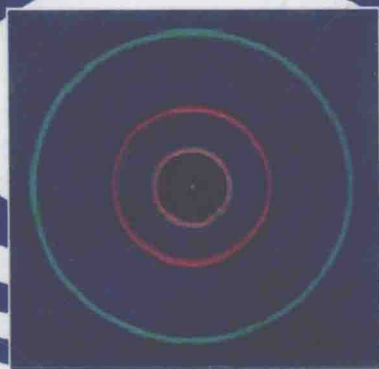


“十二五”国家重点图书出版规划项目

光学与光子学丛书

光学中的逆源问题

顾本源 张 岩 刘 娟 杨国桢 著



科学出版社

“十二五”国家重点图书出版规划项目

光学与光子学丛书

光学中的逆源问题

顾本源 张 岩 刘 娟 杨国桢 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是作者结合多年来关于衍射微光学研究的成果,收集、阅读和消化数百篇中外文献,综合国际学术新观点和研究进展,认真总结并撰写而成的,希望能系统、全面地论述光学中逆源问题及其在衍射光学中的应用成果。本书共分为5章。第1章是物理学中逆源问题概述。第2章叙述光学系统中相位恢复理论算法,重点讨论光学一般么正变换理论。第3章是一般光学变换系统中振幅-相位恢复——杨-顾算法理论,着重讨论一般的非么正变换系统中振幅-相位恢复理论和算法,并对该理论进行深入浅出的分析和系统的叙述。第4章论述衍射光学元件的设计、应用和制作,重点叙述杨-顾算法设计的衍射微光学元件的应用,其中也涉及其他优化算法及其优缺点。第5章介绍新型非线性光学超晶格材料设计,主要叙述模拟退火算法的应用。

本书可供从事光学工程、物理、天文以及各种衍射光学元件的逆向设计、制作及应用研究的相关科技工作者参考,也可作为高等院校相关专业的高年级本科生和研究生的教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

光学中的逆源问题/顾本源等著. —北京:科学出版社,2016

(光学与光子学丛书)

“十二五”国家重点图书出版规划项目

ISBN 978-7-03-049061-2

I. ①光… II. ①顾… III. ①光学-研究 IV. ①O43

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 141963 号

责任编辑:刘凤娟/责任校对:蒋 萍

责任印制:张 伟/封面设计:耕者设计

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016年6月第 一 版 开本:720×1000 B5

2017年1月第二次印刷 印张:8 3/4

字数:176 000

定价:59.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

本丛书名由中国科学院院士母国光先生题写

光学与光子学丛书

《光学与光子学丛书》编委会

主 编 周炳琨

副主编 郭光灿 龚旗煌 朱健强

编 委 (按姓氏拼音排序)

陈家璧	高志山	贺安之	姜会林	李淳飞
廖宁放	刘 旭	刘智深	陆 卫	吕乃光
吕志伟	梅 霆	倪国强	饶瑞中	宋菲君
苏显渝	孙雨南	魏志义	相里斌	徐 雷
宣 丽	杨怀江	杨坤涛	郁道银	袁小聪
张存林	张书练	张卫平	张雨东	赵建林
赵 卫	朱晓农			

序 言

——微纳光学的逆问题和光束空间变换

逆问题广泛地存在于天文学、物理学、光学等各分支学科中,解决逆问题的算法是科学研究的重要工具。近年来,随着衍射微纳光学的发展,迫切需要一本关于逆源问题的指导性书籍,系统地指引衍射微纳光学的设计思路。《光学中的逆源问题》是杨国桢院士和顾本源研究员竭尽毕生精力,根据多年的研究成果编著的一部学术水平高、实用性强的著作。

早在 1981 年,杨国桢和顾本源等就提出光学任意变换系统中振幅-相位恢复一般理论——杨-顾算法,根据应用需求,可灵活地控制光路,以实现多种功能,是 20 世纪 80 年代光学前沿的重要研究成果,目前仍被广泛应用于微纳衍射光学器件的设计和评估。

该书从第一、二类 Fredholm 积分方程入手,系统地讲解相位恢复,介绍衍射光学元件的设计、制作和应用。书中精选的设计实例对学习逆源设计研究的读者具有很好的指引和启发作用,许多设计结果可直接应用于科研实践和工程设计中。本书可供从事光学工程、物理、天文以及各种衍射光学元件的逆向设计、制作及应用领域的相关科技工作者参考,也可作为高等院校相关专业的高年级本科生和研究生的教材或参考书。

近年来,光学系统出现了“微型化”“集成化”的趋势,一些具有特殊功能的微型器件替代了复杂的经典光学系统。在近代光学信息处理中,光信号的空间变换仍然是一个重要的应用领域,其典型的例子为光通信中的光交叉互连 (optical cross connection),其充分利用光束可以交叠、并行高速处理的特点,实现多个输入端口和输出端口、多个波长通道间信号的任意交换传递。在这一系统中,要求光束自由地实施复杂的空间变换,包括折叠 (folding)、转向 (deflection)、指向 (steering)、分束 (beam-splitting)、合束 (beam-combining)、复用 (multiplexing)、解复用 (demultiplexing) 等。经典光学器件的体积大、系统复杂、稳定性差,且不能实现较复杂的功能。根据应用要求设计、制造二元光学器件解决既定的光束空间变换,正是微纳光学典型的逆问题。我们期待基于杨-顾算法等前期的开拓性研究成果,研制新一代微纳光学器件,这可能是实现光学交叉互连的最终途径。

顾本源先生毕业于北京大学物理系理论物理专业,他的理论功底深厚,学术水平很高,科研思想活跃开放,成果颇丰。过去我曾多次参加或主持顾本源先生的研

究生答辩会，当时的情景恍如昨日，而斯人已逝，令人唏嘘不已。本书的出版正是对顾先生最好的纪念。

宋菲君

研究员、博士生导师

美国国际光学工程学会 Fellow(Fellow SPIE)

2016 年清明于北京

目 录

序言

第 1 章 物理学中逆源问题概述	1
引言	1
第一、二类 Fredholm 积分方程解的存在性、唯一性和迭代算法	2
参考文献	4
第 2 章 光学系统中相位恢复理论算法	6
引言	6
2.1 典型的成像系统和有关方程	8
2.2 从双强度测量值恢复相位 ——GS 算法	10
2.3 由单一强度测量值恢复相位	13
2.4 应用取样定理实现由单强度测量值复原相位	15
参考文献	16
第 3 章 一般光学变换系统中振幅-相位恢复——杨-顾算法理论	21
引言	21
3.1 一般描述和基本方程	21
3.2 一般光学变换系统中振幅-相位恢复问题的典型例子	28
3.2.1 强衍射损耗光学系统	28
3.2.2 Hartly 变换系统中的相位恢复	37
3.2.3 调相聚焦激光加速器的调相板设计	40
3.2.4 分数傅里叶变换域中的相位恢复问题	45
3.2.5 应用杨-顾算法求解固体物理中的若干逆问题	52
参考文献	57
第 4 章 衍射光学元件设计、应用和制作	61
引言	61
4.1 衍射光学元件综述	62
4.1.1 相位衍射光学元件的性能	62
4.1.2 衍射光学元件的应用	62
4.1.3 衍射光学元件的制作和复制方法	67
4.2 衍射相位元件设计基本原理	71
4.3 应用相位恢复理论和算法设计衍射相位元件	72

4.3.1	GS 相位恢复理论和算法	73
4.3.2	杨顾相位恢复理论和算法	76
4.3.3	其他相位恢复算法 —— 共轭梯度算法	99
4.4	小结	102
	参考文献	102
第 5 章	新型非线性光学超晶格材料设计 —— 模拟退火算法的应用	107
	引言	107
5.1	准周期光学超晶格的设计	108
5.1.1	设计方法	108
5.1.2	多波长 SHG 光学超晶格设计	111
5.1.3	多波长耦合三次谐波产生的非周期光学超晶格设计	112
5.1.4	实现多波长参量放大的光学超晶格设计	115
5.2	光子晶体器件的设计	118
5.2.1	多波长光子晶体滤波器的设计	119
5.2.2	用于多波长二次谐波产生的光子晶体器件	121
5.2.3	多波长耦合三次谐波产生的光子晶体器件设计	124
	参考文献	126

第1章 物理学中逆源问题概述

逆问题广泛地存在于天文学、物理学等各分支学科中。它的本性是一类病态 (ill-posed) 问题: 相应方程的解本身是不存在的, 或者是多解的, 即解具有不唯一性, 或者相应解是不稳定的, 抗噪声能力很弱, 对于外来小小的扰动, 解就会发生极大的改变。科学家们想方设法地提出各种算法, 力图求解这类病态方程 (ill-posed equations), 例如, 采用将原生态方程加以变形, 乘以伴算子的变形方程; 1972 年 Gerchberg-Saxton 为提高显微成像系统中像的分辨率, 重新发掘和分析了迭代算法, 即所谓的 GS 算法。随后科学家们提出各种形式的修正 GS 算法, 1981 年杨国桢和顾本源等提出光学任意变换系统中振幅相位恢复一般理论算法, 即杨-顾算法 (YG algorithm) 理论。在天文学方面, 由直接解调成像法提高天文像分辨率。在求解固体物理中的逆源问题方面, 应用默比乌斯 (Möbius) 反演变换法可以处理各种类型的逆源问题。在地球物理中, 为解决地震预报、矿物和地质勘探等问题, 也提出各种求解逆源问题的方案和途径。但是, 所有这些求解逆源问题的算法, 都只能缓解而无法根治固有的病态禀性, 无法使逼近解的误差达到全局极小, 只能在实验误差之内退而求之局域极小, 并且使所得到的近似解具有强的抗噪声能力以及好的稳定性。本章主要给出物理学中逆源问题的一般性评价。

引 言

在物理学的许多领域中普遍存在着逆源问题, 即如何由测量到的光信号或电信号强度分布或者散射微分截面找回丢失了的相位信息, 从而重建全波函数。成像系统中的相位恢复问题就属于这类典型问题之一^[1]。

经典的振动理论主要考虑各种离散或连续体的无穷小元的无阻尼自由振动, 基本问题是确定系统的固有本征频率或特征值以及简正模式, 其相应逆源问题是构造某种给定模型, 如弹簧-质点系统、弦等, 使之具有给定特征频率以及特征函数, 即具有给定谱函数。一般说来, 给定这些谱数据后, 可能不存在也可能存在不止一个 (即多个) 系统具备这些谱性质。求逆问题也就是构造问题: 对于给定谱数据去求唯一解^[2]。正如 Parker 指出的, 这类问题涉及以下三个方面: ① 解的存在性。物理上是否存在这样一个系统, 其具有所要求的谱性质? ② 唯一性。是否只存在一个具有这些性质的系统? ③ 构造办法。从给定谱数据如何去构造出一个 (或多个) 系统^[3]? 固体物理中逆源问题是十分重要的研究课题。经典的 X 射线结构分析就

是由已知傅里叶谱的强度来确定目标函数的相位,进而重构全波函数。在凝聚态物理中,业已提出应用序列性和数论中的默比乌斯反演定理去处理各种逆问题,如黑体辐射逆问题、比热逆问题(统一了爱因斯坦和德拜的解)和各类费米系统逆问题。同时对于提取材料中原子相互作用势的结合能以及提取界面两侧原子能间的相互作用势的界面黏结能的逆问题,它也是极有效的方法^[4-10]。地球物理反演是利用在地球表面观测到的物理现象去推测地球内部介质物理状态的空间变化及物性结构。所谓物理状态是指物理性质、受力状态或热流密度分布等。研究者已经提出了有用的求逆方法^[11]。在天体物理中为提高像分辨率,提出了直接解调成像方法^[12-14]。在量子力学中反散射问题也是典型的求逆问题,即从已知的微分散射截面去求散射势。在声学物理中也存在声阻抗的反演问题,可由接收信号反演出被测材料的参数,如弹性模量等。

第一、二类 Fredholm 积分方程解的存在性、 唯一性和迭代算法

在反演散射 (inverse scattering)、拓扑学 (topography)、像复原 (image restoration)、天线设计 (antenna design)、系统的鉴别 (system identification) 等领域中,许多方面的问题都涉及求解下面的线性积分方程:

$$\int_a^b k(x, s)g(s)ds = f(x) \quad (c \leq x \leq d) \quad (1.1)$$

其中, $f(x)$ 代表一个观察函数, $k(x, s)$ 是一个已知积分核, $g(s)$ 是待确定的未知函数。在一个像复原系统中, $f(x)$ 代表观测的像, $k(x, s)$ 是成像系统的点扩展函数, $g(s)$ 是目标分布函数, 方程 (1.1) 是熟知的第一类 Fredholm 积分方程。一般说来, 这个方程属于一种病态方程, 当观察信号 $f(x)$ 受到一个小小的外来扰动时, 就会导致解产生无法接受的重大改变。所以要十分小心地获取其近似解, 力求在精度上和稳定性上取得适度平衡。下面着重讨论方程 (1.1) 的性质, 以描述若干有代表性的求解技术。为了比较起见, 这里也写出相应第二类 Fredholm 积分方程:

$$\int_a^b k(x, s)g(s)ds + \alpha(x) = f(x) \quad (c \leq x \leq d) \quad (1.2)$$

这个方程是正态的 (well-posed), 可以应用迭代算法求得精确和收敛的唯一解。

一种缓解方程 (1.1) 病态本性的技术是所谓正则化技术 (regularization techniques)。为找到方程 (1.1) 的有用近似解, 通常需要在解的分辨率 (resolution) 和正则性 (regularity) 或稳定性 (stability) 之间取个折中。当 $\hat{K}$ 是一个致密算子时, 一

般说来, 方程 $\hat{K}g = f$ 是病态的。即使核 $k(x, s)$ 是平方可积的 (square-integrable) 和非简并的 (nondegenerate), 方程 (1.1) 也还是病态的。它对应着一个极为重要的实际情形。要想求得有用近似解, 必须修改方程, 使得相应方程解对于外界的小扰动不敏感。同时, 所求得的解密切逼近原生态问题解。修改或变形原始问题的目的是在上述两个互相矛盾的目标之间寻找可接受的折中解, 通常称为正则化 (regularization) 过程。具体做法比较繁琐, 不在此展开讨论了, 有兴趣的读者可参阅有关文献 [15]。

方程 (1.1) 的正则化修正后求解, 通常是采用 Landweber 迭代算法^[16]。首先用算子 $\hat{K}$ 的伴算子 $\hat{K}^*$ 与方程 (1.1) 的两边作乘法, 得到

$$\hat{K}^* \hat{K}g = \hat{K}^* f \quad (1.3)$$

再在方程两边添加上 g , 并重排各项, 写成便于迭代的形式, 如下式所示:

$$g^{(n+1)} = \hat{K}^* f + (\hat{I} - \hat{K}^* \hat{K})g^{(n)} \quad (1.4)$$

其中, $\hat{I}$ 是单位 (identity) 算子。若 $\hat{K}$ 是一个自伴算子, 则无需进行上述操作, 可直接写出如下式所示的形式:

$$g^{(n+1)} = f + (\hat{I} - \hat{K})g^{(n)} \quad (1.5)$$

这样一来, 在形式上化为第二类 Fredholm 方程, 由此可见, 方程 (1.1) $\hat{K}g = f$ 有唯一解, $g^{(n)}$ 收敛于真正的解。

Landweber 所提出的迭代求解程序在 1974~1975 年间被 Gerchberg 和 Papoulis 重新进行发掘和分析^[17,18]。若干年后, 它成为设计理想带通滤波器的有效算法。在工程和物理文献里, 这个算法通常称为 Gerchberg 算法或者 Gerchberg-Papoulis 算法。

求解方程 (1.1) 近似解的另一种方案是, 考虑将原始算子变形成对称算子, 例如, 第一类 Fredholm 方程 $\int_a^b k(x, s)g(s)ds = f(x)$, 这里 $f(x)$ 和 $k(x, s)$ 是给定区间内 $a \leq x, s \leq b$ 的已知连续函数, 而 $g(s)$ 是未知函数。求解这个方程时, 将它两边乘以 $k(x, s)$ 并积分, 变形成对称核方程:

$$\int_a^b K(x, s)g(s)ds = P(x) \quad (1.6)$$

其中

$$K(x, s) = \int_a^b k(t, x)k(t, s)dt$$

$$P(x) = \int_a^b k(s, x)f(s)ds$$

然后两边各添加上 $f(x)$, 再次变形成可迭代运算形式:

$$g^{(n+1)} = g^{(n)} + (P - \hat{K})g^{(n)} \quad (1.7)$$

迭代解是收敛的, 并且是高精度的^[17,18]。

参 考 文 献

- [1] Stark A. Image Recovery: Theory and Application. New York: Academic Press, 1987.
- [2] Gladwell G M L. Inverse Problems in Vibration. Leiden: Martinus Nijhoff Publishers, 1986; 格拉德威尔 G M L. 振动中的反问题. 王大钧, 何北昌译. 北京: 北京大学出版社, 1991.
- [3] Parker R L. Understanding inverse theory. Ann. Rev. Earth Plan. Sci., 1977, 5: 35.
- [4] Hardy C H, Wright E M. An Introduction to the Theory of Numbers. 5th ed. London: Oxford University Press, 1981.
- [5] Chen N X. Modified Möbius inverse formula and its applications in physics. Phys. Rev. Lett., 1990, 64: 1193.
- [6] Maddox J. Möbius and problems of inversion. Nature, 1990, 344: 377.
- [7] Chen N X, Rong E Q. Unified solution of the inverse capacity problem. Phys. Rev. E, 1998, 57: 1302; *ibid.* 1998: 6216.
- [8] Chen N X, Chen Z D. Multidimensional inverse lattice problem and a uniformly. Phys. Rev. E, 1997, 55: R5.
- [9] 陈难先. 应用物理中的几类逆问题. 自然科学进展, 1994, 4: 16; Fermi 体系逆问题的一种新解法. 2003, 13: 473.
- [10] 陈难先, 耿鸣明, 李广赢. 电子学报, 1997, 17: 59.
- [11] 杨文采. 地球物理反演的理论与方法. 北京: 地质出版社, 1997.
- [12] 李惕碚, 吴枚. 高能天文中成像和解谱的直接方法. 天体物理学报, 1993, 13: 215.
- [13] 张澍, 李惕碚, 吴枚. Compton γ 射限望远镜的直接解调成像. 天体物理学报, 1997, 17: 263.
- [14] 宋黎明, 李惕碚, 崔伟. 用 ASM/RXTE 数据对 Crab 天区的直接解调成像. 天体物理学报, 1999, 19: 27.
- [15] Stark H, Cahana D, Webb H. Restoration of arbitrary finite-energy optical objects from limited spatial and spectral information. J. Opt. Soc. Am, 1981, 71: 635.

-
- [16] Landweber L. An iteration formula for fredholm integral equations of the first kind. American Journal of Math, 1951, 73: 615.
 - [17] Gerchberg R W. Super-resolution through error energy reduction. Opt. Acta, 1974, 21: 709 .
 - [18] Papoulis A. A new algorithm in spectral analysis and band-limited extrapolation. IEEE Trans. on Circuits and Systems, 1975, CAS-22: 735.

第2章 光学系统中相位恢复理论算法

由强度测量来恢复相位是典型的逆源问题，它普遍地出现在物理学许多领域中。显微术系统中从双强度测量恢复相位的比较成功和有效的算法是 1971 年 Gerchberg-Saxton 所提出的算法，文献中常称为 GS 算法。随后，很多学者提出各种有效修正算法，用于从单一强度测量来恢复相位。某些算法应用解析函数的性质或者取样定理来实现相位恢复，但是这些算法普遍存在局限性，即只适用于处理傅里叶变换 (FT) 系统中相位恢复的问题。1981 年，杨国桢和顾本源提出一般变换光学系统中振幅相位恢复理论算法，应用于各种复原问题中并获得成功，若干实验验证例子表明了实验结果与理论计算结果相吻合。

引 言

从强度测量值恢复所丢失的相位信息的问题出现在许多物理分支学科中，如天文学、衍射光学、电子显微术、波前敏感器、全息成像、相干理论、X 射线晶体结构分析等^[1-12]。一般说来，在这些情形中，直接可测量的量是波函数的强度分布，它只提供系统在某些特定平面上波函数的振幅信息，而包含在相位分布中的重大可利用的信息则丢失了。为了重构像，同时需要振幅和相位这两个信息。因此，一个至关重要的问题是如何从强度测量来重构像。

近一个世纪以来，众多科学家都致力于解决这类问题，在某些领域业已取得较大进展。例如，在 X 射线结构分析术方面，如何在只知道结构因子绝对值的情况下找回丢失的相位、重建晶体结构，已经发展出了一整套有效方法来确定各种类型的晶体结构。著名的“直接法”的提出者已获得 1985 年诺贝尔化学奖。在成像系统中，通常的相位恢复问题可以归结为由已知一对傅里叶变换 f 和 F 函数的部分信息去重构像。应当强调指出，仅当复波函数属于一特定类型的函数时，才有可能实现相位恢复。在成像系统中通常认为所有涉及的函数都是带限的，根据问题的本性和可测量的数据，典型重构问题有以下几类：

(1) 从两个强度测量值来恢复相位。由一对已知平面上的场强分布重构像^[13-16]。例如，已知量为成像平面和衍射平面上的场强或者已知显微系统中两个不同离焦量的离焦平面上的场强。

(2) 施加非负限制下的相位恢复问题。由一对已知傅里叶变换函数的振幅分布和某些先验信息，例如，目标物波是限制于实数和恒正的函数，就足以确定傅里叶

变换谱的相位。这个问题会在天体星光干涉测量术 (stellar speckle interferometry) 的数据处理中遇到^[17-20]。在天文学中目标的空间亮度 (spatial brightness) 分布是一个实的非负函数。

(3) 有附带限制 (support constrains) 的相位恢复问题。从已知傅里叶谱强度和有关物目标的先验的附带限制来恢复相位、重构目标^[21-28]。例如, 目标是致密的或非连通的, 在限制区域外, 物波为零。这类问题常出现在目标函数无法被测量或者测量信号淹没在强噪声之中的情形。

由于相位恢复问题的重要性, 在过去的三十多年中, 各种理论算法业已提出和发展。目标重构的两个关键问题是: 所观测的数据是否足以唯一地确定未知的分布及在什么样的情况下或者施加什么样的附加限制条件使得所求得的相位解逼近理想的解? 研究者们业已付出极大的努力于这方面的研究工作^[25-40], 采用了各种解析方法, 如多项式因子分解 (factorability) 法^[31,35,36]、Eisenstein 不可约性 (irreducibility) 定理^[37,38]、整函数性质、对数 Hilbert 变换^[29,31,34] 以及傅里叶级数展开^[32] 等。

相位恢复解存在着多义性 (omnipresent) 或者说模糊性 (ambiguities), 例如, 物目标 $f(x, y)$ 的任意平动 $f(x - x_0, y - y_0)$ 、孪生像 $f^*(-x - x_0, -y - y_0)$ 以及乘上任意单位振幅的复常数 $\exp(i\phi_c)$, 所有这些都对应相同的傅里叶变换频谱^[22,41,42]。这些模糊性只会引起目标位置的平动或指向的改变, 不会影响目标物的图样变化。如果只出现这类的模糊, 则认为目标是唯一的。

在一维情形下, 一般地说, 从单一的傅里叶变换谱的模复原的目标物多半是模糊性的。但是对物函数施加一定限制后, 这个模糊性可被解除。幸运地, 在通常遇到的问题中, 对物波的先验附加限制都是已知的, 在这个条件下, 解的唯一性是被确保的^[41-49]。对于二维情形, 从理论分析和数值模拟指出, 解的唯一性可能高于一维情形^[50-54]。

关于光学显微术和电子显微术中相位恢复问题, 近三十年来, 许多学者已经提出各种复原方案^[1-12]。1971 年 Gerchberg - Saxton 提出一个实用有效的算法, 文献中称为 GS 算法^[7-11], 即由已知像平面和衍射平面 (或者称出射光瞳) 上场强的分布来计算场的相位。1973 年 Misell 仿照 GS 算法提出如何由两幅不同离焦量的离焦像强度导出波函数的相位^[8,12]。随后, 许多学者围绕着 GS 算法的收敛性和解的唯一性展开广泛讨论^[16]。Fienup 等提出了各种修正算法和更有效的加速算法^[23-26,55,56], 如误差减少算法、最陡下降法、共轭梯度法、输入-输出法等^[57-59]。绝大多数算法都是基于傅里叶变换, Arsenault 等提出应用取样定理进行相位恢复^[60-62]。Rolleston 和 George 研究了菲涅耳 (Fresnel) 变换下的相位恢复问题^[63,64]。模拟计算表明, 对于实数值的目标物, 从单一已知相位信息或者单一已知振幅信息在菲涅耳变换的框架下能够获得极好的像重构。

从 Hartley 变换^[65] 谱强度来复原像称为 Hartley 相位恢复问题。Hartley 变换在数字和光学像及信号处理方面有着潜在应用^[66-79]。由于 Hartley 变换与傅里叶变换之间存在着一个简单的相加关系, 因此, Hartley 变换的光学系统已被提出^[68-70]。Hartley 变换比起傅里叶变换来, 明显优点是 Hartley 变换是实函数。任何实数目标的 Hartley 变换谱也是实的, 它的相位只能取 0 或 π , 即只有正负符号。比起复数的傅里叶谱, 丢失的相位信息要少得多, 不那么严重而已。首先开展 Hartley 变换的相位恢复问题研究的是 Millane^[71], 他演示了一个低分辨率的实函数物目标可以利用矩或低频 Hartley 变换谱强度来导出, 然后借助迭代算法结合对物施加于目标上的一些附加支撑和正值限制后, 分辨率可大大改善^[55]。Nakajima 提出从 Hartley 变换谱强度重构目标函数的一个直接方法^[72], 其利用指数型的整函数 (entire function) 的性质^[3,4] 建立一个闭合表达式来实现目标函数的重构, 而不需要一个先验的有关物的信息, 如非负性或者物的边界延伸范围。

相位恢复问题的困难之处在于问题本身是对应于一个固有的病态方程^[21] 问题。对于外来扰动或噪声, 所求得解是相当不稳定的。迭代解的收敛特性依赖于噪声水平和所施加的附加限制条件。另一方面, 描述实际系统时, 如何建立合理和适当的数学模型也是一个难题。一旦模型不恰当, 偏离实际系统太远, 就会功亏一篑, 使物目标的重构全然失败。同时, 通常要获得高分辨率的像牵涉到巨量数据, 使得计算时间过长, 无法实际操作。1981 年杨国桢和顾本源应用光学一般变换理论^[80-86], 提出非幺正系统中振幅相位恢复问题的一般描述和分类, 通过严格的数学推导给出确定振幅相位分布的联立方程组^[22,23], 应用迭代算法求解它们, 成功地处理了各种复原问题, 开辟了解决逆源问题的新途径。详细的杨-顾算法理论将放在第 3 章讨论。

本章将简单扼要地介绍上述诸算法。首先介绍傅里叶变换系统中相位恢复问题和有关算法, 然后讨论由双强度测量来恢复相位, 以及由单一平面上场强度去恢复相位的问题, 介绍复平面解析延拓法和应用取样定理进行相位恢复。

2.1 典型的成像系统和有关方程

当一束相干光照射物体时, 成像过程如图 2.1 所示。紧贴物体的平面称为“物平面”, 相应物波函数记为 $U_0(x_0)$, 它是未知量。在光学和电子显微术中, 人们实际测量的是成像系统中另外一些特定平面上的场强分布。例如, 选定出射光瞳 (或称衍射平面) 上的场强分布, 或者像平面和离焦平面上的场强分布。这些平面上点的位置坐标分别记为 ξ 、 x_2 和 x_0 。与这些平面相应的波函数记为 $P(\xi)$ 、 $U_2(x_2)$ 和 $U'_2(x_1)$ 。这里为了简化起见, 只讨论一维情形, 有关结果可以直截了当地推广到二维情形。

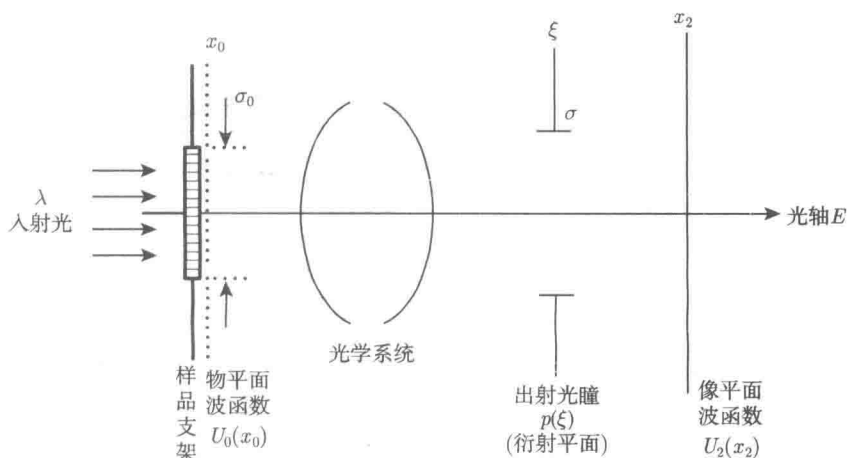


图 2.1 成像过程示意图

根据显微系统成像理论^[6,87,88]，在傍轴近似下物波函数和像波函数之间由脉冲响应函数 $G(x_2, x_0)$ 联系起来：

$$U_2(x_2) = \int_{\sigma_0} dx_0 G(x_2, x_0) U_0(x_0) = \hat{G} U_0 \quad (2.1)$$

式中， σ_0 代表物平面的有效孔径。脉冲响应函数是

$$G(x_2, x_0) = \int_{\sigma} d\xi \exp\{i2\pi[\phi(x_0, \xi) - (x_2 - x_0)\xi]\} \quad (2.2)$$

式中， $\phi(x_0, \xi)$ 是出射光瞳上的像差函数（度量单位是弧度）， ξ 以焦距 f 度量， x_0 以波长 λ_0 度量， x_2 以 $\lambda_0 M$ 度量， M 为成像系统的放大率。

在傍轴近似下，出射光瞳上波函数 $P(\xi)$ 与像波函数 $U_2(x_2)$ 之间是傅里叶变换关系：

$$U_2(x_2) = \int d\xi P(\xi) \exp(-i2\pi x_2 \xi) = \hat{F} P \quad (2.3a)$$

$$P(\xi) = \int dx_2 U_2(x_2) \exp(i2\pi x_2 \xi) = \hat{F}^{-1} \quad (2.3b)$$

式中， $\hat{F}(\hat{F}^{-1})$ 代表傅里叶（逆）变换算子。对于离焦像，此时出射光瞳上出现一个附加像差 $\Delta f \xi^2 / 2\lambda_0$ ， Δf 是离焦量。于是，出射光瞳上波函数变成

$$P'(\xi) = P(\xi) \exp(i\pi \Delta f \xi^2 / \lambda_0) \quad (2.4a)$$