蔡书军 著

模d缩族质合表与其显示的k生素数

西北工業大學出版社

MO d SUOZU ZHIHEBIAO YUQI XIANSHI DE k SHENGSUSHU

模 d 缩族质合表与其显示的 k 生素数

蔡书军 著

西北工業大學出版社

【内容简介】 本书全面系统地介绍了如何编制和应用系列型的模 d 缩族质合表低耗高效筛选素数和依次不漏地搜寻等差 d 素数列等 k 生素数的方法. 为此,应用筛法建立了模 d 缩族质合表的概念和编制方法,着重讨论了该表的数学原理、共性优点、独特功能与应用方法,提出了一系列关于 k 生素数的有趣猜测,深刻揭示了模 d 缩族质合表与其显示的 k 生素数之间天然而奇妙的联系. 该表方法新颖,科学合理,一表多用. 书中编有欧拉函数值适中、涵显信息丰富、应用广泛的 3 个大型模 d 缩族质合表,以供读者查阅备用.

作为《k 生素数分类及相邻 k 生素数》一书的姊妹篇,本书视角独特,观念创新;循序渐进,逻辑严密;表述说理清晰,举例详实;通俗易懂,耐人寻味;方法简明,易学易用,融学术探讨性与数学科普性于一体,适合大、中学师生和数学工作者、爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

模 d 缩族质合表与其显示的 k 生素数/蔡书军著. —西安:西北工业大学出版社, 2016.11
ISBN 978－7－5612－5109－6

Ⅰ.①模… Ⅱ.①蔡… Ⅲ.①质数—数学表 Ⅳ.①O1－641

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 263982 号

出版发行: 西北工业大学出版社
通信地址: 西安市友谊西路 127 号　　邮编:710072
电　　话: (029)88493844　88491757
网　　址: www.nwpup.com
印 刷 者: 陕西宝石兰印务有限责任公司
开　　本: 787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张: 42.125
字　　数: 1 025 千字
版　　次: 2016 年 11 月第 1 版　2016 年 11 月第 1 次印刷
定　　价: 128.00 元

名人名言

研究必须充分地占有材料，分析它的各种发展形式，探寻这些形式的内在联系，只有这项工作完成以后，现实的运动才能适当地叙述出来.

——马克思

只要自然科学在思维着，它的发展形式就是假说.

——恩格斯

要真正认识事物，必须把握、研究它的一切方面、一切联系和中介. 我们决不能完全做到这一点，但是全面性的要求可以使我们防止错误和防止僵化.

——列宁

一个正确的认识，往往需要经过由物质到精神，由精神到物质，即由实践到认识，由认识到实践这样多次的反复，才能够完成.

——毛泽东

我们不但要提出任务，而且要解决完成任务的方法问题. 我们的任务是过河，但是没有桥或没有船就不能过. 不解决桥或船的问题，过河就是一句空话. 不解决方法问题，任务也只是瞎说一顿.

——毛泽东

谁眼前没有问题而去探索方法，就很可能是无用的探索.

只要一门科学分支能提出大量的问题，它就充满着生命力；而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止. 正如人类的每项事业都追求着确定的目标一样，数学研究也需要自己的问题。正是通过这些问题的解决，研究者锻炼其钢铁意志，发现新方法和新观点，达到更为广阔和自由的境界。

——希尔伯特

突出的未解决的问题需要新的方法去求解，而有力的新方法又引起待解决的新问题.

——E. T. 贝尔

新的数学方法和概念，常常比解决数学问题本身更重要.

——华罗庚

我们数论知识的积累，不仅依靠已经证明了的理论，而且也依靠那些未知的猜想.

——谢尔宾斯基

千古数学一大猜!

——华罗庚

在数学的领域中,提出问题的艺术比解答问题的艺术更为重要.

——康托

科学不单单是要解决问题,还要不断地从新的现象中发掘问题,这是主要的一步,也是最困难的一步.

——丘成桐

数学,如果正确地看它,不但拥有真理,而且也具有至高的美.

——罗素

哪里有数,哪里就有美.

——普洛克拉斯

数学园地处处开放着美丽花朵,它是一片灿烂夺目的花果园,这片园地正是按照美的追求开拓出来的.

——徐利治

数学世界充满了精神的创造,只要深入其中就会发现奥妙无穷.

——谷超豪

数学是人类最高超的智力成就,也是人类心灵最独特的创作.音乐能激发或抚慰情怀,绘画使人赏心悦目,诗歌能动人心弦,哲学使人获得智慧,科学可以改善物质生活,但数学能给予以上一切.

——高斯

数学不但能够训练出清晰思维,而且能够培养一种独立思考、坚持真理的品格.

——姜伯驹

我相信在科学上并没有平坦的大道……在我们前进的道路上荆棘丛生,只有经历了不断试探、一再失败,才能寻找出合适的方法,开辟出赖以前进的道路.

——玻恩

面对悬崖峭壁,一百年也看不出一条缝来,但用斧凿,能进一寸进一寸,能进一尺进一尺,不断积累,飞跃必来,突破随之.

——华罗庚

前　　言

朋友，提起 k 生素数，你也许觉得是那么的神奇美妙而又陌生. 但是，如果读了《k 生素数分类及相邻 k 生素数》一书，你一定很想知道书中那如同繁星点点的 k 生素数是怎样找到的？难道背后有什么妙招诀窍？为了回答这个好奇之问，本书与你一探究竟。让我们一起去搜寻、挖掘深埋在整数地壳中的 k 生素数，你将看到一个瑰丽多彩、气象万千、奥秘无穷的素数新天地.

素数是整数的主心骨，数论的脊髓潜伏和贯通于其中. 而 k 生素数是由素数编织的美丽图案、绽放的鲜艳花朵和弹奏的动听乐曲. 是的，我们不仅对 k 生素数一直知之甚少，而且人类对与自己经常打交道的自然数{1,2,3,…}及其内含的素数的了解，还比不上对离我们遥远宇宙中星系的探索和认识. 众所周知，数和形是数学大厦的两大支柱，而“数学是上帝用来书写宇宙的文字”(伽利略语)，自然数中源源不尽的素数，蕴藏着与浩瀚星空、无穷宇宙一样能引起人们兴趣的真理和未解之谜. 例如，在给定的范围内，怎样低耗高效筛选素数和依次不漏地搜寻等差素数列等种类繁杂的 k 生素数，是素数论众多问题中两个基本而重要的问题. 特别是 k 生素数研究中面临缺乏研究对象时，首先需要解决搜寻 k 生素数的工具和方法问题. 所以，这也是数学工作者和爱好者非常感兴趣的两个问题. 作为《k 生素数分类及相邻 k 生素数》一书的姊妹篇，本书的主要内容就是回答读者朋友心中的疑问和好奇，介绍笔者追问和破解这两个问题所找到的一种新的系列型方法——应用自制的模 d 缩族质合表这个工具箱中的多种工具筛选素数、搜寻等差素数列等特定 k 生素数.

研究须有研究对象. 搜寻 k 生素数就是搜集研究对象，为 k 生素数研究积累必要的第一手数据和资料. 而目前极度缺乏的，正是 k 生素数各个种类的个体资料. 但是，面对浩瀚无垠又隐藏不露的 k 生素数，搜寻耗时费力且效果不佳超出了起初的预料，成为制约研究进展的瓶颈. 不打破这一瓶颈，不跨过这一门槛，研究无从谈起. 因此，搜寻 k 生素数，不能只是搜异猎奇，重要的是着意于广搜博采，探索一般现象与本质，以期发现能够解释、纳括奇特现象在内的普遍规律，揭开 k 生素数的谜底.

根据不超过 x 的素数间隙表①这一实用有力的工具，可以把 x 以内给定差型的绝对和随机相邻 k 生素数全部搜寻出来. 但是，对于随机和偶然不相邻 k 生素数，却眼睁睁地看着它们全都漏掉了. 如何堵住这一巨大无比的漏洞，是我们面临的一大问题和挑战.

素数在自然数中的分布是又稀又乱，要筛选出来并非易事. 而 k 生素数比素数分布的更稀更乱，被淹没在自然数的汪洋大海之中，寻找它们特别是寻找不相邻 k 生素数如同大海捞针. 因此，长期以来人们对 k 生素数知之甚少. 但是，研究又必须直面 k 生素数搜寻这令人望而生畏而少有人问津的艰辛的巨量工作.

有人说，寻找是一种磨炼，也是一种积累. 可我还要说——

---

① 蔡书军，k 生素数分类及相邻 k 生素数. 西安：西北工业大学出版社，2012，第 415 页.

寻找
　　是追梦路上的奋力拼搏，
寻找
　　是历经艰辛的长途跋涉……
寻找是深入虎穴，
寻找是独闯龙宫；
寻找是勇于实践，
寻找是勤于思考；
寻找是探究新知，
寻找是求索真理！

因此，必须寻找——
寻找素数花园盛开的奇葩，
寻找自然数中深藏的奥秘；
寻找 k 生素数的魅力和神奇，
寻找数论中那意想不到的谜底……

其实，追梦征途
有无数震撼人心、催人奋进的寻找——
在茫茫无际的戈壁荒原，
在人迹罕至的深山峡谷，
在波涛汹涌的东海、南海……
地质队员为祖国寻找地下矿藏，
困难再大，也要拿下！
付出再多，也是值得.

寻找——
人类在浩瀚无限的宇宙中
寻找自己的知音，
仰望星空，怀抱希望；
征途遥远，何惧艰险！

寻找呵寻找
执着地寻找——
在迷茫中寻找方向，
在黑夜里寻找光明……

寻找……
寻找呵寻找——

在复杂中寻找法则，
在平凡中寻找珍贵.
在个别中寻找一般，
在偶然中追溯必然.

寻找……
寻找呵寻找——
从具体中寻出抽象，
在表象下挖掘本质.
在反相中寻找对称，
在对立中寻求统一.

寻找……
寻找呵寻找——
在混沌中寻找秩序，
在关联中摸索规律.
在有限中寻找无限，
在万变中寻找永恒……

寻找要志存高远锐意进取，
寻找是锲而不舍上下求索；
寻找要执着坚定迎难而上，
寻找是逢山攀岩遇水蹚河；
寻找要洞悉全局明察秋毫，
寻找是踏遍青山搜尽天涯；
寻找要理出线索找到方法，
寻找是既寻树木又找森林；
寻找要由此及彼由表及里，
寻找是打破砂锅刨根问底；
寻找要不辞劳苦孜孜以求，
寻找是披沙拣金挥洒汗水；
寻找是淡泊名利耐得寂寞，
寻找要勇于探索百折不回！

寻找，寻找前行的路径，
寻找，寻找攻关的法宝……
寻找，
寻找直觉瞬间的顿悟，
寻找，

寻找灵感闪耀的火花……
在寻找中发现,
在寻找中思考……

寻找,大师说
是自己孩提时在海滩上捡拾那美丽的贝壳,
　心中却对真理的海洋无限向往……
寻找,先哲说
就是奔跑在谬误的河床上
　把真理的浪花追逐……
寻找,思想家说
"为了追求真理,
　我们注定要经历失败和挫折".
寻找,导师说
只有"持之以恒地搜寻事物的法则",
　才能透彻地了解它们的奥秘和美妙.

你说寻找,
就是穿越在素数的崇山峻岭密林深谷
　勘探 k 生素数的无尽宝藏;
我说寻找,
就是以有限的生命向无限进发
　把永恒窥瞧!

寻找呵寻找,
"上穷碧落下黄泉……
升天入地求之遍";
寻找呵寻找,
"众里寻他千百度",
"衣带渐宽终不悔"!
寻找呵寻找,
走的山穷水尽疑无路,
寻得"柳暗花明又一村"……

"为缘寻找,为爱坚守",
只要寻找,就能找到——
灵感,在寻找中闪现,
奇迹,在寻找中相见……
呵,寻找,寻找……

不断地尝试摸索，
痴情地苦苦寻找，
对真理的向往和追求，
是我们寻找的信念和动力的不竭源泉！

素数间隙表是素数序列与其差数列相互配套的一种复合表，其编制离不开普通素数表. 而后者依赖于把（给定范围内的）自然数列中的合数和素数截然分离开来. 笔者为了搜寻更大范围中的一些 k 生素数，正是在试图扩编手头素数间隙表的过程中，找到了既能区分开素数与合数，又能显示 k 生素数大量信息的系列型模 d 缩族质合表，发现它们能够在搜寻 k 生素数领域各显神威，是一种科学可靠、方便有效的搜寻工具.

素数隐匿在自然数那层层山峦的深腹之中，秘而不露；等差素数列等 k 生素数又都淹没和潜藏在素数的汪洋大海里，鱼龙混杂难觅踪迹，想要找出困难重重. 现在，有了模 d 缩族质合表，难事终于有了转机. 对于素数和等差 d 素数列等 k 生素数，如果说自然数列是其"贫矿"床，寻找难，"开采"难，"选矿"难，那么模 d 缩族质合表就是其"富矿"床. 因为该表不仅具有富集、筛选素数的功能，而且具有聚集、显示和用于搜寻等差 d 素数列等特定 k 生素数的神奇功能.

作为大海捞针的一大法宝，模 d 缩族质合表同时突破了低耗高效筛选素数和依次不漏搜寻等差 d 素数列等 k 生素数的两个瓶颈，是有效适用的搜寻工具. 它使人们有了火眼金睛，一扫先前 k 生素数搜寻工作的盲目性，从而极其方便地找到前所未见的大量种类的 k 生素数，把往日难事变得轻而易举，弥补了素数间隙表存在的无法显搜不相邻 k 生素数的巨大漏洞. 搜寻不相邻 k 生素数，以前是"老虎吃天——没法下爪"，现今是"瓮中捉鳖——手到擒拿"。

"事必有法，然后可成". 古代有了埃氏筛法，解决了把素数从自然数列中筛选出来的问题；现在有了模 d 缩族质合表这种新工具，如同有了"定海神针"，不但解决了低耗高效筛选素数的问题，而且解决了等差 d 素数列等特定 k 生素数的显搜问题. 一箭双雕，竟然同时打开了素数宝藏的前、后两座大门，使一个全新的 k 生素数世界展现在我们面前，使开篇提出的两大难题一同迎刃而解. 就像分头沿着一南一北各自绵延数千里浩浩荡荡奔腾不息的长江、黄河，溯流而上却能殊途同归，其源头竟然出自同一道山脉——巴颜喀拉山的两侧. 出其不意的联系，导致两个问题的统一解决，可谓一举两得. 真是"梦里寻找千百回"，得来却在梦醒时. 这正是——

两江同源，殊途同归；
两题同解，一箭双雕.
自然人文，辉映成趣；
出乎意料，奇妙无比.

对 k 生素数的研究之所以头绪难抓，进展缓慢，关键之一是其个体和群体的基础资料和数据极度缺乏. 如果没有来自实际中第一手调查资料，根本无法形成感性认识，又何来认识上的飞跃？而研究编制和应用模 d 缩族质合表这一全新的系列工具和广阔的平台，揭示出众多种类 k 生素数的显搜方法，继而运用这个有力的方法，各种新的 k 生素数纷纷涌现，得到和积累了大量的数据和信息. 这些都是深入研究 k 生素数必不可少的基础性工作. 总之，作为一种新

工具的出现和应用，模 d 缩族质合表为 k 生素数的后续搜寻和研究，以及提出新问题、预见新事物、揭示新规律、创立新方法打下了基础，开拓了局面.

正是发现、挖掘和拓展了应用模 d 缩族质合表的潜在功能，拨开了前行路上的迷雾，打开了观察、认识 k 生素数的新窗口、新视野. 与此同时，也冒出了几多待解之谜，骄傲而神秘地向人们显耀——k 生素数世界充满了无穷的奥妙！那就让我们一起怀着对神奇秘境的好奇与对真知的渴望之心，从自然数构筑的港湾出发，扬起模 d 缩族质合表的风帆，驶向 k 生素数那风光无限的大海，启程去探索素数未知世界奥秘的漫游和远航吧，这会是一个令你意趣兼得、难以忘怀的旅程.

另外，书中的定义、定理、引理、推论和式子都是按章（包括附录）分别编号，即一章一编号，而猜测和表则不分章节，全书统一编号，贯通叙述和引用.

在撰写本书的过程中，曾得到陕西省设备安装公司刘立工程师、陕西省交通运输厅信息站王立平工程师的热心帮助。在本书最后一次重大补充、修改的跨年累月的时耗过程中，得到了商洛市交通运输局局长周三启，副局长黄恒林、夏启宗等党政领导和我的朋友、同事的热情鼓励、大力支持和帮助，使我有一个顺利完成大量数据计算、验证和边探讨边补写文稿的环境条件；商洛学院数学与计算机学院王念良教授及时提供了有关参考文献。特借本书出版之际，在此对他们热心、无私的支持和帮助表示深深的敬意和衷心的感谢！同时，向在本书撰写过程中参阅相关文献的作者表示感谢。

最后，感谢我的妻子和家人的支持与帮助。

书中笔者提出的新概念、新方法和新观点以及给出的 k 生素数数据、资料，可供研究和应用。由于水平所限，书中难免存在不当之处与错漏，恳请各位专家、学者和读者朋友批评指正。

著　者

2016 年 5 月

符　　号

书中字母均表整数.全书通用符号列示如下.若个别之处含义不同,将随时说明.

$\mathbf{N}$	自然数集.即非负整数集:$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,n+1,\cdots\}$
$\mathbf{N}^+$	正整数集:$\mathbf{N}^+=\{1,2,3,\cdots,n,n+1,\cdots\}$
$\mathbf{Z}$	整数集:$\mathbf{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm n,\pm n+1,\cdots\}$
$x\in A$	x 属于 A;x 是集合 A 的一个元素
$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$	诸元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 构成的集合
$A\subseteq B$	A 包含于 B;A 是 B 的子集
$A\subset B$	A 真包含于 B;A 是 B 的真子集
h,h_1,h_2,h'	合数
$p,p_1,p_2,\cdots,r_1,r_2,\cdots;$ $q_1,q_2,\cdots;q_{\mathrm{I}},q_{\mathrm{II}},\cdots$	素数
p_n	第 n 个素数,其中 $p_1=2,p_2=3,p_3=5,\cdots$
P_n	前 n 个素数的连乘积.即 $P_n=p_1p_2\cdots p_n$
$P_n^{\alpha_n}$	$p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_n^{\alpha_n}$ 的连乘积.即 $P_n^{\alpha_n}=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$
x^n	x 的 n 次幂
$\sqrt{x}$	x 的平方根
$\sim$	渐近等于
$\approx$	近似等于
∞	无穷
$\Rightarrow$	推出(蕴含着,推导出)
$\Leftrightarrow$	等价
$n!$	阶乘.即 $n!=n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$
$a\mid b$	a 能整除 b;b 含有因数 a
$a\nmid b$	a 不能整除 b;b 不含因数 a
$P_n\parallel d$	$P_n\mid d$ 但 $p_{n+1}\nmid d$
$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$	$a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant 2)$ 的最大公因数
$[a_1,a_2,\cdots,a_n]$	$a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant 2)$ 的最小公倍数
$a\equiv b(\bmod m)$	a 同余于 b 模 m
$a\not\equiv b(\bmod m)$	a 不同余于 b 模 m
$r\bmod m$	包含 r 的模 m 的非负有序同余类:$r\bmod m=\{qm+r:q=0,1,2,\cdots\}$
$\varphi(m)$	欧拉(Euler)函数.即序列 $1,2,\cdots,m$ 中与 m 互素的数的个数
$[x]$	不超过实数 x 的最大整数,称为实数 x 的整数部分
$\pi(x)$	不超过正整数 $x(>0)$ 的素数个数,叫作素数计算函数

$\pi(x;d,j)$	等差数列 $\{nd+j:n=0,1,2,\cdots;(d,j)=1\}$ 中不超过 x 的素数个数
$\pi(x)^d$	不超过 x 的差 d 素数对 $\{p,p+d\}$ 的个数 $(p+d\leqslant x)$
$\pi(x)_j^d$	等差数列 $\{nd+j:n=0,1,2,\cdots;(d,j)=1,1\leqslant \lvert j\rvert<\frac{d}{2}\}$ 中不超过 x 的差 d 素数对 $\{p,p+d\}$ 的个数 $(p+d\leqslant x)$
$\pi(x)^{d_1-d_2-\cdots-d_{k-1}}$	不超过 x 的差 $d_1-d_2-\cdots-d_{k-1}$ 型 k 生素数的个数. 其中第 k 项素数 $r_k=r_1+(d_1+d_2+\cdots+d_{k-1})\leqslant x$
$\pi(x)_{\beta_1,\beta_2}^d$	个位数是 $\beta_1,\beta_2(\beta_i=1,3,7,9;i=1,2)$ 的不超过 x 的差 d 素数对 $\{p,p+d\}$ 的个数 $(p+d\leqslant x)$
$\pi(x)_{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k}^{d_1-d_2-\cdots-d_{k-1}}$	个位数是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k(k\geqslant 3,\beta_i=1,3,7,9;i=1,2,\cdots,k)$ 的不超过 x 的差 $d_1-d_2-\cdots-d_{k-1}$ 型 k 生素数的个数. 其中第 k 项素数 $r_k=r_1+(d_1+d_2+\cdots+d_{k-1})\leqslant x$
$\pi(x)^{d_v}$	不超过 x 的 $v(v=3,4,\cdots,p_{n+1}-1;n\geqslant 2,P_n\parallel d)$ 项等差 d 素数列个数. 其中第 v 项素数 $r_v=r_1+(v-1)d\leqslant x$
$\pi(x)_j^{d_v}$	等差数列 $\{nd+j:n=0,1,2,\cdots;(d,j)=1,1\leqslant \lvert j\rvert<\frac{d}{2}\}$ 中不超过 x 的 $v(v=3,4,\cdots,p_{k+1}-1;k\geqslant 2,P_k\parallel d)$ 项等差 d 素数列个数. 其中第 v 项素数 $r_v=r_1+(v-1)d\leqslant x$
$\sum_{i=1}^{n}x_i$	和式:$x_1+x_2+\cdots+x_n$
$\prod_{i=1}^{n}x_i$	乘积式:$x_1x_2\cdots x_n$
$\prod_{p\mid n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$	对 n 的不同素因数 p 的 $\left(1-\frac{1}{p}\right)$ 形的乘积
$\prod_{I\leqslant i\leqslant\gamma}\left(1-\frac{1}{q_i}\right)$	对满足条件 $I\leqslant i\leqslant\gamma$ 的全体 $\left(1-\frac{1}{q_i}\right)$ 求积
$\sum\pi(x;d,j)$	对满足条件 $(d,j)=1$ 且 $1\leqslant\lvert j\rvert<\frac{d}{2}$ 的全体 $\pi(x;d,j)$ 求和
$\sum\pi(x)_j^d$	对满足条件 $(d,j)=1$ 且 $1\leqslant\lvert j\rvert<\frac{d}{2}$ 的全体 $\pi(x)_j^d$ 求和
$\sum\pi(x)_j^{d_v}$	对满足条件 $(d,j)=1$ 且 $1\leqslant\lvert j\rvert<\frac{d}{2}$ 的全体 $\pi(x)_j^{d_v}$ 求和
F^D	差 D 型 k 生素数个位数分类的方式数,简称差 D 型 k 生素数个位方式数. $F^D=F^{d_1-d_2-\cdots-d_{k-1}}$
$A(B)$	①A 或 B;②A 即 B

目　录

绪　论

尝试便是一个美好的开始.

——(法)利奥·巴斯卡利

一、提出问题,明确概念

为什么要搜寻 k 生素数? 怎样依次不漏地搜寻等差素数列等 k 生素数? 在回答问题之前,首先要明确什么是 k 生素数? 什么是模 d 缩族质合表? 模 d 缩族质合表有哪些特点和显著的优势与功能呢?

相比"k 生素数","素数"一词更为人们所熟知. 如果说素数是满天璀灿的繁星,那么 k 生素数就是镶嵌在天幕上一个个数也数不完的明亮而美丽的星座. 无穷无尽魅力迷人的 k 生素数让它们的家园 —— 素数的天空分外绚丽夺目;如果说素数是一个一个的单个汉字,那么 k 生素数就是两个和两个以上的单字所组成的词、成语和句子,文字因此才真正成为文化的载体和思想交流的工具. 通过比喻可见,k 生素数和素数都并不完全陌生和神秘,两者如此关联、密不可分,只是两相比较,"素数"的概念更为人们熟悉而已.

众所周知,如果大于 1 的整数 p 只有 1 和 p 本身两个正因数,则 p 是素数. 素数又称质数. 如果大于 1 的整数 h 的正因数多于两个,则 h 是合数. 那么,数学中又是如何定义 k 生素数? 当然,也可以简单而形象地说,k 生素数就是依大小顺序排列的串珠式的素数. 比喻是为了便于理解和记忆,作为数学概念,k 生素数的定义如下:

设 $k(2 \leqslant k \leqslant \in \mathbf{N}^{+})$ 项递增奇素数(列) 为

$$R = \{r_1, r_2, \cdots, r_k\}$$

则 R 称为 k 生素数. 设 R 内含的差数(列) 为

$$D = \{d_1, d_2, \cdots, d_{k-1}\}$$

即 $d_1 = r_2 - r_1, d_2 = r_3 - r_2, \cdots, d_{k-1} = r_k - r_{k-1}$,则称 k 生素数 R 是一个差 $d_1 - d_2 - \cdots - d_{k-1}$ 型 k 生素数,简称 R 是一个差 D 型 k 生素数. 特别地:

(1) 如果 $k = 2, d_1 = d$,则称二生素数 r_1, r_2 是一个差 d 素数对. 其中差 2 素数对又称孪生素数;如果 $k \geqslant 3$,又称 R 是一个差 D 型 k 项素数列.

(2) 如果 $k \geqslant 3$ 且 $d_1 = d_2 = \cdots = d_{k-1} = d$,则称 k 生素数 R 是一个 k 项等差 d 素数列.

(3) 如果 $r_1 = p_s, r_2 = p_{s+1}, \cdots, r_k = p_{s+k-1}$,则称 k 生素数 R 是一个相邻差 D 型 k 生素数. 当 $k = 2, d_1 = d$ 时,R 称为相邻差 d 素数对;当 $k \geqslant 3$ 时,R 亦称为相邻(差 D 型)k 项素数列.

(4) 如果 k 生素数 R 中的 $r_1 = p_s$,而至少有一个 $r_t > p_{s+t-1}(2 \leqslant t \leqslant k)$,则 R 称为不相邻差 D 型 k 生素数. 当 $k = 2, d_1 = d$ 时,R 称为不相邻差 d 素数对;当 $k \geqslant 3$ 时,R 亦称为不相邻(差 D 型)k 项素数列.

(5) 如果 k 项等差 d 素数列又是相邻(不相邻) 素数列,则称为相邻(不相邻)k 项等差 d 素数列.