21世纪应用型本科院校规划教材

主编 刘大瑾

线性代数

Linear Algebra

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

南京大学出版社

21世纪应用型本科院校规划教材

线性代数

Linear Algebra

主　编　刘大瑾

副主编　张文彬　李文涛

南京大学出版社

内容简介

全书包括行列式、矩阵、n 维向量空间、线性方程组、矩阵的特征值与对角化及实二次型共 6 章。本书可作为理工科院校线性代数课程的教科书，也可作为其他相关专业的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 刘大瑾主编. — 南京:南京大学出版社，2016.7

21 世纪应用型本科院校规划教材

ISBN 978-7-305-16903-8

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 098922 号

扫描可见本书参考答案

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　编 210093
出 版 人 金鑫荣

丛 书 名 21 世纪应用型本科院校规划教材
书　　名 线性代数
主　　编 刘大瑾
责任编辑 吴　华　　编辑热线 025-83596997

照　　排 南京理工大学资产经营有限公司
印　　刷 江苏富宁书刊印刷有限公司
开　　本 787×1092 1/16 印张 8.75 字数 213 千
版　　次 2016 年 7 月第 1 版 2016 年 7 月第 1 次印刷
印　　数 1～3 000
ISBN 978-7-305-16903-8
定　　价 21.80 元

网　　址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
微信服务号：njuyuexue
销售咨询热线：(025)83594756

* 版权所有，侵权必究
* 凡购买南大版图书，如有印装质量问题，请与所购图书销售部门联系调换

前　言

线性代数理论是计算技术的基础，随着互联网技术的飞速发展和广泛应用，许多自然界和社会现象中的实际问题都可以转化为关于离散数值的计算，于是线性代数作为处理离散问题的重要工具成为工程技术人员必备的数学基础，是理工科院校各专业必修的一门数学基础课。

我校自2011年施行“现场工程师培养计划”以来，紧紧围绕“应用型”人才的培养目标积极推行教育教学改革，为此编者在保证知识系统性和严谨性的基础上突出基本概念、基本理论和基本技能，注重培养学生的数学素质，淡化了数学的抽象化色彩，减少理论推导，注重工程背景的介绍，精选例题和习题，提高读者运用数学方法分析问题和解决问题的能力。

全书共六章，由刘大瑾担任主编，张文彬、李文涛担任副主编，参加编写的还有（以姓氏笔画为序）：叶建兵、刘明颖、谌文超、谭沈阳。

全书虽经多次讨论，反复修正，但限于编者水平，加之教学改革中的一些问题有待进一步探索，缺点和疏漏之处在所难免，恳请使用本书的老师和同学批评指正。

编　者

2016年4月

《线性代数》读者信息反馈表

尊敬的读者：

感谢您购买和使用南京大学出版社的图书，我们希望通过这张小小的反馈卡来获得您更多的建议和意见，以改进我们的工作，加强双方的沟通和联系. 我们期待着能为更多的读者提供更多的好书.

请您填妥下表后，寄回或传真给我们，对您的支持我们不胜感激！

1. 您是从何种途径得知本书的：

   □ 书店　□ 网上　□ 报纸杂志　□ 朋友推荐

2. 您为什么购买本书：

   □ 工作需要　□ 学习参考　□ 对本书主题感兴趣　□ 随便翻翻

3. 您对本书内容的评价是：

   □ 很好　□ 好　□ 一般　□ 差　□ 很差

4. 您在阅读本书的过程中有没有发现明显的专业及编校错误，如果有，它们是：

   ____

   ____

   ____

   ____

5. 您对哪些专业的图书信息比较感兴趣：________________________

   ____

6. 如果方便，请提供您的个人信息，以便于我们和您联系（您的个人资料我们将严格保密）：

   您供职的单位：　　　　　　您教授或学习的课程：

   您的通信地址：　　　　　　您的电子邮箱：

请联系我们：

电话：025－83596997

传真：025－83686347

通信地址：南京市汉口路22号　210093　南京大学出版社高校教材中心

微信服务号：njuyuexue

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

目　录

第一章　行列式 ………………………………………………………… 1

第一节　二阶、三阶行列式 ……………………………………………… 1

第二节　n 阶行列式 ……………………………………………………… 4

第三节　n 阶行列式的计算 ……………………………………………… 8

第四节　克莱姆法则 ……………………………………………………… 17

第二章　矩　阵 ………………………………………………………… 22

第一节　矩阵的概念与运算 ……………………………………………… 22

第二节　矩阵的逆 ………………………………………………………… 33

第三节　分块矩阵 ………………………………………………………… 38

第四节　初等变换与初等矩阵 …………………………………………… 43

第五节　矩阵的秩 ………………………………………………………… 51

第三章　n 维向量空间 ………………………………………………… 57

第一节　n 维向量空间 …………………………………………………… 57

第二节　向量的线性相关性 ……………………………………………… 60

第三节　基维数坐标 ……………………………………………………… 67

第四章　线性方程组 …………………………………………………… 74

第一节　消元法 …………………………………………………………… 74

第二节　线性方程组解的存在定理 ……………………………………… 77

第三节 线性方程组解的结构 …… 81

第五章 矩阵的特征值与对角化 …… 92

第一节 特征值与特征向量 …… 92
第二节 向量的内积 …… 98
第三节 实对称矩阵的对角化 …… 102

第六章 实二次型 …… 107

第一节 实二次型的基本概念 …… 107
第二节 化二次型为标准形 …… 111
第三节 正定二次型 …… 118

参考答案 …… 122

参考文献 …… 132

第一章　行列式

扫描可见本书参考答案

行列式是线性代数的一个重要组成部分，它是研究矩阵、线性方程组的重要工具. 本章主要介绍行列式的定义、性质、计算方法，最后给出行列式的一个应用，即克莱姆法则.

第一节　二阶、三阶行列式

一、二阶行列式

二元一次方程组的代入消元解法：

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1, & (1-1) \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2. & (1-2) \end{cases}$$

a_{11}，a_{12}不可能同时为 0，不妨设 $a_{11}\neq 0$，则

(1－1)式$\times\left(-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right)$得：　$-a_{21}x-\dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}y=-\dfrac{b_1a_{21}}{a_{11}}$，　　(1－3)

(1－2)式＋(1－3)式得(消去 x)：$\dfrac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}}y=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}}$，

即

$$y=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \qquad (1-4)$$

将(1－4)式代入(1－1)式得：$x=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$.

可见，方程组的解完全可由方程组中的未知数系数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 以及常数项 b_1，b_2 表示出来$\begin{cases} x=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ y=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases}$

如果规定记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，则有：

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

因此,二元一次方程组的解可以表示为:$\begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \end{cases}$

定义 1-1 记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,称为二阶行列式,即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

行列式中的元素用小写英文字母表示,下标的两个数据表示该元素所在的行和列,分别叫行标和列标.一般行列式中位于第 i 行第 j 列的元素记为 a_{ij},比如 a_{21}是指位于第二行第一列的元素.

二阶行列式表示的代数和,可以用画线(如图 1-1)的方法记忆,即实线连接的两个元素的乘积减去虚线连接的两个元素的乘积.

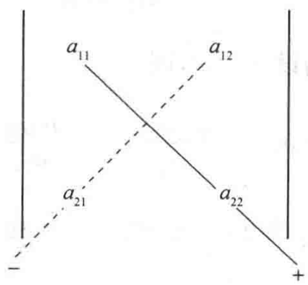

图 1-1

例 1-1 计算下列行列式的值

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$;　　(3) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\times4-2\times3=-2$;

(2) $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-1\times2-0\times0=-2$;

(3) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=2\times3-(-1)\times0=6$.

二、三阶行列式

定义 1－2 记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$表示代数和：

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

称为三阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

三阶行列式可以用画线的方法记忆，如图 1－2 所示，其中各实线(主对角线方向)连接的三个元素的乘积是代数和中的正项，各虚线(副对角线方向)连接的三个元素的乘积是代数和中的负项.

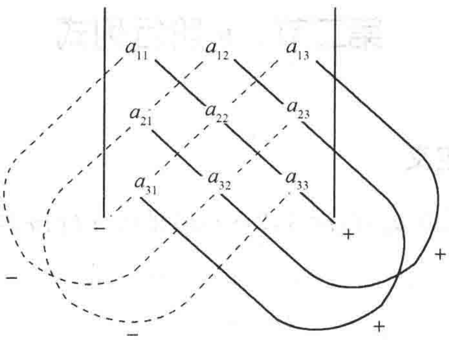

图 1－2

例 1－2 计算下列三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

解
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}&=1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-2)\times4\times(-4)\\&\quad-(-4)\times2\times(-3)-2\times(-2)\times(-2)-1\times1\times4\\&=(-4)+(-6)+32-24-8-4=-14.\end{aligned}$$

习题 1-1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ y & -z & 0 \end{vmatrix}$.

2. 设 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}=0$，求 x 的值.

3. 求函数 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数.

第二节　n 阶行列式

一、n 阶行列式的定义

定义 1-3　由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行、n 列，构成的运算式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 n 阶行列式，简记为 $\det(a_{ij})$，其中 a_{ij} 为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素.

特别规定，一阶行列式 $|a|=a$. 注意这里的行列式记号不要与绝对值记号混淆.

定义 1-4　在 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中任取一个元素 a_{ij}，划去 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列，剩下的那个 $n-1$ 阶行列式

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\quad (i,j=1,2,\cdots,n),$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

称 M_{ij} 为元素 a_{ij} 的余子式，记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

一般的三阶行列式

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13},
\end{aligned}
$$

即三阶行列式的值等于它的第一行的每个元素与其对应的代数余子式的乘积之和.

由此可归纳出 n 阶行列式的值

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j},$$

即 n 阶行列式的值等于它的第一行的每个元素与其对应的代数余子式的乘积之和，这也称为 D_n 按第一行展开的展开式.

行列式 D_n 中，将 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所组成的对角线称为 D_n 的主对角线，而 $a_{1n},a_{2,n-1},\cdots,a_{n1}$ 所组成的对角线则称为 D_n 的副对角线.

称主对角线以上(下)的元素全为零的行列式称为下(上)三角形行列式.

由以上定义可以推得：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n} a_{ii},$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

除了主(副)对角线元素外其他元素都为零的行列式称为主(副)对角行列式.

例如，主对角行列式：

$$D_1=\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n;$$

副对角行列式：

$$D_2=\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$$

二、行列式的基本性质

把行列式 D 的行、列互换所得到的行列式称为 D 的转置行列式，记作 D^{T}，即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则
$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1-1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

由性质 1-1 可知，行列式中行与列具有对等的地位，对行成立的性质，对列也成立，反之亦然. 以下我们仅讨论行的性质，然后引申到列即可.

性质 1-2 行列式两行(列)互换，行列式的值变号.

即
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由性质 1-2 即可得到下面的推论.

推论 1-1 若行列式 D 中有两行(列)元素对应相等，则 D 的值为零.

证明 把 D 相同的两行(列)互换，所得行列式记作 D_1，则由性质 1-2 得 $D_1=-D$，而 D 实际上没有变，故应有 $D_1=D$，所以 $D=0$.

性质 1-3 用数 k 乘以行列式 D，等于将该数 k 乘到 D 的某一行(列)中所有的元素上.

即
$$kD=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 1-2 行列式某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 1-3 若行列式有一行(列)的元素全为零,则其值为零.

推论 1-4 若行列式有两行元素对应成比例,则其值为零.

下面的性质称为"拆行":

性质 1-4 若 D 的某一行(列)的元素都可表为两数之和,则以下等式成立:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例如:

$$\begin{vmatrix} a_1+c_1 & a_2+c_2 \\ b_1+d_1 & b_2+d_2 \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2+c_2 \\ b_1 & b_2+d_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & a_2+c_2 \\ d_1 & b_2+d_2 \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & c_2 \\ b_1 & d_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & a_2 \\ d_1 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}.$$

性质 1-5 把行列式某一行的 λ 倍加到另一行的对应元素上,行列式的值不变,即:

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_k+\lambda r_i} \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+\lambda a_{i1} & a_{k2}+\lambda a_{i2} & \cdots & a_{kn}+\lambda a_{in} \end{vmatrix}.$$

证明 根据性质 1-4 及性质 1-3 的推论 1-3:

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+\lambda a_{i1} & a_{k2}+\lambda a_{i2} & \cdots & a_{kn}+\lambda a_{in} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{vmatrix}.$$

行列式性质 1－2、性质 1－3、性质 1－5 在行列式的计算中经常用到.

通常第 i 行(列)乘以 k,记为 $r_i{}'k$(或 $c_i{}'k$). 第 i 行(列)提出公因子 k,记为 r_i,k(或 c_i,k).

第三节　n 阶行列式的计算

一、行列式的计算

利用行列式的性质可有效地简化行列式的计算. 例如,利用性质 1－5 把行列式化成上三角行列式,便可直接得到行列式的值.

例 1－3　计算 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 5 & -5 \\ -1 & -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

解　我们利用性质将它化成三角形,便可套用前面的结果:

$$D \xlongequal[r_4+r_1]{r_3-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 7 & -11 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+2r_2]{r_3-5r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+2r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1\times(-1)\times(-3)\times 10 = 30.$$

例 1－4　计算 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$.

解　这个行列式的特点是每行(列)元素之和都是 $a+3b$,因此,将第二、三、四行都加到

第一行，再提取公因子得：

$$D=\begin{vmatrix} a+3b & a+3b & a+3b & a+3b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}=(a+3b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,4]{r_i-br_1}(a+3b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}=(a+3b)(a-b)^3.$$

引理 1-1　如果 n 阶行列式 D 的第 i 行除 a_{ij} 外的其余元素都为零，则这个行列式等于 a_{ij} 与其代数余子式 A_{ij} 的乘积，即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

证明　先证最简单的情况. 设

$$B=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

由 n 阶行列式的计算得

$$B=a_{11}M_{11}=a_{11}A_{11}.$$

再证一般的情况. 设 D 的第 i 行除 a_{ij} 外的其余元素都为零：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将 D 的第 i 行依次与上面的 $i-1$ 行逐行对换，再将第 j 列依次与左面的 $j-1$ 列逐列对调，共经 $i-1+j-1$ 次对调，将 a_{ij} 调到了第 1 行第 1 列的位置上，所得的行列式记为 D'，则

$$D'=(-1)^{i+j-2}D=(-1)^{i+j}D,$$

而 a_{ij} 在 D' 中的余子式仍然是 a_{ij} 在 D 中的余子式 M_{ij}. 利用已证的结果有 $D'=a_{ij}M_{ij}$，因此

$$D=(-1)^{i+j}D'=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}.$$

定理 1-1　n 阶行列式 D 的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，等于 D 的值，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\quad(j=1,2,\cdots,n).\tag{1-5}$$

证明 任选 D 的第 i 行,把该行元素都写作 n 个数之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+0+\cdots+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

由引理即得

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

这称为“按第 i 行展开”,按第 j 列展开可类似证明,即

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

这个定理称为行列式按一行(列)展开法则.它为行列式计算提供了又一种思路:将 n 阶行列式的计算化为 $n-1$ 阶行列式的计算,这称为降阶.

例 1-5 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解 方法一

$$D=2A_{31}+0A_{32}+1A_{33}+(-1)A_{34}\quad\text{(按第三行展开)}$$

$$=2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix}+(-1)(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=40.$$

我们把行列式按照行(列)展开时,最好先根据性质将某一行或列化为只剩下一个非 0

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com