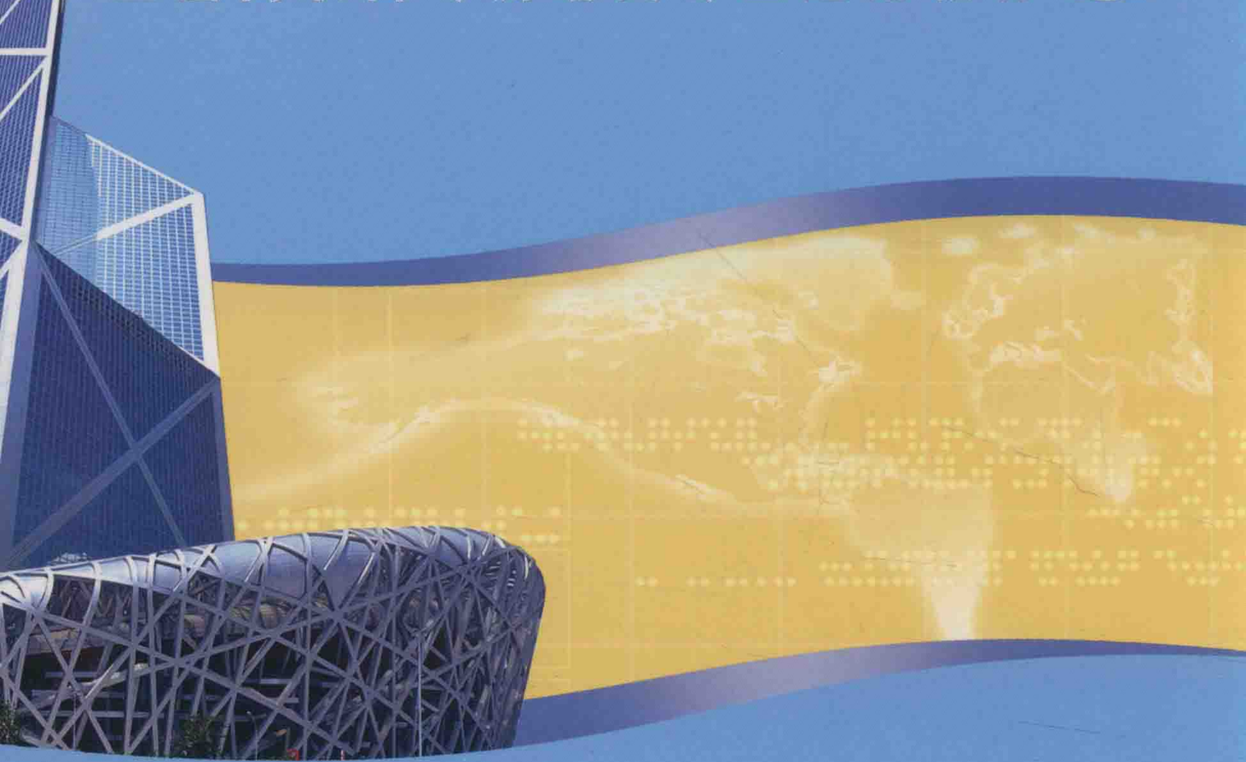
全国高职高专测绘类专业通用教材



测量平差

SURVEY ADJUSTMENT

聂俊兵　主编

测绘出版社

全国高职高专测绘类专业通用教材

测量平差

Survey Adjustment

聂俊兵 主编

测绘出版社

·北京·

内容简介

本书是根据高职高专测绘类专业通用教材编写委员会制定的编写规划,针对高职高专的特点,突出工学结合的特色而编写的。全书共分六章,主要内容包括:测量误差理论、测量平差原理、一维高程控制网测量平差、二维平面控制网测量平差、三维控制网测量平差和误差椭圆。附录包括测量平差课程设计和科傻平差软件简介。

本书可作为高职高专测绘类专业及相关专业测量平差课程的教学用书,也可供有关专业的工程技术人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

测量平差/聂俊兵主编. 一北京:测绘出版社,2010.1 (2017.1 重印)
全国高职高专测绘类专业通用教材
ISBN 978-7-5030-1958-6

Ⅰ. 测… Ⅱ. 聂… Ⅲ. 测量平差一高等学校:技术学校一教材 Ⅳ. P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 014064 号

责任编辑 杨蓬莲 **执行编辑** 万茜婷 **封面设计** 李伟 **责任校对** 董玉珍 **责任印制** 陈超

出版发行	测绘出版社	**电　　话**	010－83543956(发行部)
地　　址	北京市西城区三里河路 50 号		010－68531609(门市部)
邮政编码	100045		010－68531363(编辑部)
电子邮箱	smp@sinomaps.com	**网　　址**	www.chinasmp.com
印　　刷	北京建筑工业印刷厂	**经　　销**	新华书店
成品规格	184mm×260mm		
印　　张	10	**字　　数**	240 千字
版　　次	2010 年 1 月第 1 版	**印　　次**	2017 年 1 月第 5 次印刷
印　　数	11001－14000	**定　　价**	22.00 元

书　　号 ISBN 978-7-5030-1958-6/P・461

全国高职高专测绘类专业通用教材
编委会名单

参编学校及生产单位

（排名不分先后）

山西交通职业技术学院

山西建筑职业技术学院

天津铁道职业技术学院

无锡水文工程地质勘察院

中国科学院地理所

中国第二冶金建设有限责任公司

甘肃工业职业技术学院

甘肃林业职业技术学院

石家庄铁道学院

石家庄职业技术学院

本溪市桓仁满族自治县国土资源局

包头铁道职业技术学院

辽宁工程技术大学职业技术学院

辽宁地质工程职业学院

辽宁林业职业技术学院

辽宁省交通高等专科学校

辽宁科技学院

扬州环境资源职业技术学院

成都理工大学

江西环境工程职业学院

沈阳农业大学高等职业技术学院

张家口职业技术学院

武汉电力职业技术学院

郑州测绘学校

河北工程技术高等专科学校

河北地质职工大学

河北政法职业学院

河北省制图院

陕西铁路工程职业技术学院

徐州市众望装饰装修监理有限公司

徐州建筑职业技术学院

胶州市规划局

浙江水利水电高等专科学校

黑龙江农业职业技术学院

湖北水利水电职业技术学院

新疆工业高等专科学校

序

当今中国正处于国家信息化大潮之中，国家要通过推进信息化，促进现代化，加速我国经济、社会的发展。正是在国家信息化建设的大背景下促使测绘信息化的发展。国民经济建设和社会可持续发展对诸如时间、空间、属性这类地理空间信息或者说广义测绘信息的需求也在迅速增长。测绘学科和行业在国家信息化和现代化建设中发挥着越来越重要的作用。为了适应国家信息化建设的需求，测绘正开始步入信息化测绘新阶段。由此对测绘人才队伍建设提出了更高的要求。

我国的高等职业教育作为高等教育的重要组成部分，近年来得到了迅速发展，初步形成了适应我国社会主义现代化建设的高等职业教育体系，大大提高了服务社会的能力，也为我们测绘行业培养了大量高素质的技能型测绘专门人才。他们在全国测绘生产、企业部门，形成一支强有力的骨干力量。目前，我国的高职高专教育正处于探索和改革的重要阶段，其主要任务是加强内涵建设，提高教育质量，重点在于提高人才培养质量，因此要努力抓好实践教学和基础课两个课程体系建设，并使两个体系相互交融。通过课程体系、教学内容和教学方法的改革，让专业与职业有效结合，提高学生学习专业与市场需求的吻合度，增强就业竞争能力。因此在我国当前的高职高专教育的教学改革中，以工作过程为导向，突出“工学结合”，融“教、学、做”于一体的教学理念逐渐成为主导。

为了更好地配合高职高专教育教学改革，探索、开发与“工学结合”人才培养模式相适应的高职高专教育测绘类专业课程体系，加快培养能够满足生产、建设、服务和管理第一线需要的测绘类高技能实用人才，测绘出版社组织全国30多所高职高专院校中在教学一线工作的骨干教师和生产单位的专家，结合目前测绘技术的最新发展趋势及社会实际生产的技能需求，编写了这一套兼顾通用性与特色、适合高职高专教育测绘类专业的通用教材。

该套教材以高职高专教育教学改革的基本方向和总体要求为指导，从工作岗位和工作任务出发，以培养职业能力为本位，将生产中的实用技术、新技术更多地融入教材内容，很好地使行动导向与理论导向有机地结合，贯彻“工学结合”的编写主旨，表现出体系完整、联系紧密、通用性强、实用性好的特点，既适合高职高专教育测绘类专业教学使用，也可供相关专业工程技术人员学习参考，必将在推动测绘学科建设、促进高职高专教育测绘类专业教学改革和加快测绘高技能实用人才的培养等诸多方面发挥积极的推动作用。

宁津生

教育部高等学校测绘学科教学指导委员会主任
中国测绘学会测绘教育工作委员会主任
中国工程院院士

2009年6月

前言

本书是根据教育部《关于全国提高高等职业教育教学质量的若干意见》(教高[2006]16号)的文件精神，为配合高职高专教育教学改革，探索、开发与“工学结合”人才培养模式相适应的高职高专教育测绘类专业课程体系，组织全国20多所高职高专院校的骨干教师和生产单位的专家所编写的全国高职高专测绘类专业通用教材之一。

本书是按照基于工作过程的教学理念来编写的，在章节内容划分上突破了传统的以平差理论来划分的方式，全书可分为理论和项目两部分。

理论部分包括第1、2章。第1章介绍了测量误差理论。第2章则针对偶然误差处理的方法阐述了测量平差原理：首先从平差函数模型讲起，从必要观测到多余观测，从一般条件到限制条件的列立，然后得到附有限制条件的条件平差的一般基础方程和随机模型，最后根据最小二乘法 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}=\min$，按照求条件极值的方法求解，从而得到观测值的平差值；并重点介绍了条件平差和间接平差的内容。

项目部分以测量控制网的维数来组织，包括第3、4、5章，分别介绍了一维高程控制网测量平差、二维平面控制网测量平差和三维控制网测量平差的方法。结合测量平差工程项目的特点来安排章节内容的划分，其目的是为了提高学生的具体数据处理能力，使其掌握高程控制网、平面控制网及GPS基线控制网的平差计算方法。

误差椭圆部分本应放到第2章，但考虑到内容较多，单独编写成第6章。

附录1是一个为期一周的课程设计，通过给出一个边角网的观测数据，让学生按照平差的数据处理流程自己编程，并进行控制网平差，最后写出平差报告；附录2对在测量数据处理过程中常用的科傻软件的使用进行了介绍。

本书由石家庄职业技术学院聂俊兵担任主编，扬州环境职业技术学院雷晓霞、辽宁工程技术大学职业技术学院卜丽静任副主编。参编人员及分工如下：第1章由辽宁交通高等专科学校张慧慧编写；第2章由辽宁科技学院李泽和聂俊兵编写；第3、4章由雷晓霞编写；第5章由聂俊兵编写；第6章由卜丽静编写；附录由河北政法职业学院史素霞和聂俊兵编写。全书由聂俊兵负责统稿。

感谢各位参编老师的辛勤努力，感谢卢路娟、韩会娇的文字编辑工作，同时对本书所引用的有关资料的作者表示衷心的感谢。特别感谢武汉大学陶本藻教授和北京工业职业技术学院薄志毅教授对本书大纲所提出的宝贵意见，以及陶本藻教授对全书深入细致的审读和认真耐心的修改，在此也对其他所有人的关心和支持一并表示感谢。

书中难免有错误和不当之处，恳切希望使用本教材的教师和广大读者对本书提出宝贵意见，以便进一步修正和完善。

编者

2009年8月

目录

第 1 章　测量误差理论

测量误差理论主要研究测量误差的来源、性质及其产生和传播的规律，是解决测量工作中遇到的实际问题而建立起来的概念和原理的体系。要学好测量误差理论，首先应明确误差的基本公理。

§1.1　误差公理

1.1.1　观测值

误差理论的研究对象就是带有误差的观测值。

所谓观测值是指用一定的仪器、工具、传感器或其他手段获取的地球和其他实体的有关空间分布信息的数据。观测值可以是直接测量的结果，也可以是经过某种变换的结果。任何观测值总是包含信息和干扰两部分，观测就是为了获取有用的信息。干扰也称为误差，是除了信息以外的部分，要设法予以排除或减弱其影响。

若观测值有 $L_1, L_2, \cdots, L_n$，可将它们表示成一个向量 $\boldsymbol{L} = [L_1 \quad L_2 \quad \cdots \quad L_n]^{\mathrm{T}}$，称为观测向量。

1.1.2　观测值函数

根据测量方式，观测值可分为直接观测值和间接观测值。

直接观测值是指直接从仪器或量具上读出待测量的数值。例如，钢尺量距的读数，经纬仪或全站仪测某方位的度盘读数，水准测量中每一站的前、后视读数都是直接观测值。然而，在测量工作中，有些未知量往往不能直接测得，而需要由其他的直接观测值按一定的函数关系计算出来，这样的测量值称为间接观测值。这类例子很多，如水准测量中，高差 $h = a - b$ 就是直接观测值 a、b 的函数，这里的函数 h 就是间接观测值。

又如图 1-1 所示，A 和 B 为已知点，则 $\alpha_{BA} = \arctan\left(\dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}\right)$为已知。另观测了边长 S 和角度 β，则可知边长 BP 的坐标方位角为

$$\alpha_{BP} = \alpha_{BA} + \beta \tag{1-1}$$

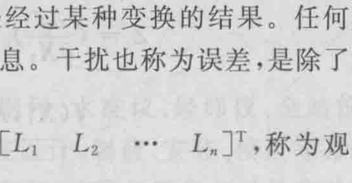


图 1-1　极坐标示意

P 点坐标为

$$x_P = x_B + S \times \cos \alpha_{BP}, \quad y_P = y_B + S \times \sin \alpha_{BP} \tag{1-2}$$

在这个例子中边长 S 是直接观测值，而角度 β 是由水平方向 BP 与 BA 的度盘读数差计算得到的，因此角度 β 是间接观测值；同样，坐标方位角 α_{BP} 与 P 点坐标 x_P、y_P 都是关于直接观测值的函数，即为间接观测值。

一个量是否是直接观测值不是绝对的。随着科学技术的发展，测量仪器的改进，很多原来

只能间接测量的量,现在可以直接测量了。在测量工作中,现在大多数所求的量还都是间接测量值,即观测值的函数。因此,我们需要了解下面观测值函数的有关知识。

由式(1-1)可知,α_{BP} 是关于 β 的线性函数;由式(1-2)可知,x_P、y_P 是关于观测值 S 和 α_{BP} 的函数,又由于 α_{BP} 为三角函数,可见这是一个非线性函数式。

设观测值 $\underset{n\times 1}{\boldsymbol{X}}$ 的函数的一般形式为 $Z=f(\boldsymbol{X})$ 或表示为

$$Z=f(X_1,X_2,\cdots,X_n) \tag{1-3}$$

在实际工作中,如果是非线性函数,往往要将非线性函数化成线性函数,具体步骤如下。

假定观测值 $\underset{n\times 1}{\boldsymbol{X}}$ 有近似值 $\underset{n\times 1}{\boldsymbol{X}^0}=[X_1^0\quad X_2^0\quad \cdots\quad X_n^0]^{\mathrm{T}}$,将函数式 $Z=f(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 按泰勒级数在点 $X_1^0,X_2^0,\cdots,X_n^0$ 处展开为

$$\begin{aligned}Z=&f(X_1^0,X_2^0,\cdots,X_n^0)+\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)_0(X_1-X_1^0)+\\&\left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)_0(X_2-X_2^0)+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial X_n}\right)_0(X_n-X_n^0)+(\text{二次以上项})\end{aligned} \tag{1-4}$$

式中,$\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)_0$ 是函数对各个变量所取的偏导数代入近似值 $\boldsymbol{X}^0$ 所算得的数值,它们都是常数。

当 $\boldsymbol{X}^0$ 与 $\boldsymbol{X}$ 非常接近时,上式中二次以上各项很微小,可以略去,将式(1-4)写为

$$\begin{aligned}Z=&\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)_0X_1+\left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)_0X_2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial X_n}\right)_0X_n+\\&f(X_1^0,X_2^0,\cdots,X_n^0)-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)_0X_i^0\end{aligned} \tag{1-5}$$

令

$$\boldsymbol{K}=[k_1\quad k_2\quad \cdots\quad k_n]=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)_0\quad \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)_0\quad \cdots\quad \left(\frac{\partial f}{\partial X_n}\right)_0\right]$$

$$k_0=f(X_1^0,X_2^0,\cdots,X_n^0)-\sum_{i=1}^{n}k_iX_i^0$$

得

$$Z=k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_nX_n+k_0=\boldsymbol{KX}+k_0 \tag{1-6}$$

这样,就将非线性函数式化成了线性函数式。

如果我们换一种思路,引入高等数学变量和函数微分的知识,变量的误差与函数的误差之间的关系可近似地用函数的全微分来表示。

即令

$$\mathrm{d}X_i=X_i-X_i^0\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}=[\mathrm{d}X_1\quad \mathrm{d}X_2\quad \cdots\quad \mathrm{d}X_n]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathrm{d}Z=Z-Z^0=Z-f(X_1^0,X_2^0,\cdots,X_n^0)$$

则式(1-4)可写为

$$\mathrm{d}Z=\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)_0\mathrm{d}X_1+\left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)_0\mathrm{d}X_2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial X_n}\right)_0\mathrm{d}X_n=\boldsymbol{K}\mathrm{d}\boldsymbol{X} \tag{1-7}$$

可见,式(1-7)是非线性函数式(1-3)的全微分。

因此,以后非线性函数线性化时,只要对非线性函数按式(1-7)进行全微分,而不必用泰勒级数展开。

1.1.3 误差公理

任何一个被观测的量,客观上总是存在着代表其真正大小的数值,简称真值。在测量工作

中，由于测量仪器、外界条件、测量人员等诸多因素的影响，对某量的测量值不可能是无限精确的，即测量中的误差是不可避免的，是实践验证了的公理，称为误差公理。我们把对某量（如某一个角度、某一段距离或某两点间的高差等）进行多次观测，所得的各次观测结果存在着差异，而实质为每次测量所得的观测值与该量的真值之间存在着差值。我们将这个差值称为测量误差，也称观测误差，用 Δ 表示，即

$$\text{测量误差}(\Delta)=\text{真值}-\text{观测值}$$

测量误差存在于一切测量之中，贯穿于测量过程的始终。随着科学技术水平的不断提高，测量误差可以被控制得越来越小，但是永远不会降低到零。

既然观测值一定存在误差，那么导致观测值的函数也必然存在误差。观测值的误差是通过什么样的规律传递给函数的呢？这个规律就是误差传播律，我们将在§1.5中具体阐述。

§1.2 误差分类

1.2.1 误差来源

测量误差产生的原因主要有以下3个方面。

1.仪器设备

测量工作是利用测量仪器进行的。常用测量仪器设备有钢尺、水准仪、经纬仪、全站仪、GPS等，每一种测量仪器都具有一定的精确度，同时仪器本身在设计、制造、安装、校正等方面也存在一定的误差，因此会对测量结果产生一定影响。例如，钢尺的实际长度和名义长度总存在差异，由此所测的长度总存在尺长误差；又如水准仪的视准轴不平行于水准管轴，也会使观测的高差产生 i 角误差；再如经纬仪度盘的偏心差；同样，全站仪、GPS等仪器的观测结果也会有误差的存在。

2.观测者

由于观测者的感觉器官的鉴别能力存在一定的局限性，所以观测者对仪器进行对中、整平、瞄准、读数等操作都会产生误差。例如，在厘米分划的水准尺上，由观测者估读毫米数，则毫米级估读误差是完全有可能产生的。另外，观测者的技术熟练程度、工作态度也会给观测成果带来不同程度的影响。

3.外界环境

观测时所处的外界环境的温度、风力、大气折光、湿度、气压等条件时刻在发生变化，观测成果也将随之变化，从而使测量结果产生误差。例如，温度变化使钢尺产生伸缩，大气折光使望远镜的瞄准产生偏差等。

上述三方面的因素是观测误差的主要来源，因此把这三方面因素综合起来称为观测条件。观测条件的好坏与观测成果的质量有着密切的联系：观测条件的优劣直接影响观测成果的质量，反之观测成果的质量也反映观测条件的好坏。但是，不管观测条件如何，观测的结果都会受到上述因素的影响而产生这样或那样的误差，因此测量中的误差是不可避免的。当然，在客观条件允许的限度内，我们可以而且必须确保观测成果具有较高的质量。

我们把在同一观测条件下的观测称为等精度观测，反之，称为不等精度观测；而相应的观测值称为等精度观测值和不等精度观测值。

1.2.2 误差分类

观测误差按其对观测成果的影响性质，可分为粗差、系统误差和偶然误差3种。

1. 粗差

粗差就是测量中出现的错误，如读错、记错、照错等。这主要是由于工作中的粗心大意而引起的。一般粗差值很大，不仅大大影响测量成果的可靠性，甚至造成返工，给工作带来难以估量的损失，因此必须采取适当的方法和措施，杜绝粗差的发生。

2. 系统误差

在相同的观测条件下，对某量进行一系列的观测，若观测误差的符号及大小保持不变，或按一定的规律变化，这种误差称为系统误差。这种误差往往随着观测次数的增加而逐渐积累，对测量成果质量的影响也特别显著。在实际工作中，应该采用各种方法来消除或减弱系统误差对观测成果的影响，以达到实际可以忽略不计的程度。

3. 偶然误差

在相同的观测条件下进行一系列观测，若误差的大小及符号都表现出偶然性，即从单个误差来看，该误差的大小及符号没有规律，但从大量误差的总体来看，具有一定的统计规律，这类误差称为偶然误差或随机误差。

例如，经纬仪测角误差是由照准误差、读数误差、外界条件变化所引起的误差和仪器本身不完善而引起的误差等的综合结果。而其中每一项误差又是由许多偶然因素所引起的小误差。例如，照准误差可能是由于照准部旋转不正确、脚架或觇标的晃动与扭转、风力或风向的变化、目标的背影、大气折光等偶然因素影响而产生的小误差。因此，测角误差实际上是由许许多多这样微小的误差项构成，而每项微小误差又随着偶然因素的影响不断变化，其数值的大小和符号的正负具有随机性。这样，由它们所构成的误差，就其个体而言，无论是数值的大小或符号的正负都是不能事先预知的，这种性质的误差即为偶然误差。

当观测值中剔除了粗差，排除了系统误差的影响，或者与偶然误差相比系统误差处于次要地位时，占主导地位的偶然误差就成为了我们研究的主要对象。如何处理这些随机变量的偶然误差，是测量平差这一学科所研究的主要内容。在§1.3中将详细介绍偶然误差的统计特性。

1.2.3 粗差的处理

粗差是一种大量级的观测误差，在测量成果中是不允许粗差存在的。在观测数据中应设法避免出现粗差，处理粗差的办法主要有以下两种。

(1)采用3σ准则。统计理论表明，测量值的偏差超过3σ的概率已小于1%。因此，可以认为偏差超过3σ的测量值是由其他因素或过失造成的，为异常数据，应当剔除。

(2)进行必要的重复观测和多余观测，通过必要而又严格的检核、验算等方式均可发现粗差。国家测绘机构制定的各类测量规范和细则，也能起到防止粗差出现和发现粗差的作用。

含有粗差的观测值都不能采用。因此，一旦发现粗差，该观测值必须舍弃或重测。尽管观测过程十分小心，粗差有时也在所难免。因此，如何在大量的观测数据中发现和剔除粗差，或在数据处理中削弱含粗差的观测值对平差成果的影响，乃是测绘界十分关注的课题之一。

1.2.4　系统误差的处理

1. 系统误差的特点

系统误差的特点是测量结果向一个方向偏离，其数值按一定规律变化，具有重复性、单向性。我们应根据具体的测量条件、系统误差的特点，找出产生系统误差的主要原因，从而采取适当措施降低它的影响。

系统误差的产生主要有以下几个方面：

1)仪器误差

指由于仪器制造或校正不完善而造成的误差。例如，角度测量时经纬仪的视准轴不垂直于横轴而产生的视准轴误差，水准尺刻划不精确所引起的读数误差。

2)环境误差

指外界环境(光线、温度、湿度、电磁场等)对测量仪器的影响所产生的误差。例如，测角时因大气折光而产生的角度误差。

3)理论误差(方法误差)

指由于测量所依据的理论本身的近似性，或测量条件不能达到理论所规定的要求，抑或是测量方法本身不完善所带来的误差。例如，钢尺量距时外界温度与仪器检定时温度不一致所引起的距离误差。

4)人为误差

指由于观测者个人感官和运动器官的反应或习惯不同而产生的误差。例如，由于观测者照准目标时总是习惯于偏向中央某一侧而使观测结果带有系统误差。

需要注意的是，由于系统误差总是使测量结果偏向一边，或者偏大，或者偏小，因此，多次测量求平均值并不能消除系统误差。

2. 系统误差的处理

消除和减少系统误差的方法一般有以下3种：

(1)检校仪器，把系统误差降低到最小程度。例如每次水准测量前都要进行i角检验，对i角误差超限的仪器，应校正后才能用于观测。

(2)在观测方法和观测程序上采用必要的措施，限制或削弱系统误差的影响。这是消除系统误差的主要方法。

如测水平角时，采用盘左、盘右观测并应在每个测回起始方向上改变度盘的配置等；采用方向观测法测角时，为了检查水平度盘在观测过程中是否发生变动，应计算归零误差。水准测量中，应保证前后视距尽量相等，以减弱i角影响。在水准观测过程中，由于水准仪和水准标尺的自重对地面施加了一定荷载，随安置时间的延长会产生连续的沉降。因此在一测站的观测过程中，须采用后—前—前—后的观测顺序减弱其影响；对于整条水准线路来说，应进行往返观测，并取往测高差与返测高差的中数作为一条线路最后的观测高差。这样做可以使得在观测过程中由仪器与标尺下沉所引起的观测高差大部分得到消除。另外，外业观测一测段设站时一定要设为偶数站以消除标尺零点差。

(3)找出产生系统误差的原因和规律，对观测值进行系统误差的改正。

如在钢尺量距中，某钢尺的注记长度为30 m，经鉴定后，它的实际长度为30.016 m，即每量一整尺，就比实际长度少0.016 m，也就是每量一整尺段就有+0.016 m的系统误差。这种误

差的数值和符号是固定的，误差的大小与距离成正比，若丈量了5个整尺段，则长度误差为

$$5\times(+0.016)=+0.080\ (\mathrm{m})$$

若用此钢尺丈量的结果为167.213 m，则实际长度为

$$167.213+\frac{167.213}{30}\times(+0.016)=167.213+0.089=167.302\ (\mathrm{m})$$

因此，钢尺量距时，要计算尺长改正数，并对丈量结果进行改正，从而消除系统误差。

1.2.5 测量平差的任务

由于观测结果不可避免地存在着偶然误差，在实际工作中，为了提高成果的质量，防止错误发生，通常要使观测值的个数多于未知量的个数，也就是要进行多余观测。例如，一个平面三角形，只需要观测其中的两个内角，即可决定它的形状，但通常观测三个内角。由于偶然误差的存在，通过多余观测必然会发现观测结果之间所存在的不一致，或不符合应有关系而产生的不符值。因此，必须对这些带有偶然误差的观测值进行处理，消除不符值，得到观测量最可靠的结果。由于这些带有偶然误差的观测值是一些随机变量，因此可以根据概率统计的方法来求出观测量的最可靠结果，这就是测量平差的主要任务之一。测量平差的另一个主要任务是评定测量成果的精度。

概括来说，测量平差的任务就是：①对一系列带有观测误差的观测值，运用概率统计的方法来消除它们之间的不符值，求出未知量的最可靠值；②评定测量成果的精度。

§1.3 偶然误差的统计特性

偶然误差是一种随机变量，一组误差表面上没有规律，但其总体具有一定的统计规律，即在相同观测条件下，大量偶然误差的分布表现出一定的统计规律性，因此我们可以应用概率统计的方法来研究偶然误差的规律性。

为了便于理解，我们先引入一个直观的例子。大家都熟悉"抛硬币"的游戏。如果我们抛次数较少，正、反面出现的频率是难以预计的，可能是正面，也可能是反面。但是如果连续抛无数次，正反面出现的频率就会趋近相等，表现出统计规律性。

1.3.1 偶然误差的表示方法

为了研究偶然误差的统计规律性，我们可以用下列方法来表示。

1. 真误差

设进行了 n 次观测，各观测值为 $L_1,L_2,\cdots,L_n$，观测量的真值为 $\widetilde{L}_1,\widetilde{L}_2,\cdots,\widetilde{L}_n$。由于各观测值都带有一定的误差，所以每一个观测值的真值 $\widetilde{L}_i$（或 $E(L_i)$）与观测值 L_i 之间必存在一个差数，设为

$$\Delta_i=\widetilde{L}_i-L_i \tag{1-8}$$

称 Δ_i 为真误差（在此仅包含偶然误差），有时简称为误差。若记

$$\underset{n\times1}{\boldsymbol{L}}=[L_1\quad L_2\quad\cdots\quad L_n]^{\mathrm{T}}$$

$$\underset{n\times1}{\widetilde{\boldsymbol{L}}}=[\widetilde{L}_1\quad \widetilde{L}_2\quad\cdots\quad \widetilde{L}_n]^{\mathrm{T}}$$

$$\underset{n\times1}{\boldsymbol{\Delta}}=[\Delta_1\quad \Delta_2\quad\cdots\quad \Delta_n]^{\mathrm{T}}$$

则有

$$\boldsymbol{\Delta}=\widetilde{\boldsymbol{L}}-\boldsymbol{L} \tag{1-9}$$

从概率论与数理统计的观点可知，当只含偶然误差时，可以用被观测值的数学期望表示该观测值的真值，即

$$E(\boldsymbol{L})=[E(L_1)\quad E(L_2)\quad \cdots\quad E(L_n)]^{\mathrm{T}}=[\widetilde{L}_1\quad \widetilde{L}_2\quad \cdots\quad \widetilde{L}_n]^{\mathrm{T}}=\widetilde{\boldsymbol{L}}$$

则有

$$\boldsymbol{\Delta}=E(\boldsymbol{L})-\boldsymbol{L} \tag{1-10}$$

这里用观测值的真值与观测值之差定义真误差，而有些教材和文献上用观测值与观测值的真值之差定义真误差。这两种定义方式下的真误差仅仅是符号相反，对于后续各种计算公式的推导没有影响。

2. 误差分布表

在某测区，相同的条件下独立地观测了 358 个三角形的全部内角，由于观测值带有偶然误差，故各三角形 3 个内角观测值之和不等于其真值 180°。各个三角形内角和的真误差为

$$\Delta_i=180°-(L_1+L_2+L_3)_i\quad (i=1,2,\cdots,358)$$

式中，$(L_1+L_2+L_3)_i$ 表示各三角形内角和的观测值。

现取误差区间的间隔 $\mathrm{d}\Delta$ 为 0.20″，将这一组误差按其正负号与误差值的大小排列，并统计误差出现在各区间内的个数 v_i，以及“误差出现在某个区间内”这一事件的频率 v_i/n ($n=358$)，其结果列于表 1-1 中。

表 1-1　某测区三角形内角和的误差分布

误差值/(″)	小于 −1.6	−1.6	−1.4	−1.2	−1.0	−0.8	−0.6	−0.4	−0.2	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	大于 1.6
个 数	0	4	6	13	17	23	33	40	45	46	41	33	21	16	13	5	2	0
频率/‰	0	11	17	36	47	64	92	112	126	128	115	92	59	45	36	14	6	0
$\frac{v_i}{n\mathrm{d}\Delta}\times 10^{-3}$	0	55	85	180	235	320	460	560	630	640	575	460	295	225	180	70	30	0

从表 1-1 可以看出，偶然误差具有以下性质：

(1)在一定的观测条件下，偶然误差的绝对值不会超过一定的限值，也称有界性；

(2)绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的机会多，也称单峰性；

(3)绝对值相等的正、负误差出现的机会基本相等，也称对称性；

(4)偶然误差的算术平均值随着观测次数的无限增加而趋于零，也称补偿性。

3. 直方图法

前例中的误差分布情况，除了采用表 1-1 的形式表达外，还可用直方图来表达。例如，以横坐标表示误差的大小，纵坐标表示各区间内误差出现的频率除以区间间隔的值，即$\frac{v_i}{n\mathrm{d}\Delta}$，根据表 1-1 的数据即可绘制出如图 1-2 所示的直方图。直方图中每一个误差区间上的长方条面积就代表误差出现在该区间内的频率，例如图 1-2 中画斜线的长方条面积就代表误差出现在

0.4″～0.6″区间内的频率为0.092，因此它形象地表示了误差分布的情况。

4.误差概率分布曲线——正态分布曲线

在同一观测条件下，随着观测个数的无限增多，即 $n\to\infty$ 时，误差出现在各区间的频率也就趋于一个确定的数值，这就是误差出现在各区间的概率。也就是说，一定的观测条件对应着一种确定的误差分布，若 $n\to\infty$，$\mathrm{d}\Delta\to 0$，图1-2中各长方条顶边所形成的折线将变成一条如图1-3所示的光滑曲线。该曲线就是误差概率分布曲线，或称为误差分布曲线。

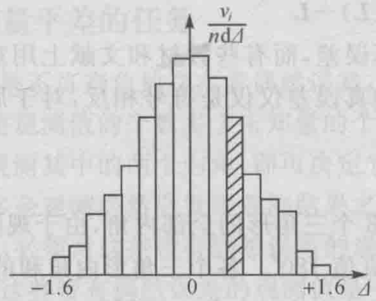


图1-2 误差分布直方图

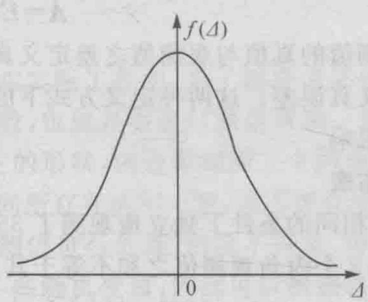


图1-3 误差概率分布曲线

由此可见，偶然误差的频率分布随着 n 的逐渐增大，都是以正态分布为其极限的。通常称偶然误差的频率分布为其经验分布，而将正态分布称为它们的理论分布。这样 Δ 的概率密度公式为

$$f(\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \tag{1-11}$$

式中，σ 为标准差，在测量上称为中误差。

而误差出现在某一区间内的概率 $P(\Delta)$ 为

$$P(\Delta)=f(\Delta)\mathrm{d}\Delta \tag{1-12}$$

1.3.2 偶然误差的分布特性

通过以上讨论，可以进一步用概率术语概括偶然误差的几个特性：

(1)在一定的观测条件下，误差的绝对值有一定的限值，换言之，超出一定限值的误差出现的概率为零；

(2)绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的概率大；

(3)绝对值相等的正负误差出现的概率相同；

(4)偶然误差的数学期望为零，即 $E(\Delta)=0$，换言之，偶然误差的理论平均值为零，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=0 \tag{1-13}$$

式中，$[\Delta]$ 表示 $\sum_{i=1}^{n}\Delta_i$。

偶然误差的第四个特性是由前3个特性导出的。因为在大量的偶然误差中，正、负误差有互相抵消的性能，当观测次数无限增加时，真误差的算术平均值必然趋向于零。

对于一系列的观测而言，不论其观测条件好坏，也不论是对同一个量还是对不同的量进行观测，只要这些观测是在相同的条件下独立进行的，则其所产生的一组偶然误差必然都具有上