GAODENG DAISHU

全国高等学校首届国家级教学名师倾力打造

高等代数

学习指导书 第二版

下册

丘维声◎编著

清华大学出版社

高等代数

学习指导书 第二版

下册

丘维声◎编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本套书是大学“高等代数”课程的辅导教材，是作者从事教学、科研工作38年的经验和心得的结晶，也是作者在北京大学进行“高等代数”课程建设和教学改革的成果。本套书按照数学思维方式编写，着重培养数学思维能力，内容丰富、全面、深刻，阐述清晰、详尽、严谨，可以使读者在高等代数理论上和科学思考能力上都达到相当的高度。

本套书以研究线性空间和多项式环的结构及其态射（线性映射，多项式环的通用性质）为主线，遵循高等代数知识的内在规律和学生的认知规律安排内容结构。上册内容包括线性方程组，行列式，n维向量空间K^n，矩阵的运算，欧几里得空间$\mathbf{R}^n$，矩阵的相抵和相似，以及矩阵的合同与二次型。下册内容包括一元和n元多项式环，环和域的概念；域上的线性空间，线性映射（包括线性变换和线性函数）；具有度量的线性空间（欧几里得空间、酉空间、正交空间和辛空间）及其上的线性变换（正交变换、对称变换、酉变换、Hermite变换、辛变换），群的概念（介绍正交群、酉群、辛群）；多重线性代数（包括线性空间的张量积，线性空间V上的张量代数和外代数）。书中每节均包括内容精华、典型例题、习题3部分，每章末（除第11章外）有补充题。下册总计有1238道题，可从中选择一部分作为习题课上的题目和课外作业。

本套书可作为综合大学、高等师范院校和理工科大学的“高等代数”课程的教材，也可作为“高等代数”或“线性代数”课程的教学参考书，是想把高等代数学得更好的学生的必备书籍，也是数学教师和数学工作者高质量的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等代数学习指导书. 下册/丘维声编著. —2版 —北京：清华大学出版社，2016
ISBN 978-7-302-44604-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①丘… Ⅲ. ①高等代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第175389号

责任编辑：苏明芳
封面设计：刘 超
版式设计：文森时代
责任校对：马军令
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦A座 **邮 编**：100084
社 总 机：010-62770175 **邮 购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京密云胶印厂
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×230mm **印 张**：62 **字 数**：1270千字
版 次：2009年5月第1版 2016年8月第2版 **印 次**：2016年8月第1次印刷
印 数：1～4000
定 价：96.00元

产品编号：057028-01

第二版前言

这次主要在以下几个方面进行修订：

1. 进一步强化了“高等代数”课程的主线：研究线性空间及其态射（即线性映射）

“高等代数”课程包括线性代数，一元和 n 元多项式的理论，群、环、域的基本概念三部分，作者把这三部分整合成了一条主线——研究线性空间和线性映射。

从我们生活的客观世界抽象出几何空间，它是以定点 O 为起点的所有向量组成的集合。向量有加法和数量乘法运算，并且加法满足交换律、结合律、有零元、每个元素有负元；数量乘法满足 4 条法则。几何空间中取定三个不共面的向量 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3$，则每一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以唯一地表示成 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3$ 的线性组合：$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{d}_1+a_2\boldsymbol{d}_2+a_3\boldsymbol{d}_3$。把 $(a_1,a_2,a_3)'$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3$ 下的坐标。几何空间中向量的坐标是 3 元有序实数组，所有 3 元有序实数组组成的集合记作 $\mathbf{R}^3$。为了用坐标来做向量的加法和数量乘法运算，自然而然地应当在 $\mathbf{R}^3$ 中定义加法和数量乘法运算，这样定义的运算满足 8 条法则。设一个质点在 t 时刻位于点 $P(x,y,z)'$，则 (t,x,y,z) 称为这个质点的时-空坐标，于是考虑所有 4 元有序实数值组成的集合 $\mathbf{R}^4$，类似于 $\mathbf{R}^3$ 可定义加法数量乘法运算，并且满足 8 条运算法则。从数学的角度讲，自然可以推广到在 n 元有序实数组组成的集合 $\mathbf{R}^n$ 中定义加法和数量乘法运算，它们满足 8 条运算法则。但是这样做的动力何在？动力之一是为了研究 n 元一次方程组，即 n 元线性方程组能够直接从它的系数和常数项判断其是否有解，以及研究解集的结构。我们把定义了加法和数量乘法运算，且满足 8 条运算法则的 $\mathbf{R}^n$ 称为实数域 $\mathbf{R}$ 上的 n 维向量空间。闭区间 $[a,b]$ 上两个连续函数的和还是连续函数，实数 c 与连续函数 f 的乘积 cf 仍是连续函数，于是由 $[a,b]$ 上所有连续函数组成的集合 $C[a,b]$ 有加法和数量乘法运算，并且它们满足 8 条运算法则。从上述这些具体的对象我们抽象出数域 K 上线性空间的概念：设 V 是一个非空集合，如果 V 上定义了一个加法运算，在数域 K 与 V 之间定义了数量乘法运算，且加法满足 4 条法则，数量乘法满足 4 条法则，那么 V 称为数域 K 上的一个线性空间。从上述抽象出线性空间概念的具体例子中看到，线性空间提供了一个广阔的天地。

平面上绕定点 O 的转角为 θ 的旋转 σ 具有如下性质：$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$，$\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$，其中 α,β 是平面上任意两个以 O 为起点的向量，k 是任意实数。几何空间在过定点 O 的平面 π 上的正投影 $\boldsymbol{P}_\pi$ 也具有如下性质：$\boldsymbol{P}_\pi(\alpha+\beta)=\boldsymbol{P}_\pi(\alpha)+\boldsymbol{P}_\pi(\beta)$，$\boldsymbol{P}_\pi(k\alpha)=k\boldsymbol{P}_\pi(\alpha)$。

由此抽象出数域 K 上线性空间 V 到 V' 的一个映射 $\mathbf{A}$ 如果满足:
$$\mathbf{A}(\alpha+\beta)=\mathbf{A}(\alpha)+\mathbf{A}(\beta),\mathbf{A}(k\alpha)=k\mathbf{A}(\alpha),$$
其中 $\alpha,\beta\in V,k\in K$,那么称 $\mathbf{A}$ 是 V 到 V' 的一个线性映射。于是平面上绕定点 O 的旋转是平面到自身的线性映射,几何空间到过定点 O 的平面 π 上的正投影 $\boldsymbol{P}_\pi$ 是几何空间到自身的线性映射。根据定积分的性质,对于 $f(x)\in C[a,b]$,令 $\boldsymbol{J}(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,则 $\boldsymbol{J}$ 是实数域上的线性空间 $C[a,b]$ 到 $\mathbf{R}$ 的线性映射。由此看出,线性映射好比是在线性空间这个广阔天地里驰骋的一匹匹骏马。

从以上看到,只要我们把线性空间的结构搞清楚了,把线性映射的性质研究清楚了,那么我们就可以解决数学中和众多领域中的线性问题。为了解决度量问题,我们讲述了具有度量的线性空间,以及与度量有关的变换,它们都是线性变换。

数域 K 上所有一元多项式组成的集合 $K[x]$ 有加法和乘法运算,加法满足 4 条法则,乘法也满足 4 条法则。$K[x]$,整数集 $\mathbf{Z}$,偶数集 $2\mathbf{Z}$,数域 K 上所有 n 级矩阵组成的集合 $M_n(K)$,它们都有加法和乘法运算,并且加法满足 4 条法则,乘法满足结合律,左、右分配律。由此抽象出环的概念。$K[x]$ 是一个环,且有单位元,还满足乘法交换律。$K[x]$ 对于加法和数量乘法成为数域 K 上的一个线性空间。$K[x]$ 具有通用性质,这使得我们可以用 $K[x]$ 的通用性质来研究数域 K 上 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathbf{A}$ 的最简单形式的矩阵表示。这样我们把研究一元多项式环的结构及其态射(即一元多项式环的通用性质)纳入到"高等代数"课程的主线——研究线性空间和线性映射中。

从星期这一司空见惯的现象,我们引出了模 7 剩余类环 $\mathbf{Z}_7$ 的概念。$\mathbf{Z}_7$ 中每个非零元都是可逆元,且 $\mathbf{Z}_7$ 是有单位元的交换环。由此抽象出域的概念。从这以后,我们讲述的线性空间拓宽成域 F 上的线性空间,线性映射拓宽成域 F 上线性空间 V 到 V' 的线性映射。

n 维欧几里得空间 V 上所有正交变换组成的集合具有这些性质:正交变换的乘积还是正交变换,恒等变换是正交变换,正交变换是可逆的并且它的逆变换还是正交变换。由此抽象出群的概念,本书中介绍了域 F 上的 n 级一般线性群 $GL(n,F)$,n 级特殊线性群 $SL(n,F)$;实数域上的 n 级正交群 $O(n)$,n 级特殊正交群 $SO(n)$;n 级酉群 $U(n)$,n 级特殊酉群 $SU(n)$等。

从上面所述,我们把环、域、群的基本概念也纳入到了"高等代数"课程的主线——研究线性空间和线性映射中。

这次修订通过增加一些定理、例题或习题,进一步强化了主线。

下册的 8.1 节我们增加了一个例题:例 46,设递推方程 $u(n)=au(n-1)+bu(n-2)$,$n\geqslant 2$,其中 $a\neq 0,b\neq 0$,它们都是复数,一元多项式 $f(x)=x^2-ax-b$ 称为这个递推方程的特征多项式。我们运用线性空间的基的知识证明了:若 $f(x)$ 有两个不同的复根 α_1 和 α_2,则上述递推方程的每一个解 $u(n)$ 可以唯一地表示成 $u(n)=C_1\alpha_1^n+C_2\alpha_2^n$,其中 C_1,C_2 是常

数；若 $f(x)$ 有二重根 α，则上述递推方程的每一个解 $u(n)$ 可以唯一地表示成 $u(n)=C_1\alpha^n+C_2n\alpha^n$，其中 C_1,C_2 是常数。

下册的 8.3 节增加了例 19，设 $A\in M_n(K)$，令 $AM_n(K)=\{AB\mid B\in M_n(K)\}$。我们运用线性空间同构的知识证明了：$\dim[AM_n(K)]=\mathrm{rank}(A)\cdot n$。然后在 9.3 节把原来的例 17、例 18、例 19 换成了新的例 17、例 18、例 19。在例 17 中，我们运用了 8.3 节的例 19 和线性空间的子空间的直和的知识证明了：设 $A=A_1+A_2+\cdots+A_s$，其中 $A_i\in M_n(K)$，$i=1,2,\cdots,s$。如果 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A_1)+\mathrm{rank}(A_2)+\cdots+\mathrm{rank}(A_s)$，那么 $AM_n(K)=A_1M_n(K)\oplus A_2M_n(K)\oplus\cdots\oplus A_sM_n(K)$。接着在例 18 中，证明了：设 $A_i\in M_n(K)$，$i=1,2,\cdots,s$，令 $A=A_1+A_2+\cdots+A_s$，则 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 是两两正交的幂等矩阵，当且仅当 A 是幂等矩阵，且 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A_1)+\mathrm{rank}(A_2)+\cdots+\mathrm{rank}(A_s)$。其中充分性的证明用到了例 17 的结论，以及子空间的直和的性质；必要性的证明用到了幂等矩阵的秩等于它的迹。在例 19 中，利用数域 K 上的 n 维线性空间 V 上的线性变换代数 $\mathrm{Hom}(V,V)$ 与数域 K 上 n 级矩阵代数 $M_n(K)$ 的同构，从例 18 立即得到：设 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s$ 是 V 上的线性变换，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\cdots+\boldsymbol{A}_s$，则 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s$ 是两两正交的幂等变换当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 是幂等变换，并且 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{i=1}^{s}\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}_i)$。

在 8.4 节商空间的命题 1 之后，我们写了一段话："命题 1 表明，如果知道了商空间 V/W 的一个基 $\widetilde{S}=\{\alpha_i+W\mid i\in I\}$，其中 I 是指标集，令 U 是 V 中由子集 $S=\{\alpha_i\mid i\in I\}$ 生成的子空间，那么 S 是 U 的一个基，并且有 $V=W\oplus U$。这样 V 就有了一个直和分解式，这是可以利用商空间研究线性空间结构的道理之三。"这个结论在研究幂零变换的最简单形式的矩阵表示中起了重要作用。

在 10.1 节第五部分的最后，我们增加了特征为 2 的域 F 上 n 维线性空间 V 上的对称双线性函数 $f(\neq0)$ 的度量矩阵的最简单形式的内容，从而把本节例 11 的结论推广到特征为 2 的域 F 上仍然成立，并且运用到 10.6 节的正交空间中。

在 10.2 节第三部分的最后，我们增加了无限维实内积空间 V 有标准正交基(即极大正交规范集)的充分必要条件的内容。

2. 力求使高等代数的概念有直观的几何例子

域 F 上的线性空间 V 上的对称双线性函数有几何空间中向量的内积这个具体例子，那么斜对称双线性函数有没有直观的几何例子呢？我们在 10.1 节的定理 4 之前增加了如下一个例子：在平面上取一个右手直角坐标系 $[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$，设 σ 是绕定点 O 转角为 $-\frac{\pi}{2}$ 的旋转。令 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\cdot\sigma(\boldsymbol{\beta})$，则易验证 f 是平面上的一个斜对称双线性函数。这个例子还可以帮助理解 10.4 节的例 37 的结论。

3. 加强了高等代数的应用天地的内容

我们对于第 10 章最后的应用天地——酉空间在量子力学中的应用,增加了以下内容:为什么粒子的动量、动能、角动量的概率波的波幅都可以由粒子的位置概率波的波幅 $\psi(\boldsymbol{r})$ 决定? 为什么粒子在处于波函数 $\psi(\boldsymbol{r})$ 描述的状态下,测量其动量 $\boldsymbol{p}$,动能 D,角动量 $\boldsymbol{L}$ 所得结果的平均值(即数学期望)分别为

$$\bar{\boldsymbol{p}}=(\psi,\hat{\boldsymbol{p}}\psi),\bar{D}=(\psi,\hat{D}\psi),\bar{\boldsymbol{L}}=(\psi,\hat{\boldsymbol{L}}\psi)$$

其中 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 是动量算符,$\hat{\boldsymbol{p}}=-\mathrm{i}\hbar\nabla$;$\hat{D}$ 是动能算符,$\hat{D}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$;$\hat{\boldsymbol{L}}$ 是角动量算符,$\hat{\boldsymbol{L}}=\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{p}}$,这里$\hbar=\frac{h}{2\pi}$,$h$ 是普适常数,∇是 Nabla 算子,Δ 是 Laplace 算子。为什么粒子处于波函数 $\psi(\boldsymbol{r})$ 描述的状态下,测量力学量 A 所得结果的方差$\overline{\Delta A^2}$为$\overline{\Delta A^2}=(\psi,(\hat{A}-\bar{A}\boldsymbol{I})^2\psi)$? 其中 $\hat{A}$ 是力学量 A 相应的算符。我们把这些结论的道理讲清楚了,其中需要用到高等代数的酉空间及其上的 Hermite 变换的知识,还需要用到数学分析的 Fourier 变换和 Fourier 逆变换,δ-函数,Nabla 算子∇,以及 Laplace 算子 Δ 等知识。由此看到,为了解决自然科学和工程中问题,需要把高等代数和数学分析学扎实,还需要把数学的其他分支的知识学好。

这次修订,增加了 3 道例题,59 道习题,从而总计有 1239 道题。

这次修订,我们删去了定理、命题、推论的证明。这些可以在作者写的《高等代数(上册、下册)(第三版)》(高等教育出版社,2015 年)中找到,或者在作者写的《高等代数(上册、下册)——大学高等代数课程创新教材》(清华大学出版社,2010 年)中找到。

感谢本套书的责任编辑苏明芳,她为本书的编辑出版付出了辛勤的劳动。

真诚欢迎广大读者对本套书提出宝贵意见。

丘维声
北京大学数学科学学院
2016 年 7 月

第一版前言

高等代数是大学数学科学学院(或数学系,应用数学系)最主要的基础课程之一。"高等代数"课程的教学内容包含三个方面:线性代数,多项式理论,群、环、域的基本概念。线性代数占的比重最大,它研究线性空间及其线性映射(包括具有度量的线性空间及与度量有关的线性变换)。多项式理论是研究一元和多元多项式环。群、环、域的基本概念是紧密结合多项式理论和线性变换(包括与度量有关的线性变换)理论,水到渠成地介绍一元(多元)多项式环、矩阵环、线性变换环、模 p 剩余类域、正交群、酉群和辛群。

本套书(分上、下册)以研究线性空间和多项式环的结构及其态射(线性映射,多项式环的通用性质)为主线。自从1832年伽罗瓦(Galois)利用一元高次方程的根的置换群给出了方程有求根公式的充分必要条件之后,代数学的研究对象发生了根本性的转变。研究各种代数系统的结构及其态射(即保持运算的映射)成为现代代数学研究的中心问题。20世纪,代数学研究结构及其态射的观点已经渗透到现代数学的各个分支中。因此,在高等代数课程的教学中贯穿研究线性空间和多项式环的结构及其态射这条主线,就是把握住了代数学的精髓。

本套书的内容结构遵循高等代数知识的内在规律和学生的认知规律进行安排。

线性代数是研究客观世界中的线性问题,即研究数量关系中的均匀变化的关系,以及空间形式中的直线、平面和平面的推广。这些都与线性方程组密切相关,于是线性方程组成为线性代数研究的第一个对象。为了用统一的方法求解线性方程组,自然地引出了矩阵的概念和矩阵的初等行变换。为了从线性方程组的系数和常数项判断方程组有无解、有多少解,对于方程个数与未知量个数相等的线性方程组,引进了行列式的概念,并且通过研究行列式的性质得出了克拉默(Cramer)法则(n 个方程的 n 元线性方程组有唯一解的充分必要条件是它的系数矩阵的行列式不等于0)。为了彻底解决从线性方程组的系数和常数项判定方程组有无解以及研究解集的结构问题,自然而然地引出了 n 维向量空间 K^n 的概念,这是要研究维数大于4的向量空间的最自然的背景和动力。为了研究上述问题,就需要研究 K^n 中由向量组生成的子空间的结构,自然引出了线性相关的向量组和线性无关的向量组,以及子空间的基和维数的概念。为了研究子空间的维数,自然引出了向量组的秩的概

念，进而引出了矩阵的秩的概念，得到 n 元线性方程组有解的充分必要条件是它的系数矩阵与增广矩阵有相同的秩，并且得到了 n 元齐次线性方程组的解集 W 形成的子空间(称为解空间)的维数公式：$\dim W = n - \mathrm{rank}(A)$，其中 A 是系数矩阵。研究线性方程组和 n 维向量空间 K^n 及其子空间的结构，就是本套书上册的第一部分的内容，它贯穿了研究 n 维向量空间 K^n 及其子空间的结构这条主线。线性方程组是数学中最基础、最有用的知识，n 维向量空间 K^n 是 n 维线性空间的一个具体模型，n 元齐次线性方程组的解空间 W 的维数公式本质上是线性映射的核与值域的维数公式，因此，把线性方程组和 n 维向量空间 K^n 作为"高等代数"课程的第一部分内容，既是高等代数知识的内在规律的体现，又符合学生的认知规律。

在研究线性方程组的统一解法时引出的矩阵是一个新的数学对象，自然要研究矩阵可以做哪些运算。矩阵的加法和数量乘法可以从实际生活中很自然地抽象出来。矩阵的乘法可以从平面上绕定点 O 的两个旋转的合成(乘积)仍是一个旋转这一几何事实出发，自然地引出矩阵的乘法的定义。由于矩阵的乘法很独特，因此，需要研究矩阵乘法满足哪些运算法则；研究与矩阵乘法密切相关的内容，包括矩阵乘积的秩与行列式，可逆矩阵，分块矩阵的乘法，正交矩阵和欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 等。研究矩阵的运算及与乘法相关的内容，就是本套书上册的第二部分内容。由于有限维线性空间之间的线性映射可以用矩阵来表示，因此，研究矩阵的运算就为研究线性映射打下了基础。本套书加强了矩阵分块的训练，这是因为它在生物统计等领域有重要应用。

建立集合 S 上的一个等价关系，所有等价类组成的集合便给出了集合 S 的一个划分，这一现代代数学的观点到处有用。数域 K 上所有 $s\times n$ 矩阵组成的集合 $M_{s\times n}(K)$ 上的相抵关系就是一个等价关系。所有等价类(称为相抵类)组成的集合给出了 $M_{s\times n}(K)$ 的一个划分，两个 $s\times n$ 矩阵属于同一个相抵类当且仅当它们的秩相等。因此，矩阵的秩是相抵关系下的完全不变量。集合 $M_n(K)$ 上的相似关系是一个等价关系，所有等价类(称为相似类)组成的集合给出了 $M_n(K)$ 的一个划分。两个 n 级矩阵属于同一个相似类的必要条件是：它们有相同的行列式、秩、迹，有相同的特征多项式，有相同的特征值(包括重数相同)。但是这些都不是充分条件，即，n 级矩阵的行列式、秩、迹、特征多项式、特征值都是相似关系下的不变量，但是它们没有构成一组完全不变量。在矩阵 A 的相似类里寻找具有最简单形式的矩阵(称它为 A 的相似标准形)是线性代数的一个重要研究课题，其中一个特殊情形是 A 的相似标准形为对角矩阵的情形，这时称 A 可对角化。n 级矩阵 A 可对角化的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量；实对称矩阵一定可对角化。与实对称矩阵密切联系的是实数域上的二次型。一般地，数域 K 上的 n 元二次型可以利用它的矩阵(对称矩阵) A 表示成 $\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X}$。研究二次型 $\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X}$ 经过非退化线性替换 $\boldsymbol{X}=C\boldsymbol{Y}$，化成一个标准形(即平方和形式)，等价于研究对称矩阵 A 合同于一个对角矩阵。合同关系是 $M_n(K)$ 上的

又一个等价关系，其等价类称为合同类。两个 n 级实对称矩阵属于同一个合同类当且仅当它们的秩相等，且正惯性指数也相等，因此，实对称矩阵的秩和正惯性指数是合同关系下的一组完全不变量。秩和正惯性指数都等于 n 的合同类是最重要的一个合同类，这个合同类由所有正定矩阵组成。研究矩阵的相抵、相似、合同及与它们有关的矩阵的特征值和特征向量、二次型等就是本套书上册的第三部分内容。矩阵的相抵关系在解决有关矩阵的秩的问题中起着重要作用，而矩阵的秩本质上是相应的线性映射的值域的维数。研究矩阵的相似关系的强大动力是：线性空间 V 上的同一个线性变换在 V 的不同基下的矩阵是相似的。研究矩阵的相似标准形问题也就是研究在 V 中寻找一个合适的基，使得线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在此基下的矩阵具有最简单的形式。研究对称矩阵的合同标准形与研究二次型的化简密切相关，而二次型与线性空间 V 上的双线性函数有密切的联系。因此，研究矩阵的相抵、相似和合同为研究线性映射、线性变换和双线性函数打下了基础。

一元高次多项式的求根曾经是代数学研究的中心问题，但是自从伽罗瓦证明了一般的五次和五次以上的方程没有求根公式以后，代数学发生了革命性的变革。研究各种代数系统的结构及其态射成了代数学研究的中心问题。因此“高等代数”课程中的多项式理论应当以研究一元(多元)多项式环的结构及其态射为主线。从带余除法入手，引出最大公因式和互素的概念，以及不可约多项式的概念，进而得出唯一因式分解定理。这就解决了一元多项式环 $K[x]$ 的结构问题：$K[x]$ 中每一个次数大于 0 的多项式都能唯一地分解成数域 K 上有限多个不可约多项式的乘积。下一步的任务就是分别去研究复数域、实数域、有理数域上的不可约多项式有哪些。复数域上和实数域上的不可约多项式可以完全决定；而有理数域上有任意次数的不可约多项式，从而要研究有理数域上不可约多项式的判定。数域 K 上所有一元多项式组成的集合 $K[x]$、整数集 $\mathbf{Z}$ 以及数域 K 上所有 n 级矩阵组成的集合 $M_n(K)$ 都有加法和乘法两种运算，并且加法满足交换律、结合律、有零元，每个元素有负元，乘法满足结合律、分配律，由此水到渠成地抽象出环的概念。我们在“高等代数”课程中只介绍一元(多元)多项式环、整数环 $\mathbf{Z}$、全矩阵环 $M_n(K)$、模 m 剩余类环、线性变换环以及给出子环的概念、零因子的概念，而不对抽象的一般环展开讨论。在介绍了模 m 剩余类环之后，特别地，对于素数 p，模 p 剩余类环 $\mathbf{Z}_p$ 中每个非零元都可逆，从而自然而然地引出了域的概念。我们在“高等代数”课程中只介绍模 p 剩余类域，以及域的特征的概念，不对一般的域展开讨论。在初中数学里讲了完全平方公式

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

利用完全平方公式(当 $a=1$)可以简便地计算

$$101^2 = (100+1)^2 = 100^2 + 2\times 1\times 100 + 1^2 = 10201.$$

这实际上是在 $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ 中，x 用 100 代入，而左右两边仍保持相等。设 A 是数

域 K 上的 n 级矩阵,I 是单位矩阵,利用矩阵乘法的分配律,得

$$\begin{aligned}(A+aI)^2&=(A+aI)(A+aI)=A^2+A(aI)+(aI)A+(aI)(aI)\\&=A^2+2aA+a^2I.\end{aligned}$$

从这发现,在完全平方公式中,x 可以用矩阵 A 代入(此时 a 要换或 aI,a^2 要换成 a^2I),左右两边保持相等。由此猜测:在数域 K 上的一元多项式环 $K[x]$ 中,有关加法和乘法的等式,在 x 用矩阵 A 代入后,左右两边保持相等。由此进一步抽象并且经过论证得出一元多项式环 $K[x]$ 的通用性质:设 R 是有单位元 $1'$ 的交换环,它的一个子环 R_1 有单位元 $1'$,且 K 到 R_1 有一个双射 τ 保持加法和乘法运算,则任给 $t\in R$,在 $K[x]$ 中有关加法与乘法的等式中,把 x 用 t 代入后,左右两边保持相等(即成为环 R 中的等式)。一元多项式环的通用性质本质上就是:任给 $t\in R$,从 $K[x]$ 到 R 的一个映射 σ_t:$\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i\longmapsto\sum\limits_{i=0}^{n}\tau(a_i)t^i$ 是一个态射(保持加法和乘法运算的映射),称 σ_t 是 x 用 t 代入。一元多项式环的通用性质是非常有用的,它使得在 $K[x]$ 的有关加法与乘法的等式中,x 可以用矩阵 A 代入,可以用 $K[x]$ 中的任一多项式代入,也可以用线性变换 $\boldsymbol{A}$ 代入,而左右两边仍然保持相等。这在寻找线性空间 V 的一个基,使得 V 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在此基下的矩阵具有最简单的形式中,发挥着至关重要的作用。正因为如此,我们把一元(多元)多项式环放在抽象的线性空间及其线性映射之前,作为本套书下册的第一部分,这体现了高等代数知识的内在规律。讲述一元多项式环的通用性质并且运用到全书各个相关问题中,这是本套书的一个亮点。在多元多项式环中,我们着重讲对称多项式组成的子环的结构(即对称多项式基本定理)及其应用(包括数域 K 上一元多项式的判别式,两个一元多项式的结式)。

有了几何空间,数域 K 上 n 维向量空间 K^n,以及 $M_{s\times n}(K)$ 和 $K[x]$ 有加法和数乘运算且满足 8 条运算法则,自然而然可抽象出域 F 上的线性空间的概念。研究线性空间的结构是本套书下册的第二部分内容。研究线性空间的结构有四条途径:(1)从元素的角度,为了使线性空间 V 的每个向量能够用有限多个向量唯一地线性表出,引出基和维数的概念;(2)从子集的角度,引进子空间的概念,利用 V 的子空间的直和来研究线性空间 V 的结构;(3)从商集的角度,为了简化对线性空间 V 的结构的研究,利用 V 的一个子空间 W 建立一个等价关系,在等价类组成的集合中规定加法和纯量乘法运算,形成商空间 V/W;(4)从线性空间之间的关系的角度,为了研究域 F 上众多的线性空间中哪些有相同的结构,引出了线性空间同构的概念,研究域 F 上两个有限维线性空间同构的充分必要条件。把抽象的线性空间放在大学一年级下学期讲授,就可以深入地研究线性空间的结构,而不至于停留在线性空间的定义,子空间及其交与和、直和的概念,商空间的概念,线性空间同构的概念上。这符合学生的认知规律,使得所有同学对于线性空间的理论可以学得更深刻,掌握得更好。

我们不只是讲数域上的线性空间，而且讲任意域上的线性空间，因为当今信息时代需要二元域上的线性空间理论；我们不只是讲有限维线性空间，而是对线性空间许多地方都不加有限维的限制，因为许多概念和结论不只是对有限维线性空间成立，对无限维线性空间也成立。函数论中的函数空间，量子力学中的状态空间往往都是无限维线性空间。

线性空间为研究客观世界的线性问题构建了一个广阔的舞台，研究线性空间之间的线性映射(即保持加法和纯量乘法的映射)就好比是在这舞台上驰骋的骏马。研究线性映射(包括线性变换和线性函数)是本套书下册的第三部分内容。从以下几方面来研究：(1)研究线性映射的运算。线性映射作为映射，自然可以做乘法，且乘积仍是线性映射。由于线性空间有加法和纯量乘法运算，因此可以定义线性映射的加法和纯量乘法。(2)研究线性映射的整体结构。设 V 和 V' 都是域 F 上的线性空间，则从 V 到 V' 的所有线性映射组成的集合，记作 $\mathrm{Hom}(V,V')$，是域 F 上的一个线性空间。V 上的所有线性变换(即 V 到自身的线性映射)组成的集合 $\mathrm{Hom}(V,V)$ 既是域 F 上的线性空间，又是一个有单位元的环，从而它是域 F 上的一个代数。(3)研究线性映射的核和象，这是用线性映射来研究线性空间的结构的一条重要途径：从 V 到 V' 的线性映射 $\boldsymbol{A}$ 的核 $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}$ 是 V 的一个子空间，$\boldsymbol{A}$ 的象 $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}$ 是 V' 的一个子空间。若 $\dim V=n$，则 $\dim \mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}+\dim \mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}=n$。(4)研究线性映射和线性变换的矩阵表示。设 V 和 V' 的维数分别为 n、s，在 V 和 V' 中分别取一个基，V 到 V' 的线性映射 $\boldsymbol{A}$ 有矩阵表示。V 上的线性变换也有矩阵表示。V 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在 V 的不同基下的矩阵是相似的。从而可以把 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵 A 的行列式、迹、特征多项式分别叫做线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的行列式、迹、特征多项式。把 V 到 V' 的线性映射 $\boldsymbol{A}$ 对应于它的矩阵 A，这是 $\mathrm{Hom}(V,V')$ 到 $M_{s\times n}(F)$ 的一个同构映射，从而 $\dim \mathrm{Hom}(V,V')=ns=(\dim V)(\dim V')$。把 V 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 对应于它在一个基下的矩阵 A，是 $\mathrm{Hom}(V,V)$ 到 $M_n(F)$ 的线性同构，也是环同构。这些使得研究线性映射和线性变换的问题与相应的矩阵问题可以互相转化。(5)研究线性变换的最简单形式的矩阵表示。即在 n 维线性空间 V 上寻找一个基，使得 V 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在这个基下的矩阵具有最简单的形式。为此先要引出线性变换的特征值和特征向量的概念。从而得出：在 V 中存在一个基，使得线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在此基下的矩阵为对角矩阵(此时称 $\boldsymbol{A}$ 可对角化)当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量。于是 $\boldsymbol{A}$ 可对角化当且仅当 V 可以分解成 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间的直和。对于不可对角化的线性变换，解决这个问题的思路是什么？从 α 属于 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征子空间 V_{λ_i} 可推出 $\boldsymbol{A}\alpha=\lambda_i\alpha\in V_{\lambda_i}$，由此受到启发，引出线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间的概念，于是从 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的上述充分必要条件想到去研究 V 分解成 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间的直和。如何寻找 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间呢？由于对于任意 $f(x)\in F[x]$，都有 $f(\boldsymbol{A})$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换，因此 $\mathrm{Ker}\,f(\boldsymbol{A})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间。从而想到去找一些多项式 $f_1(x)$，$\cdots$，$f_s(x)\in F[x]$，使得 $V=\mathrm{Ker}\,f_1(\boldsymbol{A})\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}\,f_s(\boldsymbol{A})$。设 $f(x)=f_1(x)\cdots f_s(x)$，如果

$f_1(x),\cdots,f_s(x)$两两互素,那么

$$\operatorname{Ker} f(\boldsymbol{A}) = \operatorname{Ker} f_1(\boldsymbol{A}) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} f_s(\boldsymbol{A})$$

由于 $\operatorname{Ker} \boldsymbol{0}=V$,因此若能找到一个多项式 $f(x)$,使得 $f(\boldsymbol{A})=0$,那么只要把 $f(x)$分解成不同的不可约多项式方幂的乘积,就可以把 V 分解成 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间的直和。由此引出 $\boldsymbol{A}$ 的零化多项式的概念。由 Hamilton-Cayley 定理,$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$是 $\boldsymbol{A}$ 的一个零化多项式。在 $\boldsymbol{A}$ 的所有非零的零化多项式中,次数最低的首项系数为 1 的多项式称为 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式。$\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$与 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$在 F(以及在域 $E\supseteq F$)中有相同的根(重数可以不同)。线性变换的最小多项式在研究线性变换的最简单形式的矩阵表示时起着十分重要的作用。V 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 可对角化当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$在 $F[\lambda]$中能分解成不同的一次因式的乘积。若 $m(\lambda)$在 $F[\lambda]$中能分解成

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{l_s},$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是域 F 中两两不等的元素,则

$$V = \operatorname{Ker}(\boldsymbol{A} - \lambda_1\boldsymbol{I})^{l_1} \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(\boldsymbol{A} - \lambda_s\boldsymbol{I})^{l_s}$$

记 $W_j=\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I})^{l_j}$,$j=1,2,\cdots,s$。则 $W_j(j=1,\cdots,s)$都是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间。在 $W_1,\cdots,W_s$ 中分别取一个基,把它们合起来就是 V 的一个基,$\boldsymbol{A}$ 在这个基下的矩阵是分块对角矩阵 $A=\operatorname{diag}\{A_1,A_2,\cdots,A_s\}$,其中 A_j 是 $\boldsymbol{A}$ 在 W_j 上的限制 $\boldsymbol{A}|W_j$ 在 W_j 的上述基下的矩阵。为了使 A 的形式最简单,就应当使每个子矩阵 A_j 的形式最简单。$\boldsymbol{A}|W_j$ 的最小多项式 $m_j(\lambda)=(\lambda-\lambda_j)^{l_j}$,令 $\boldsymbol{B}_j=\boldsymbol{A}|W_j-\lambda_j(\boldsymbol{I}|W_j)$,则 $\boldsymbol{B}_j$ 是 W_j 上的幂零变换,$\boldsymbol{B}_j$ 在 W_j 的上述基下的矩阵 $B_j=A_j-\lambda_jI$。于是为了使 A_j 的形式最简单,就应当使 B_j 的形式最简单。这样把问题归结为研究幂零变换的最简单形式的矩阵表示。我们证明了幂零变换的最简单形式的矩阵是 Jordan 形矩阵,从而得出 $\boldsymbol{A}$ 的最简单形式的矩阵是 Jordan 形矩阵,称它为 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形。如果 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$在 $F[\lambda]$中不能分解成一次因式方幂的乘积,我们证明了在 V 中存在一个基,使得 $\boldsymbol{A}$ 在此基下的矩阵是由有理块组成的分块对角矩阵,称它为 $\boldsymbol{A}$ 的有理标准形(见本套书下册第 9 章 9.9 节)。综上所述,我们用线性变换的最小多项式解决了线性变换的最简单形式的矩阵表示问题,这是本套书中的又一个亮点。(6)研究 V 上的线性函数(它可以看成 V 到 F 的线性映射),以及 V 的对偶空间 V^*(它是 V 上所有线性函数组成的线性空间)和 V 的双重对偶空间 V^{**}。这既对研究 V 上的双线性函数有用,又在研究线性空间的张量积中发挥着重要作用。

线性空间和线性映射都只涉及加法和纯量乘法运算,需要进一步引进度量概念,使它们的作用更大。本套书下册的第四部分内容就是研究具有度量的线性空间及其与度量有关的线性变换。(1)为了在线性空间中引进度量概念,首先研究线性空间上的双线性函数,特别是对称双线性函数和斜对称双线性函数。对称双线性函数与二次型有密切关系。(2)

在实数域上的线性空间 V 中引进度量概念的办法是：在 V 上定义一个正定的对称双线性函数，称为内积，这时 V 称为一个实内积空间。有限维的实内积空间称为欧几里得空间。在实内积空间中可定义向量的长度，两个非零向量的夹角，正交，距离等度量概念；研究欧几里得空间的结构应当利用标准正交基，它可以使内积的计算简洁，它可以用内积来计算向量的坐标。实内积空间 V 到 V' 如果有一个线性同构，且保持内积，那么称它为一个保距同构，简称为同构。两个欧几里得空间同构的充分必要条件是它们的维数相同。研究实内积空间 V 的结构的又一条途径是：利用它的有限维子空间 U，有 $V=U\oplus U^{\perp}$。这时平行于 $U^{\perp}$ 在 U 上的投影称为 V 在 U 上的正交投影。实内积空间 V 到自身的满射 $\boldsymbol{A}$ 如果保持内积不变，那么称 $\boldsymbol{A}$ 是 V 上的一个正交变换。正交变换一定是线性变换，且是可逆的。n 维欧几里得空间 V 上的变换 $\boldsymbol{A}$ 是正交变换当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 在 V 的标准正交基下的矩阵是正交矩阵。实内积空间 V 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 如果满足：$\forall\,\alpha,\beta\in V$，有 $(\boldsymbol{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\boldsymbol{A}\beta)$，那么称 $\boldsymbol{A}$ 是 V 上的一个对称变换。n 维欧几里得空间 V 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 是对称变换当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 在 V 的标准正交基下的矩阵是对称矩阵。(3)在复数域上的线性空间 V 中引进度量概念的方法与实数域不同，这是因为复线性空间 V 上的双线性函数不可能满足正定性。复线性空间 V 上的内积的定义为：V 上的一个二元函数如果满足 Hermite 性、对第一个变量线性、正定性，那么这个二元函数称为 V 上的一个内积，此时称 V 是酉空间。在酉空间中利用内积可定义向量的长度，两个非零向量的夹角，正交，距离等度量概念。研究有限维酉空间的结构的第一条途径是利用标准正交基。研究酉空间的结构的第二条途径是：利用有限维子空间 U，有 $V=U\oplus U^{\perp}$。第三条途径是：保距同构的两个酉空间有相同的结构。酉空间 V 到自身的满射 $\boldsymbol{A}$ 如果保持内积不变，那么称 $\boldsymbol{A}$ 是 V 上的一个酉变换。酉变换一定是可逆线性变换。酉空间 V 上的一个变换 $\boldsymbol{A}$ 如果满足：$(\boldsymbol{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\boldsymbol{A}\beta)$，$\forall\,\alpha,\beta\in V$，那么 $\boldsymbol{A}$ 称为 V 上的一个 Hermite 变换。Hermite 变换一定是线性变换。(4)设 $\boldsymbol{A}$ 是复(实)内积空间 V 上的一个线性变换，如果存在 V 上的一个线性变换，记作 $\boldsymbol{A}^*$，使得 $\forall\alpha,\beta\in V$，有 $(\boldsymbol{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\boldsymbol{A}^*\beta)$，那么称 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个伴随变换。如果 $\boldsymbol{A}$ 有伴随变换 $\boldsymbol{A}^*$，且 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$，那么称 A 是正规变换。有限维酉空间 V 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 是正规变换当且仅当 V 中存在一个标准正交基，使得 $\boldsymbol{A}$ 在此基下的矩阵是对角矩阵。(5)对于任意一个域 F 上的线性空间 V，能不能引进度量概念？关键是要有内积的概念。由于在一般的域中，没有"正"元素的概念，因此不可能谈论正定性，于是长度、角度、距离的概念也就没有了。但是正交这个概念还是可以推广到任意域上线性空间中。内积应当是 V 上的一个二元函数 f，为了能充分利用线性空间有加法和纯量乘法的特性，f 应当是 V 上的双线性函数。由于两个向量 α 与 β 正交应当是相互的，因此 f 应当是对称或斜对称的。从而 V 上可以指定一个对称双线性函数 f 作为内积，此时(V,f)称为**正交空间**。V 上也可以指定一个斜对称双

线性函数 g 作为内积,此时(V,g)称为**辛空间**。即使在实数域上的线性空间中,在某些问题里,也不用正定的对称双线性函数作为内积,而指定一个非退化的对称双线性函数作为内积。例如,在爱因斯坦的狭义相对论中,从光速不变原理导出了时间-空间的新的坐标变换公式,称它为**洛伦兹**(Lorentz)**变换**。爱因斯坦的**狭义相对性原理**指出:"所有的基本物理规律都应在任一惯性系中具有相同的形式。"一个点 P 在给定的惯性系 $Oxyz$ 中的时间-空间坐标$(t,x,y,z)'$是 4 维实线性空间 $\mathbf{R}^4$ 的一个向量。类比欧几里得空间中,$(\alpha-\beta,\alpha-\beta)$是 α 与 β 的距离的平方,如果在 $\mathbf{R}^4$ 中指定一个非退化的对称双线性函数 f,那么把 $f(\alpha-\beta,\alpha-\beta)$称为 α 与 β 的**时-空间隔的平方**。根据狭义相对性原理,洛伦兹变换 σ 保持任意两个向量的时-空间隔的平方不变。若令

$$f(\alpha,\beta)=-c^2t_1t_2+x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

其中 c 是光速,$\alpha=(t_1,x_1,y_1,z_1)'$,$\beta=(t_2,x_2,y_2,z_2)$。则可以证明 $f(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha))=f(\alpha,\alpha)$。从而

$$f(\sigma(\alpha)-\sigma(\beta),\sigma(\alpha)-\sigma(\beta))=f(\alpha-\beta,\alpha-\beta)$$

因此在 $\mathbf{R}^4$ 中把上述非退化的对称双线性函数 f 作为内积,此时称$(\mathbf{R}^4,f)$是一个**闵柯夫斯基**(Minkowski)**空间**。假如在 $\mathbf{R}^4$ 中指定一个正定的对称双线性函数作为内积,那么洛伦兹变换不可能保持任意两个向量的距离的平方不变。因此在 $\mathbf{R}^4$ 中应当指定上述非退化的对称双线性函数 f 作为内积。闵柯夫斯基空间就是一个正交空间。这是需要讨论正交空间的物理背景。本套书下册的第 10 章 10.6 节研究了正交空间的结构及其上保持内积不变的线性变换(称为正交变换)的性质;研究了辛空间的结构及其上保持内积不变的线性变换(称为辛变换)的性质。(6)从 n 维欧几里得空间 V 上所有正交变换组成的集合 $\mathrm{O}(V)$,n 维酉空间 V 上所有酉变换组成的集合 $\mathrm{U}(V)$,域 F 上 n 维正则的正交空间(V,f)上所有正交变换组成的集合 $\mathrm{O}(V,f)$,特征不为 2 的域 F 上 $2r$ 维正则辛空间(V,f)上所有辛变换组成的集合 $\mathrm{Sp}(V,f)$都只有一种运算:乘法,且满足结合律,有单位元,每个元素可逆,由此水到渠成地引出了群的概念,着重介绍了正交群、酉群和辛群,以及图形的对称群。

本套书下册的第五部分内容是研究多重线性代数。其主要工具是线性空间的张量积的概念,这是从小的线性空间构造大的线性空间的一种奇特的方法(线性空间的外直和也是从小的线性空间构造大的线性空间的一种方法,外直和这种方法是很自然的,易于理解的)。利用线性空间的张量积,我们引出了线性空间 V 上的 q 秩反变张量,p 秩协变张量,p 秩协变且 q 秩反变的混合张量(简称(p,q)型张量)的概念;进而研究(p,q)型张量的加法和纯量乘法运算,以及(p,q)型张量与(r,s)型张量的乘法运算,从而引出了线性空间 V 上的张量代数的概念。设 V 是特征为 0 的域 F 上 n 维线性空间。通过研究 $T^q(V)=V\otimes\cdots\otimes V$ 上的交错化变换及其象集(它是 $T^q(V)$中的所有斜对称张量组成的子空间 $\Lambda^q(V)$),规定

$\Lambda^q(V)$与$\Lambda^s(V)$的元素之间的外乘运算，进而引出线性空间 V 上的外代数(或格拉斯曼(Grassmann)代数)的概念。线性空间的张量积，线性空间 V 上的张量代数、外代数在微分几何、现代分析、群表示论和量子力学等领域中有重要应用。

本套书按照数学的思维方式编写，着重培养数学思维能力。我们把数学的思维方式概括成：观察客观世界的现象，抓住其主要特征，抽象出概念或者建立模型；通过直觉判断、归纳推理、类比推理、联想推理和逻辑推理等进行探索，作出猜测；然后经过深入分析、逻辑推理和计算等进行论证，揭示出事物的内在规律，从而使纷繁复杂的现象变得井然有序。按照"观察——抽象——探索——猜测——论证"的思维方式编写教学内容，就使得数学比较容易学，而且读者从中受到的数学思维方式的熏陶，可以使其终身受益。

例如，一元多项式环的通用性质是很深刻的数学内容，而我们从简便计算 101^2 引出：在完全平方公式$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$ 中，x 也可以用 n 级矩阵 A 代入(根据矩阵乘法的分配律直接计算得出)。由此猜测：在数域 K 上的一元多项式环 $K[x]$中，有关加法和乘法的等式，在 x 用矩阵 A 代入后，左右两边保持相等。由此进一步抽象并且经过论证得出一元多项式环的通用性质。这样做就使得一元多项式环的通用性质比较容易理解了。又如，不可约多项式是数域 K 上一元多项式环 $K[x]$的结构中的基本建筑块，复系数不可约多项式只有一次多项式；实系数不可约多项式只有一次多项式和判别式小于零的二次多项式。有理系数不可约多项式有哪些？如何判别？思路是什么呢？我们首先举了一个有理系数多项式的具体例子，把它的各项系数分母的最小公倍数作为分母，提出一个分数，使得括号内的多项式的各项系数都为整数，并且把这些整数的公因数也提出去，这时括号内的多项式的各项系数的最大公因数只有 1 和 -1。这种整系数多项式称为本原多项式。这就自然而然地引出了本原多项式的概念。任何一个有理系数多项式都可以表示成一个本原多项式与一个有理数的乘积，于是一个有理数系数多项式是否不可约与相应的本原多项式是否不可约是一致的。这样我们就找到了思路：去研究本原多项式的不可约的判定。为此需要探索本原多项式的性质。由于本原多项式的各项系数的最大公因数只有 1 和 -1，因此直觉判断两个本原多项式如果能够互相整除(此时称它们相伴)，那么它们只相差一个正负号；然后证明这一猜测是正确的。由于因式分解涉及乘法，因此自然要问：两个本原多项式的乘积是否还是本原多项式？这在直观上不容易看出，可以尝试假设两个本原多项式的乘积不是本原多项式，去进行逻辑推理，得出了矛盾，因此两个本原多项式的乘积仍是本原多项式。这就自然而然地得出了高斯引理。想寻找本原多项式不可约的充分条件，这犹如大海捞针，我们可以反过来思考：如果一个次数大于 0 的本原多项式可约，那么它可以分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，从高斯引理我们可以进一步直觉判断它可以分解成两个次数较低的本原多项式的乘积。经过证明，这个猜测是正确的。由于任何一个素数

都不可能整除本原多项式的各项系数,因此为了从一个本原多项式可约推出进一步的结论,我们考虑这样一种情形:对于一个次数大于 0 的本原多项式 $f(x)$,存在一个素数 p,p 能够整除$f(x)$的首项系数以外的其他各项系数,但是 p 不能整除首项系数,如果 $f(x)$可约,那么它可以分解成两个次数较低的本原多项式的乘积。由此经过逻辑推理,得出:p 的平方能整除$f(x)$的常数项。因此对于这种本原多项式 $f(x)$,如果 p 的平方不能整除常数项,那么$f(x)$不可约。这就自然而然地得出了本原多项式不可约的充分条件:存在一个素数 p 满足上述三个条件。这就是著名的 Eisenstein 判别法。我们经过探索和论证得出 Eisenstein 判别法,不仅使同学们对于素数 p 满足的三个条件印象很深刻,而且让他们知道了 Eisenstein 判别法是怎么来的,受到了数学思维方式的熏陶。

我们不仅在每一节的内容精华部分按照数学思维方式编写,而且在典型例题部分也着力于培养数学思维能力。我们在例题的解法或点评中,讲清楚关键的想法,以及这个想法是怎么想出来的,让学生从中学习怎样科学地思考。我们还编写了一些由内容精华拓展而来的例题,让学生从中学会提出问题。例如,实内积空间 V 上的正交变换一定保持向量的长度不变,保持向量间的距离不变,保持正交性不变等。那么反过来,V 到自身的满射 $\boldsymbol{A}$ 如果保持向量的长度不变,那么 $\boldsymbol{A}$ 是不是正交变换?保持向量间的距离不变呢?保持正交性不变呢?这些在第 10 章 10.4 节典型例题的例 3、例 28、例 27 中进行了讨论。

本套书的内容丰富,全面,深刻。从前面所讲的内容结构安排中可以看到本套书对于“高等代数”课程的基础内容讲得深刻。例如,在讲线性空间时,以研究线性空间的结构为主线,从元素的角度、子集的角度、商集的角度、线性空间之间的关系的角度这四条途径来研究。本套书所讲的高等代数内容丰富、全面。例如,通常的《高等代数》教材只讲有限维线性空间的基、直和等概念和相关结论,而本套书讲了任意线性空间的基的概念;讲了任意线性空间 V 的两个子空间 V_1,V_2(它们可以是无限维的)的和是直和当且仅当 V_1 的一个基与 V_2 的一个基合起来是 V_1+V_2 的一个基;讲了任意线性空间 V(可以是无限维的)的任一子空间 U 都有补空间。又如,设域 F 包含域 E,我们不仅讲了如何把一个域 F(譬如复数域)上的 n 维线性空间 V 看作域 E(譬如实数域)上的 $2n$ 维数线性空间(见第 8 章 8.1 节的例 39),而且讲了如何从域 E(譬如实数域)上的 n 维线性空间 V 构造出域 F(譬如复数域)上的 n 维线性空间(这是 F 与 V 的张量积 $F\otimes V$,见第 11 章 11.2 节的定理 8 和定理 9)。本套书的第 10 章 10.1 节在讲对称双线性函数与二次型的关系时,讲了 Witt 消去定理。本套书的典型例题、习题和补充题包含了丰富、深刻的内容。这样使得读者在学习了每节的内容精华部分,初步掌握了高等代数的概念和理论后,通过解答适当数量的例题和习题,能够深刻理解高等代数的概念,熟练掌握和运用高等代数的基本理论和基本方法,培养出数学思维能力,拓宽知识面,在高等代数理论上和科学思考能力上都达到相当的高度。本