高等学校教学参考书

《电磁场与电磁波》教学指导书

杨儒贵

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教学参考书

《电磁场与电磁波》教学指导书

杨儒贵

高等教育出版社

内容提要

本指导书是根据作者撰写的《电磁场与电磁波》教材编写的。目的是为了进一步说明该教材的特色及各章的重点和难点，并提供全部习题的题解。原教材共有十章，本指导书也按照原章节次序，逐一介绍。在每章题解前，指出该章重点和难点的处理方法，综述涉及的重要公式。此外，在附录中列举了很多有关电磁场与电磁波的工程应用。

本指导书可以作为使用原教材师生的参考书，也可供感兴趣的读者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

《电磁场与电磁波》教学指导书/杨儒贵编.—北京：高等教育出版社，2003.11

ISBN 7-04-013021-1

Ⅰ.电… Ⅱ.杨… Ⅲ.①电磁场-高等学校-教学参考资料②电磁波-高等学校-教学参考资料

Ⅳ.0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 085155 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所
排　　版	高等教育出版社照排中心
印　　刷	中国青年出版社印刷厂

开　　本	787×960　1/16	版　　次	2003 年 11 月第 1 版
印　　张	13	印　　次	2003 年 11 月第 1 次印刷
字　　数	240 000	定　　价	16.70 元

前 言

本指导书是根据作者撰写的《电磁场与电磁波》教材编写的。目的是为教师进一步说明该教材的特色，各章重点和难点，并提供全部习题的题解。原教材共分十章：矢量分析；静电场；静电场边值问题；恒定电流场；恒定磁场；电磁感应；时变电磁场；平面电磁波；导行电磁波和电磁辐射及原理等。因此，本指导书也按原章节次序，逐一介绍。在每章题解前，指出该章重点和难点的处理方法，同时为了便于查阅，综述了该章涉及的重要公式。此外，在附录中列举了很多有关电磁场与电磁波的工程应用。

鉴于各校教学计划和要求不尽相同，各位教师都具有丰富的教学经验和独特的教学风格，本指导书提出的建议及题解，仅供参考。

作者撰写的《电磁场与电磁波》教材，其主要特色是重视基本概念的阐述，注重理论联系实际，关注新技术的发展；在内容上基于亥姆霍兹定理逐一分析电磁场的特性，并将时变电磁场作为主要内容。此外，书中附有大量典型例题、思考题和习题。文字流畅，图表醒目。

本教学指导书与该教材配套使用。该教材还配有电子教案。为了便于双语教学，该教材的英文版可望于2004年奉献给读者。

教材总学时为64学时，除了4学时作为机动以外，为了体现以时变电磁场为重点，各章学时可按下表分配：

章　名	学　时	章　名	学　时
矢量分析	4	电磁感应	3
静电场	6	时变电磁场	7
静电场边值问题	4	平面电磁波	10
恒定电流场	3	导行电磁波	8
恒定磁场	5	电磁辐射及原理	10

在教学方法上，首先，应该充分认识“电磁场与电磁波”课程的特点。作者认为该课程的特点可用12个字描述：“物理概念抽象，数学方法较多”。两者相互补充，相互依存。因此，根据本人多年的教学实践，提出以下几点建议，供参考。

(1) 课堂上着重讲清物理概念，避免繁杂枯燥的数学推演。

(2) 认真讲解各章典型例题，以提高学生分析问题和解决问题的能力。若

学时允许，还可介绍有代表性的习题。

(3) 尽量收集一些浅显易懂的应用实例，以提高学生的学习兴趣，同时也有助于学生对所学的内容加深理解。

(4) 若使用电子教案，决不能照本宣读，应该予以详细地讲解。尽量多划分几个段落，充分利用动画功能，逐一显示。若使用黑板，应该板书端正，简洁。

(5) 认认真真上好绪论课，这是提高学生学习兴趣、了解课程的最重要一课。同时也有助于学生认识课程的特点，掌握正确的学习方法。

为了优秀地完成教学任务，教学方法固然重要，但是教师自身良好的素质必不可少。上课教师要具备五颗“心”。要有爱心，认真负责，对得起学生家长和学生本人；要有热心，喜欢教学，尤其要喜欢电磁场与电磁波；要有耐心，特别对于后进学生和简单内容，应不厌其烦地进行解释；要有恒心，善始善终，一丝不苟。每节课都应精神饱满，谈笑风生；要虚心，不断充实自己，深入才能浅出。讲授“电磁场与电磁波”课程的教师应该学习或阅读过有关高等电磁理论的书籍，同时还要随时关注有关新技术的发展。

在本教学指导书编写过程中，三名研究生参加了题解演算，其中张双文负责第一、三、七、八章，官正涛负责第五、六、十章，陈凯亚负责第二、四、九章。刘运林副教授和王敏锡教授协助指导并审查了全部题解。高等教育出版社对于本指导书的撰写和出版给予了很大支持和帮助，作者在此一并表示衷心的感谢。

本书不妥之处，渴望广大师生指正。

编者

2003 年 6 月

目　录

第一章　矢 量 分 析

重点和难点

关于矢量的定义、运算规则等内容可让读者自学。应着重讲解梯度、散度、旋度的物理概念和数学表示，以及格林定理和亥姆霍兹定理。至于正交曲面坐标系一节可以略去。

考虑到高年级同学已学过物理学，讲解梯度、散度和旋度时，应结合电学中的电位、积分形式的高斯定律以及积分形式的安培环路定律等内容，阐述梯度、散度和旋度的物理概念。详细的数学推演可以从简，仅给出直角坐标系中的表达式即可。讲解无散场和无旋场时，也应以电学中介绍的静电场和恒定磁场的基本特性为例。

至于格林定理，证明可不讲，仅给出公式即可，但应介绍格林定理的用途。

前已指出，该教材的特色之一是以亥姆霍兹定理为依据逐一介绍电磁场，因此该定理应着重介绍。但是由于证明过程较繁，还要涉及 δ 函数，如果学时有限可以略去。由于亥姆霍兹定理严格地定量描述了自由空间中矢量场与其散度和旋度之间的关系，因此应该着重说明散度和旋度是产生矢量场的源，而且也是惟一的两个源。所以，散度和旋度是研究矢量场的首要问题。

此外，还应强调自由空间可以存在无散场或无旋场，但是不可能存在既无散又无旋的矢量场。这种既无散又无旋的矢量场只能存在于局部的无源区中。

重 要 公 式

直角坐标系中的矢量表示：$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z$

矢量的标积：

代数定义：$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

几何定义：$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta$

矢量的矢积：

代数定义：$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$

几何定义：$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_z|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$

标量场的梯度：$\nabla\Phi=\boldsymbol{e}_x\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}$

矢量场的散度：$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\dfrac{\partial A_x}{\partial x}+\dfrac{\partial A_y}{\partial y}+\dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

高斯定理：$\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V=\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$

矢量场的旋度：$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$

斯托克斯定理：$\int_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_l\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$

无散场：$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$

无旋场：$\nabla\times(\nabla\Phi)=0$

格林定理：

第一和第二标量格林定理：

$$\int_V(\nabla\Psi\cdot\nabla\Phi+\Psi\nabla^2\Phi)\mathrm{d}V=\oint_S(\Psi\nabla\Phi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\int_V(\Psi\nabla^2\Phi-\Phi\nabla^2\Psi)\mathrm{d}V=\oint_S(\Psi\nabla\Phi-\Phi\nabla\Psi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

第一和第二矢量格林定理：

$$\int_V[(\nabla\times\boldsymbol{P})\cdot(\nabla\times\boldsymbol{Q})-\boldsymbol{P}\cdot(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{Q})]\mathrm{d}V=\oint_S(\boldsymbol{P}\times\nabla\times\boldsymbol{Q})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\int_V[\boldsymbol{Q}\cdot(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{P})-\boldsymbol{P}\cdot(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{Q})]\mathrm{d}V=$$
$$\oint_S[\boldsymbol{P}\times\nabla\times\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{Q}\times\nabla\times\boldsymbol{P}]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

亥姆霍兹定理：$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=-\nabla\Phi(\boldsymbol{r})+\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$

式中，$\Phi(\boldsymbol{r})=\dfrac{1}{4\pi}\int_{V'}\dfrac{\nabla'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\dfrac{1}{4\pi}\int_{V'}\dfrac{\nabla'\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$

三种坐标系中矢量表示式之间的转换关系：

$$\begin{bmatrix}A_r\\A_\phi\\A_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}A_r\\A_\theta\\A_\phi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

题　　解

1-1　已知三个矢量分别为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z$；$\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y+2\boldsymbol{e}_z$；$\boldsymbol{C}=2\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_z$。试求① $|\boldsymbol{A}|,|\boldsymbol{B}|,|\boldsymbol{C}|$；② 单位矢量 $\boldsymbol{e}_a,\boldsymbol{e}_b,\boldsymbol{e}_c$；③ $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$；④ $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$；⑤ $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ 及 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})\times\boldsymbol{B}$；⑥ $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{B}$ 及 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$。

解　① $|\boldsymbol{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}=\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{14}$

$$|\boldsymbol{B}|=\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}=\sqrt{3^2+1^2+2^2}=\sqrt{14}$$

$$|\boldsymbol{C}|=\sqrt{C_x^2+C_y^2+C_z^2}=\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$

② $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\dfrac{\boldsymbol{A}}{\sqrt{14}}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z)$

$$\boldsymbol{e}_b=\frac{\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|}=\frac{\boldsymbol{B}}{\sqrt{14}}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y+2\boldsymbol{e}_z)$$

$$\boldsymbol{e}_c=\frac{\boldsymbol{C}}{|\boldsymbol{C}|}=\frac{\boldsymbol{C}}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_z)$$

③ $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=3+2-6=-1$

④ $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=7\boldsymbol{e}_x-11\boldsymbol{e}_y-5\boldsymbol{e}_z$

⑤ $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 7 & -11 & -5 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=11\boldsymbol{e}_x-3\boldsymbol{e}_y+22\boldsymbol{e}_z$

因　$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-2\boldsymbol{e}_x-5\boldsymbol{e}_y-4\boldsymbol{e}_z$

则　$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ -2 & -5 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-6\boldsymbol{e}_x-8\boldsymbol{e}_y+13\boldsymbol{e}_z$

⑥ $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{B}=(-2)\times3+(-5)\times1+13\times2=15$

$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=7\times2+0+(-5)\times(-1)=19$

1-2 已知 $z=0$ 平面内的位置矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 x 轴的夹角为 α，位置矢量 $\boldsymbol{B}$ 与 x 轴的夹角为 β，试证

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

证明 由于两矢量位于 $z=0$ 平面内，因此均为二维矢量，它们可以分别表示为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x|\boldsymbol{A}|\cos\alpha+\boldsymbol{e}_y|\boldsymbol{A}|\sin\alpha$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x|\boldsymbol{B}|\cos\beta+\boldsymbol{e}_y|\boldsymbol{B}|\sin\beta$$

已知 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos(\alpha-\beta)$，求得

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\alpha\cos\beta+|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\alpha\sin\beta}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}$$

即
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

1-3 已知空间三角形的顶点坐标为 $P_1(0,1,-2)$，$P_2(4,1,-3)$ 及 $P_3(6,2,5)$。试问：① 该三角形是否是直角三角形？② 该三角形的面积是多少？

解 ① 由题意知，三角形三个顶点的位置矢量分别为

$$\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{e}_y-2\boldsymbol{e}_z;\boldsymbol{P}_2=4\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z;\boldsymbol{P}_3=6\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y+5\boldsymbol{e}_z$$

那么，由顶点 P_1 指向 P_2 的边矢量为

$$\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1=4\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_z$$

同理，由顶点 P_2 指向 P_3 的边矢量及由顶点 P_3 指向 P_1 的边矢量分别为

$$\boldsymbol{P}_3-\boldsymbol{P}_2=2\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y+8\boldsymbol{e}_z\quad \boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_3=-6\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y-7\boldsymbol{e}_z$$

因两个边矢量 $(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)\cdot(\boldsymbol{P}_3-\boldsymbol{P}_2)=0$，意味着该两个边矢量相互垂直，所以该三角形是直角三角形。

② 因
$$|\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1|=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$$

$$|\boldsymbol{P}_3-\boldsymbol{P}_2|=\sqrt{2^2+1^2+8^2}=\sqrt{69}$$

所以三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1||\boldsymbol{P}_3-\boldsymbol{P}_2|=\frac{\sqrt{1\,173}}{2}$$

1-4 已知矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x y+\boldsymbol{e}_y x$，$P_1$ 及 P_2 两点的坐标位置分别为 $P_1(2,1,-1)$ 及 $P_2(8,2,-1)$。若取 P_1 及 P_2 之间的抛物线 $x=2y^2$ 或直线 P_1P_2 为积分路径，试求线积分 $\int_{P_2}^{P_1}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$。

解 ① 积分路线为抛物线。已知抛物线方程为 $x=2y^2$，$\mathrm{d}x=4y\mathrm{d}y$，则

$$\int_{P_2}^{P_1}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{P_2}^{P_1}(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=\int_{P_2}^{P_1}(4y^2\mathrm{d}y+2y^2\mathrm{d}y)=$$

$$\int_{P_2}^{P_1} 6y^2\mathrm{d}y = 2y^3\Big|_2^1 = -14$$

② 积分路线为直线。因 P_1,P_2 两点位于 $z=-1$ 平面内，过 P_1,P_2 两点的直线方程为 $y-1=\dfrac{2-1}{8-2}(x-2)$，即 $6y=x+4$，$\mathrm{d}x=6\mathrm{d}y$，则

$$\int_{P_2}^{P_1} \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{P_2}^{P_1} 6y\mathrm{d}y+(6y-4)\mathrm{d}y=(12y^2-4y)\Big|_2^1=-14。$$

1-5 设标量 $\Phi=xy^2+yz^3$，矢量 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z$，试求标量函数 Φ 在点(2，-1,1)处沿矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向上的方向导数。

解 已知梯度

$$\nabla\Phi=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\boldsymbol{e}_x y^2+\boldsymbol{e}_y(2xy+z^2)+\boldsymbol{e}_z 3yz^2$$

那么，在点(2，-1,1)处 Φ 的梯度为

$$\nabla\Phi=\boldsymbol{e}_x-3\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z$$

因此，标量函数 Φ 在点(2，-1,1)处沿矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向上的方向导数为

$$\nabla\Phi\cdot\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{e}_x-3\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z)\cdot(2\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z)=2-6+3=-1$$

1-6 试证式(1-5-11)，式(1-5-12)及式(1-5-13)。

证明 式(1-5-11)为$\nabla(\Phi\Psi)=\Phi\nabla\Psi+\Psi\nabla\Phi$，该式左边为

$$\begin{aligned}\nabla(\Phi\Psi)&=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}(\Phi\Psi)+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}(\Phi\Psi)+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}(\Phi\Psi)=\\ &\boldsymbol{e}_x\left(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)+\boldsymbol{e}_y\left(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)+\boldsymbol{e}_z\left(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)=\\ &\Psi\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)+\Phi\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)=\\ &\Phi\nabla\Psi+\Psi\nabla\Phi\end{aligned}$$

即 $$\nabla(\Phi\Psi)=\Phi\nabla\Psi+\Psi\nabla\Phi$$

根据上述复合函数求导法则同样可证式(1-5-12)和式(1-5-13)。

1-7 已知标量函数 $\Phi=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}y\right)\mathrm{e}^{-z}$，试求该标量函数 Φ 在点 $P(1,2,3)$处的最大变化率及其方向。

解 标量函数在某点的最大变化率即是函数在该点的梯度值。已知标量函数 Φ 的梯度为

$$\nabla\Phi=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

那么

$$\nabla\Phi=\boldsymbol{e}_x\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}y\right)\mathrm{e}^{-z}+\boldsymbol{e}_y\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}y\right)\mathrm{e}^{-z}-$$

$$e_z \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}y\right)e^{-z}$$

将点 $P(1,2,3)$的坐标代入，得$(\nabla\Phi)_P = -\boldsymbol{e}_y\frac{\pi}{6}e^{-3} - \boldsymbol{e}_z\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-3}$。那么，在 P 点的最大变化率为

$$|\nabla\Phi|_P = \left|-\boldsymbol{e}_y\frac{\pi}{6}e^{-3} - \boldsymbol{e}_z\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-3}\right| = \frac{e^{-3}}{6}\sqrt{\pi^2+27}$$

P 点最大变化率方向的方向余弦为

$$\cos\alpha = 0, \cos\beta = -\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+27}}, \cos\gamma = -\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{\pi^2+27}}$$

1-8 若标量函数为

$$\Phi = x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$$

试求在 $P(1,-2,1)$点处的梯度。

解 已知梯度$\nabla\Phi = \boldsymbol{e}_x\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\Phi}{\partial z}$，将标量函数 Φ 代入得

$$\nabla\Phi = \boldsymbol{e}_x(2x+y+3)+\boldsymbol{e}_y(4y+x-2)+\boldsymbol{e}_z(6z-6)$$

再将 P 点的坐标代入，求得标量函数 Φ 在P 点处的梯度为

$$(\nabla\Phi)_P = 3\boldsymbol{e}_x - 9\boldsymbol{e}_y$$

1-9 试证式(1-6-11)及式(1-6-12)。

证明 式(1-6-11)为$\nabla\cdot(C\boldsymbol{A}) = C\nabla\cdot\boldsymbol{A}$，该式左边为

$$\nabla\cdot(C\boldsymbol{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(CA_x)+\frac{\partial}{\partial y}(CA_y)+\frac{\partial}{\partial z}(CA_z) = C\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right) = C\nabla\cdot\boldsymbol{A}$$

即

$$\nabla\cdot(C\boldsymbol{A}) = C\nabla\cdot\boldsymbol{A}$$

式(1-6-12)为$\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{A}) = \Phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla\Phi$，该式左边为

$$\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(\Phi A_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\Phi A_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\Phi A_z) =$$

$$A_x\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\Phi\frac{\partial A_x}{\partial x}+A_y\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\Phi\frac{\partial A_y}{\partial y}+A_z\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\Phi\frac{\partial A_z}{\partial z} =$$

$$\Phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla\Phi$$

即

$$\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{A}) = \Phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla\Phi$$

1-10 试求距离$|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|$在直角坐标系、圆柱坐标系及球坐标系中的表示式。

解 在直角坐标系中

$$|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

在圆柱坐标系中，已知 $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi, z = z$，因此

$$|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|=\sqrt{(r_2\cos\phi_2-r_1\cos\phi_1)^2+(r_2\sin\phi_2-r_1\sin\phi_1)^2+(z_2-z_1)^2}=$$
$$\sqrt{r_2^2+r_1^2-2r_2r_1\cos(\phi_2-\phi_1)+(z_2-z_1)^2}$$

在球坐标系中,已知 $x=r\sin\theta\cos\phi,y=r\sin\theta\sin\phi,z=r\cos\theta$,因此

$$|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|=$$
$$\sqrt{(r_2\sin\theta_2\cos\phi_2-r_1\sin\theta_1\cos\phi_1)^2+(r_2\sin\theta_2\sin\phi_2-r_1\sin\theta_1\sin\phi_1)^2+(r_2\cos\theta_2-r_1\cos\theta_1)^2}=$$
$$\sqrt{r_2^2+r_1^2-2r_2r_1[\sin\theta_2\sin\theta_1\cos(\phi_2-\phi_1)+\cos\theta_2\cos\theta_1]}$$

1-11 已知两个位置矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 及 $\boldsymbol{r}_2$ 的终点坐标分别为(r_1,θ_1,ϕ_1)及(r_2,θ_2,ϕ_2),试证 $\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_2$ 之间的夹角 γ 为

$$\cos\gamma=\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1-\phi_2)+\cos\theta_1\cos\theta_2$$

证明 根据题意,两个位置矢量在直角坐标系中可表示为

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{e}_x r_1\sin\theta_1\cos\phi_1+\boldsymbol{e}_y r_1\sin\theta_1\sin\phi_1+\boldsymbol{e}_z r_1\cos\theta_1$$
$$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{e}_x r_2\sin\theta_2\cos\phi_2+\boldsymbol{e}_y r_2\sin\theta_2\sin\phi_2+\boldsymbol{e}_z r_2\cos\theta_2$$

已知两个矢量的标积为 $\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2=|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2|\cos\gamma$,这里 γ 为两个矢量的夹角。因此夹角 γ 为

$$\cos\gamma=\frac{\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2|}$$

式中,$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2=r_1r_2(\sin\theta_1\cos\phi_1\sin\theta_2\cos\phi_2+\sin\theta_1\sin\phi_1\sin\theta_2\sin\phi_2+\cos\theta_1\cos\theta_2)$

$$|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2|=r_1r_2$$

因此

$$\cos\gamma=\sin\theta_1\sin\theta_2(\cos\phi_1\cos\phi_2+\sin\phi_1\sin\phi_2)+\cos\theta_1\cos\theta_2=$$
$$\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1-\phi_2)+\cos\theta_1\cos\theta_2$$

1-12 试求分别满足方程式$\nabla\cdot[f_1(r)\boldsymbol{r}]=0$ 及$\nabla\times[f_2(r)\boldsymbol{r}]=0$ 的函数 $f_1(r)$及 $f_2(r)$。

解 在球坐标系中,为了满足

$$\nabla\cdot[f_1(r)\boldsymbol{r}]=[\nabla f_1(r)]\cdot\boldsymbol{r}+f_1(r)\nabla\cdot\boldsymbol{r}=r\frac{\partial f_1(r)}{\partial r}+3f_1(r)=0$$

即要求 $r\dfrac{\mathrm{d}f_1(r)}{\mathrm{d}r}+3f_1(r)=0\quad\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}f_1(r)}{f_1(r)}=-\dfrac{3\mathrm{d}r}{r}$,求得

$$\ln f_1(r)=-3\ln r+\ln C$$

即
$$f_1(r)=\frac{C}{r^3}$$

在球坐标系中,为了满足

$$\nabla \times [f_2(r)\boldsymbol{r}] = [\nabla f_2(r)] \times \boldsymbol{r} + f_2(r)\nabla \times \boldsymbol{r} = 0$$

由于$[\nabla f_2(r)] \times \boldsymbol{r} = 0$，$\nabla \times \boldsymbol{r} = 0$，即上式恒为零。故 $f_2(r)$可以是 r 的任意函数。

1-13 试证式(1-7-11)及式(1-7-12)。

证明 ①式(1-7-11)为$\nabla \times (C\boldsymbol{A}) = C\nabla \times \boldsymbol{A}$（$C$ 为常数）

令 $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z$，$C\boldsymbol{A} = CA_x\boldsymbol{e}_x + CA_y\boldsymbol{e}_y + CA_z\boldsymbol{e}_z$，则

$$\nabla \times (C\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ CA_x & CA_y & CA_z \end{vmatrix} = C\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = C\nabla \times \boldsymbol{A}$$

② 式(1-7-12)为$\nabla \times (\Phi\boldsymbol{A}) = \Phi\nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla\Phi \times \boldsymbol{A}$

令 $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z$，$\Phi\boldsymbol{A} = \Phi A_x\boldsymbol{e}_x + \Phi A_y\boldsymbol{e}_y + \Phi A_z\boldsymbol{e}_z$，则

$$\nabla \times (\Phi\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \Phi A_x & \Phi A_y & \Phi A_z \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial y}(\Phi A_z) - \frac{\partial}{\partial z}(\Phi A_y)\right]\boldsymbol{e}_x -$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\Phi A_z) - \frac{\partial}{\partial z}(\Phi A_x)\right]\boldsymbol{e}_y + \left[\frac{\partial}{\partial x}(\Phi A_y) - \frac{\partial}{\partial y}(\Phi A_x)\right]\boldsymbol{e}_z =$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}A_z - \frac{\partial\Phi}{\partial z}A_y\right)\boldsymbol{e}_x - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}A_z - \frac{\partial\Phi}{\partial z}A_x\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}A_y - \frac{\partial\Phi}{\partial y}A_x\right)\boldsymbol{e}_z +$$

$$\Phi\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x - \Phi\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_y + \Phi\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z =$$

$$\nabla\Phi \times \boldsymbol{A} + \Phi\nabla \times \boldsymbol{A}$$

若将式(1-7-12)的右边展开，也可证明。

1-14 试证 $\nabla \times \boldsymbol{r} = 0$，$\nabla \times \left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = 0$ 及$\nabla \times \left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = 0$。

证明 已知在球坐标系中，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度为

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \dfrac{\boldsymbol{e}_r}{r^2\sin\theta} & \dfrac{\boldsymbol{e}_\theta}{r\sin\theta} & \dfrac{\boldsymbol{e}_\phi}{r} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi \end{vmatrix}$$

对于矢量 $\boldsymbol{r}$，因 $A_r = r$，$A_\theta = 0$，$A_\phi = 0$，代入上式，且因 r 与角度 θ，ϕ 无关，那么，由上式可知$\nabla \times \boldsymbol{r} = 0$。

对于矢量$\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$，因 $A_r = 1$，$A_\theta = 0$，$A_\phi = 0$，显然$\nabla \times \left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = 0$。

对于矢量$\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$,因 $A_r=\frac{1}{r^2},A_\theta=0,A_\phi=0$,同理可知$\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=0$。

1-15 若 C 为常数,$\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{k}$ 为常矢量,试证:

① $\nabla e^{ck\cdot r}=C\boldsymbol{k}e^{ck\cdot r}$;

② $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}e^{ck\cdot r})=C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}e^{ck\cdot r}$;

③ $\nabla\times(\boldsymbol{A}e^{ck\cdot r})=C\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}e^{ck\cdot r}$。

证明 ①证明$\nabla e^{Ck\cdot r}=C\boldsymbol{k}e^{Ck\cdot r}$。

利用公式$\nabla F(\Phi)=F'(\Phi)\nabla\Phi$,则

$$\nabla e^{Ck\cdot r}=e^{Ck\cdot r}\nabla(C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=Ce^{Ck\cdot r}\nabla(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$$

而 $$\nabla(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=\nabla(k_xx+k_yy+k_zz)=\boldsymbol{e}_xk_x+\boldsymbol{e}_yk_y+\boldsymbol{e}_zk_z=\boldsymbol{k}$$

求得 $$\nabla e^{Ck\cdot r}=C\boldsymbol{k}e^{Ck\cdot r}$$

② 证明$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}e^{Ck\cdot r})=C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}e^{Ck\cdot r}$。

利用公式$\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{A})=\Phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla\Phi$,则

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}e^{Ck\cdot r})=\boldsymbol{A}\cdot\nabla(e^{Ck\cdot r})+e^{Ck\cdot r}\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\cdot\nabla(e^{Ck\cdot r})$$

再利用①的结果,则 $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}e^{Ck\cdot r})=C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}e^{Ck\cdot r}$

③ 证明$\nabla\times(\boldsymbol{A}e^{Ck\cdot r})=C\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}e^{Ck\cdot r}$

利用公式$\nabla\times(\Phi\boldsymbol{A})=\nabla\Phi\times\boldsymbol{A}+\Phi\nabla\times\boldsymbol{A}$,则

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}e^{Ck\cdot r})=\nabla(e^{Ck\cdot r})\times\boldsymbol{A}+e^{Ck\cdot r}\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(e^{Ck\cdot r})\times\boldsymbol{A}$$

再利用①的结果,则 $\nabla\times(\boldsymbol{A}e^{Ck\cdot r})=C\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}e^{Ck\cdot r}$。

1-16 试证 $\nabla^2\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right)=k^2\frac{e^{-kr}}{r}$,式中 k 为常数。

证明 已知在球坐标系中

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

则

$$\nabla^2\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right)\right]=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(-\frac{1}{r^2}e^{-kr}-\frac{k}{r}e^{-kr}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(-e^{-kr}-kre^{-kr})=\frac{1}{r^2}[(-k)e^{-kr}(-1-kr)+(-k)e^{-kr}]$$

$$=k^2\frac{e^{-kr}}{r}$$

即 $$\nabla^2\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right)=k^2\frac{e^{-kr}}{r}$$

1-17 试证$(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}-\frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{E}|^2$。

证明 利用公式

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

令上式中的 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$,则

$$\nabla|\boldsymbol{E}|^2=2(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{E}\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=2(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}-2(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E}$$

将上式整理后,即得

$$(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}-\frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{E}|^2$$

1-18 已知矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=q\delta(\boldsymbol{r})$,旋度 $\nabla\times\boldsymbol{F}=0$,试求该矢量场。

解 根据亥姆霍兹定理,$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=-\nabla\Phi(\boldsymbol{r})+\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$,其中

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V';\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

当 $\nabla\times\boldsymbol{F}=0$ 时,则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=0$,即 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=-\nabla\Phi(\boldsymbol{r})$。那么因 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=q\delta(\boldsymbol{r})$,求得

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{q\delta(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'=\frac{q}{4\pi r}$$

则

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=-\nabla\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r$$

1-19 已知某点在圆柱坐标系中的位置为 $\left(4,\frac{2}{3}\pi,3\right)$,试求该点在相应的直角坐标系及球坐标系中的位置。

解 已知直角坐标系和圆柱坐标系坐标变量之间的转换关系为

$$x=r\cos\phi,y=r\sin\phi,z=z$$

因此,该点在直角坐标系中的位置为

$$x=4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-2,y=4\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\sqrt{3},z=3$$

同样,根据球坐标系和直角坐标系坐标变量之间的转换关系,

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\theta=\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right),\phi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

可得该点在球坐标下的位置为

$$r=5,\theta=\arctan\left(\frac{4}{3}\right)\approx53^\circ,\phi=120^\circ$$

1-20 已知直角坐标系中的矢量 $\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{e}_x+b\boldsymbol{e}_y+c\boldsymbol{e}_z$,式中 a,b,c 均为常数,$\boldsymbol{A}$ 是常矢量吗?试求该矢量在圆柱坐标系及球坐标系中的表示式。

解 由于 $\boldsymbol{A}$ 的大小及方向均与空间坐标无关,故是常矢量。

已知直角坐标系和圆柱坐标系坐标变量之间的转换关系为

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\phi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right),z=z$$