区间.

此外, 引进记号 $+\infty$ (读作正无穷大) 和 $-\infty$ (读作负无穷大), 则可类似地表示无限区间. 例如 $[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$ 和 $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$ 均为无限区间. 全体实数的集合 \mathbf{R} 也可记作 $(-\infty, +\infty)$, 它也是无限区间.

以后在不需要明确指出区间是否包含端点, 以及是有限还是无限区间时, 就简称为“区间”, 且常用字母 I 表示.

邻域也是常用到的一类集合. 设 $\delta > 0$, 则开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 称为 a 的一个 δ 邻域, 记为 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\},$$

其中点 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径(图 1-1). $U(a, \delta)$ 也可以表示为 $\{x \mid |x-a| < \delta\}$.

有时用到的某点邻域需要把该点去掉. 例如, 由于 $0 < |x-a|$ 隐含 $x \neq a$, 故集合 $\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 不包含点 a , 称为点 a 的去心邻域, 记为 $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$, 即

$$\overset{\circ}{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}.$$

另外, 把开区间 $(a-\delta, a)$ 称为 a 的左 δ 邻域, 把开区间 $(a, a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域. 有时, 不关心 δ 的大小时, 就将 a 的邻域表示为 $U(a)$.

5. 常量和变量

我们在研究各种自然现象和实际问题时, 会遇到许多量, 这些量一般分为两种: 一种是在考察过程中保持不变的量, 即保持一定的数值, 称为常量; 另一种是在这一过程中会起变化的量, 即可以取不同的数值, 称为变量. 例如自由落体的下降时间和距离是变量, 而重力加速度则可以看成是常量. 一个量是常量还是变量, 要根据具体的情况作出分析.

通常用字母 a, b, c 等表示常量, 用字母 x, y, z, t 等表示变量.

在变化过程中, 我们发现有些变量是连续变化的, 例如时间、路程等; 而有些变量则不是连续变化的, 例如溶液的浓度, 等等. 变量的变化范围就是变量的取值范围, 如果变量是连续的, 当变量取实数值时, 常用区间表示它的变化范围.

1.1.2 函数

1. 函数概念

在研究实际问题时, 常常有几个量同时变化, 它们的变化往往不是彼此独立, 而是相互联系着的, 其间的关系非常复杂. 为了便于研究, 我们先考察两个变量之间的关系. 下面是一些具体的例子.

例1 自由落体运动中, 下降的距离 s 取决于下降的时间 t , 它们的关

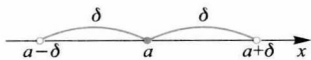


图 1-1

系由公式 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 确定. 这里重力加速度 g 是常量, 距离 s 和时间 t 为变量. 当 t 取任一个值时, 按变量间的依赖关系, 就有一个唯一确定的值 s 与之对应.

例2 实验室动物所用药物在血液中的浓度(单位: 10^{-6})随着时间的在递减, 表 1-1 列出了浓度和时间的关系.

表 1-1

时刻	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
浓度	853	587	390	274	189	130	97	67	50	40	31

这里时间和浓度均为变量, 对于时刻 $0, 1, 2, \dots, 10$ 中的每一个值, 由表格可定出它的对应浓度.

例3 人在奔跑后心搏率会恢复到正常, 图 1-2 中曲线描绘了某人锻炼后几分钟心搏率与时间这两个变量的关系. 在时间的变化范围内每取一个值, 由图 1-2 就有一个确定的心搏率与之对应.

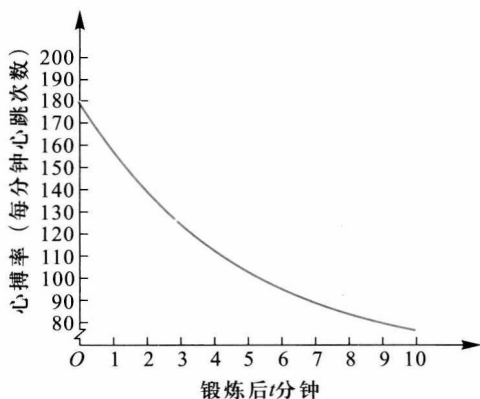


图 1-2

从数学的角度看, 以上例子中变量间对应关系的共同特征, 可以得到如下的函数概念:

定义 1.1.2 设 D 是一个给定的非空数集, x 和 y 是两变量. 若存在对应关系 f , 使得当变量 x 在其变化范围 D 内任意取定一个数值时, 变量 y 按照对应关系 f , 总会取到唯一确定的数值和 x 对应, 则称 f 是定义在 D 上的函数, 记为

$$f: D \rightarrow \mathbf{R}.$$