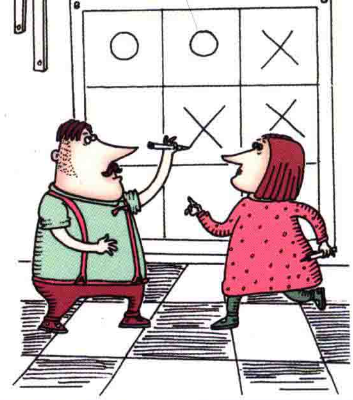
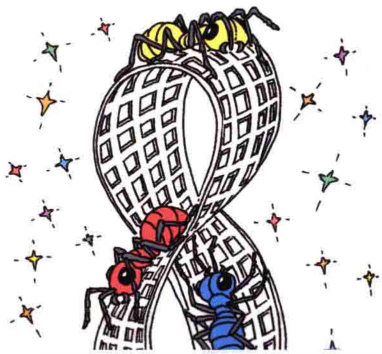


加德纳趣味数学

经典汇编

博弈论、手指算术及默比乌斯带

马丁·加德纳 著　　黄峻峰 译



上海科技教育出版社

加德纳趣味数学

经典汇编

博弈论、手指算术及默比乌斯带

马丁·加德纳 著　黄峻峰 译

上海科技教育出版社

责任编辑 李 凌
装帧设计 李梦雪 杨 静

·加德纳趣味数学经典汇编·

博弈论、手指算术及默比乌斯带

[美]马丁·加德纳 著
黄峻峰 译

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 技 教 育 出 版 社 出版

(上海市冠生园路393号 邮政编码200235)
上海世纪出版股份有限公司发行中心发行
www.ewen.co www.sste.com
各地新华书店经销 常熟文化印刷有限公司印刷
ISBN 978-7-5428-6428-4/O·1014
图字09-2013-852号

开本720×1000 1/16 印张10.5
2017年1月第1版 2017年1月第1次印刷
定价:28.00元

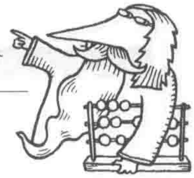
序

许多读者可能不知道加德纳魔术的范围有多大。他是一个拥有高超技巧的艺术家和数以百计魔术游戏的发明者。他在高中时期最早发表的作品，都投给了美国的魔术期刊《斯芬克斯》(*The Sphinx*)。加德纳喜欢给那些有幸认识他的人表演近景魔术，他喜欢在地板上弹一个小圆面包(小圆面包会像一个橡皮球一样反弹回来)，吞下一把餐刀，或者把借来的戒指套在橡皮筋上。他特别喜欢看似违反拓扑定律的技巧。

另一种完全不同类型的魔术显示了加德纳向外行人解释重要数学思想的能力，他总是有办法让他们渴望知道更多。不像其他的数学科普作家，专业人士和业余爱好者同样喜欢加德纳的作品。当问到他如何驾驭这一点时，他总是坚持认为秘密恰恰是他缺乏高深的知识。在大学期间，他一门数学课程都没选，直到1989年，他才与他人合写了一篇有关新发现的正式论文。

虽然加德纳自学数学，但他影响了许多专业学者的生活，包括我们。例如，加德纳通过出版他的一些数学魔术思想，将一个失控的魔术少年转变成崭露头角的数学家，并且后来帮助这位青年找到了他的研究方向。另外，在加德纳为了创造新的谜题而努力理解某些特定谜题的过程中，萌生了许多富于想象力的研究问题。

加德纳的成功来之不易。1936年他从芝加哥大学毕业，获得哲学学士学位，之后成为塔尔萨市的一名新闻记者，开始了他的写作生涯，后来又在芝加



哥大学的媒体关系办公室当撰稿人。第二次世界大战期间在海军服役4年后，他搬到了曼哈顿，开始将小说卖给《时尚先生》(*Esquire*)，并成为《矮胖子杂志》(*Humpty Dumpty S Magazine*)的一名编辑。经过8年为5—8岁的小读者创作稀奇古怪的活动特辑，以及写故事和诗歌后，加德纳在《科学美国人》(*Scientific American*)上开始了他著名的专栏。在此之前，知情者告诉我们，多年来他住在狭小昏暗的房间里，穿着衣领磨损的上衣和有破洞的裤子，他的午餐经常被缩减为咖啡和一块丹麦面包。

加德纳为《科学美国人》专栏投入了大量的精力。他曾经告诉我们，每个月撰写专栏文章外剩下的时间只有短短几日。他离开《科学美国人》的主要原因是需要时间来撰写非数学主题的书和文章。他现在是四十多卷图书的作者，涉及的领域包括科学、哲学、文学以及数学。由他撰写的长期脱销的神学小说《彼得·弗罗姆的飞行》(*The Flight of Peter Fromm*)，1989年由法劳·斯特劳斯·吉鲁出版公司再版，他的许多书是文学随笔和书评集。

我们最近拜访了加德纳。我们中的一人给他表演了一个他以前没看到过的魔术——一个奇怪的假切牌技巧，他所表现出的热情和孩子似的惊奇深深打动了我们。年过七旬，他仍然像在中学读书时那样，急切地想要掌握被魔术师称为新“步骤”的技巧。

格雷厄姆(Ronald L. Graham)
AT&T贝尔实验室和罗格斯大学
迪亚科尼斯(Persi Diaconis)
哈佛大学
1989年秋

前言

这是我的数学游戏专栏内容的第八本集子。自1956年12月以来，这些游戏每月出现在《科学美国人》上。和前几本一样，栏目内容经过了修改、更新，并增加了参考书目和忠实读者提供的有价值的新材料。

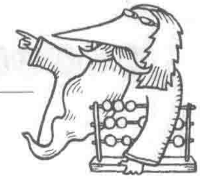
其中有一位读者，他不擅长数学但喜欢阅读栏目内容，经常问："你为什么不能关照一下像我这样的读者，给我们提供一些你经常使用但很少给出定义的术语表呢？"

好的，亲爱的读者，下面就是你们要的术语表。该术语表按英文字母顺序排列，即使最卑微的数学家也对它烂熟于心，大多数读者只要瞥一眼就行。但如果你拥有冒险的灵魂，看不懂大部分数学书，却出于某个奇怪的原因决定认真地研读本书，你会发现在阅读本书之前，值得先看一遍这个简洁、非正式的术语表。

算法（Algorithm）：解决一个问题的过程，通常是极为枯燥的重复步骤，除非你用电脑替你完成。当你将两个大数相乘，核对你的支票簿，洗盘子，修剪草坪时，你都在应用算法。

组合（Combination）：一个集合的子集，不考虑顺序，如果集合是字母表，子集CAT是与CTA，ACT，TAC等相同的三个对象的组合。

组合数学（Combinatorial mathematics）：研究组合排列的学问。尤其关于满



足特定条件的排列是否可能，若可能，那么有多少种可能的排列。

例如，幻方，数论中古代组合问题的解。能否将数字1到9放在一个方阵中，使得每行、每列、以及两条主对角线上的三个数之和都相等？可以。有多少种放法可以做到这一点？如果旋转和映射不计为不同的话，只有一种。能否将这九个数排列成任意两个和都不相同，而且所有的和是连续的数？不能。

合数(Composite number)：具有两个或两个以上素因数的整数。换句话说，0，1，-1以外不是素数的整数就是合数。最小的几个正合数为：4，6，8，9，10。1234567是素数吗？不是，它有两个素因数，所以是合数。

计数数(或自然数)(Counting numbers)：1，2，3，4，…。

数字(Digits)：0，1，2，3，4，5，6，7，8，9是十进制的10个数字。0，1是二进制的两个数字；0，1，2是三进制的数字；更高数系以此类推。一个以12为基的计数法有12个数字。

丢番图方程(Diophantine equation)：字母(未知量)代表整数的方程。这类方程用“丢番图分析法”求解。

e：π之后人人皆知的超越数。当n趋向无限大时是$(1+1/n)^n$的极限。在十进制记数法中，其值为2.718 281 828…，1828四个数字的疯狂重复完全是巧合。

整数(Integers)：包括自然数，负整数和零。

无理数(Irrational numbers)：不是整数的实数，并且在十进制记数法中，它们是不循环的无限小数，π、e、$\sqrt{2}$都是无理数。

模(Module)：当我们说一个数(模k)等于n，意思是这个数除以k时，余数是n。例如，17=5(模12)，因为17除以12余数为5。

***n*维空间**(N-space)：一个n维欧几里得空间。一条线是一维空间，一个平面是二维空间，这个世界处于三维空间中，一个超正方体是一个四维空间超立方体。

非负整数(Nonnegative integers):0,1,2,3,4,5,…。

***n*阶**(Order *n*):一种用非负整数标记数学对象将其分类的方法。若我们在一侧数国际象棋棋盘的方格,它是一个8阶的方阵,如果我们在一侧数国际象棋棋盘的线而不是格子,则它是一个9阶方阵。

排列(Permutation):一个集合的有序子集。如果集合是字母表,CAT,CTA,ACT等等则是三个字母的相同子集的不同排列。红色、蓝色、白色是红色、白色和蓝色的一个排列。

多面体(Polyhedron):一个由多边形边界围起来的立体图形。四面体是有4个面的多面体,立方体是有6个面的多面体。

素数(Prime):一个整数,不包括0,1,-1。除了其自身和1以外,不能被其他整数整除。最前面的几个正素数是2,3,5,7,11,13,17,19,…,有两个有趣的素数1 234 567 891和11 111 111 111 111 111 111 111。已知的最大素数是1985年找到的,它是$2^{216091}-1$,有65050位数。

有理数(Rational numbers):整数和分数线上、下都是整数的分数统称为有理数。在十进制记数法中,有理数或者没有小数部分,或者有有限的小数部分,或者有带循环节的小数。

实数(Real numbers):有理数和无理数。实数是相对于虚数而言的,如-1的平方根即是虚数,尽管虚数与实数一样真实。

倒数(Reciprocal):一个分数上下颠倒。$\frac{2}{3}$的倒数是$\frac{3}{2}$,3(或$\frac{3}{1}$)的倒数是$\frac{1}{3}$,1的倒数是1。

集合(Set):任何事物的集。如实数,自然数,奇数,素数,字母表,你头上的头发,这一页上的词,国会议员,等等。

奇点(Singularity):当一个或多个变量具有特定值时,使一个方程(或由一

个方程表示的物理过程)发生奇特状态的某个点位或时刻。如果你在空中向上抛一个球,球向上飞的轨迹在顶点时达到奇点,因为在那一刻球的速度降到零。根据相对论,宇宙飞船的速度无法超过光速,因为在光速时关于长度、时间和质量的方程到达奇点,长度变为零,时间停止,质量趋于无穷大。

这个前言就要到达突然停止的奇点。

马丁·加德纳

目录

序

前言

1 第1章 无之论

21 第2章 无事生非

31 第3章 博弈论,猜纸牌游戏,散兵坑游戏

49 第4章 阶乘的怪事

65 第5章 鸡尾酒杯中的樱桃和其他问题

83 第6章 纸牌

95 第7章 手指算术

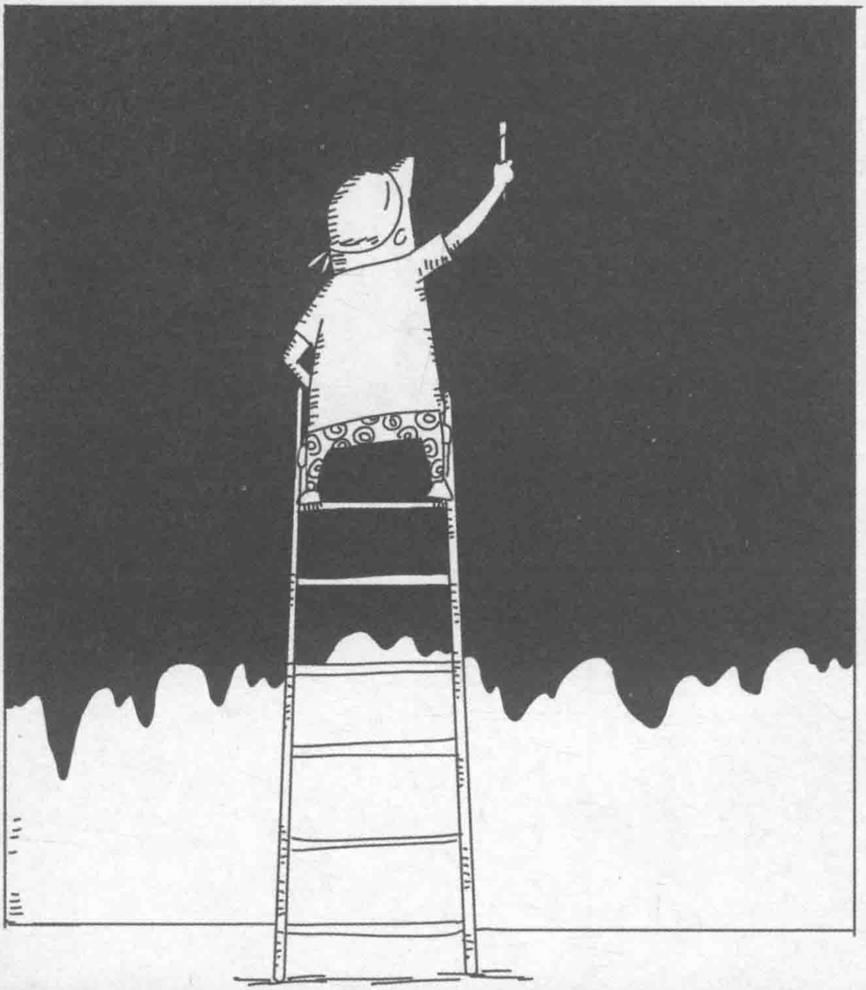
117 第8章 默比乌斯带

133 第9章 可笑的问题

146 附记

第 1 章

无之论



似乎没有人知道如何处理这个问题。

（他当然知道。）

——P·L·希思（P. L. HEATH）

我们的话题是“无”。根据定义，“无”就是不存在；然而，作为概念它是存在的。无论是在数学、科学、哲学领域，还是在日常生活中，用文字和符号来说明、表示“无”的概念都是非常有用的。

空集是数学家们能够想到的最接近“无”的概念。空集不等同于“无”，尽管空集不同于其他任何集合，但作为集合无论如何它以某种形式存在。空集是唯一不含任何元素的集合，也是任何非空集合的子集。你可以从一个装有三个苹果的篮子中取出一个苹果、两个苹果、三个苹果，或是一个也不取。同样，对于一个空篮子，你也可以不放任何东西进去。

尽管空集不指向任何元素，但它本身具有代表意义。例如，它可以代表所有方形圆的集合，所有2以外的偶数素数的集合，或本书的黑猩猩读者的集合。一般而言，空集就是这样一种元素X的集合，其中无论X取何值，关于X的任何命题都是假的。关于空集元素的任何陈述都为真，因为空集不包含任何一个可以使命题为假的元素。

空集用符号Φ表示。千万不要把它和0混淆，0是表示零的符号。零（通常）是用来表示空集Φ元素数的数字。空集表示“无”，但0表示空集中元素的数量，比如空篮子中苹果的集合，这个不存在的苹果的集合是空集Φ，而苹果的数量是0。

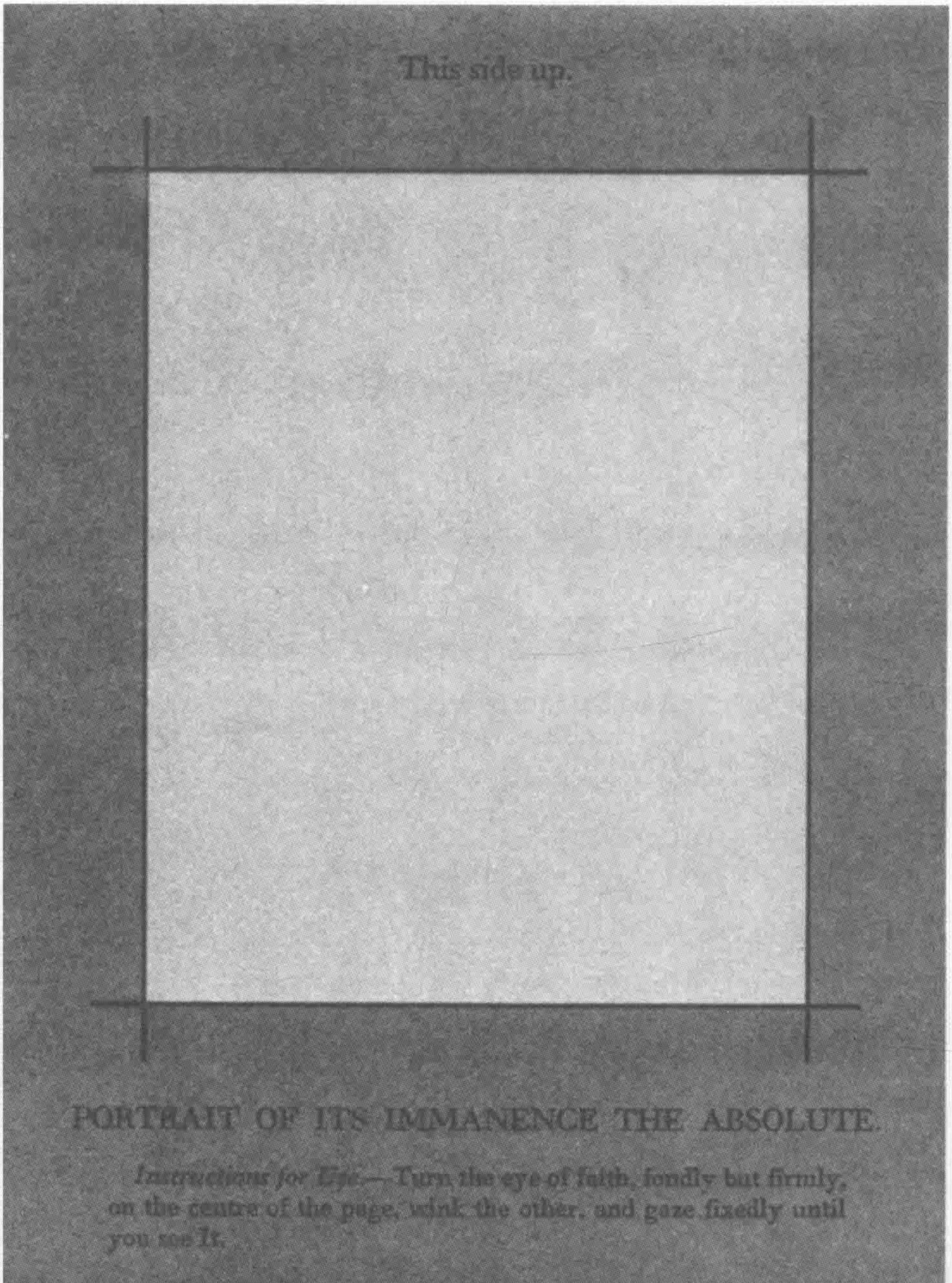
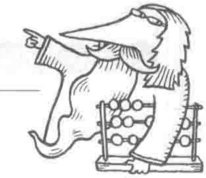


图1.1 《特殊的圣诞树》卷首插图,1901年



由伟大的德国逻辑学家弗雷格(Gottlob Frege)[1]发现,罗素(Bertrand Russell)[2]再次提出的构造自然数的方法,便是从空集开始,并使用一些简单的规则和公理。零被定义为所有集合中,元素数量与空集的元素数等价(可以一一对应)的集合的基数。在定义了0之后,1被定义为所有集合中,与只有一个元素0的集合等价的集合的元素数,2被定义为所有集合中,与只有元素0和1的集合等价的集合的元素数。3被定义为所有集合中,与只有元素0,1,2的集合等价的集合的元素数,以此类推。一般情况下,一个整数就是所有集合中,与包含了该整数之前所有数字的集合等价的集合的元素个数。

其他一些从无开始用递归的方式构造数的方法,从细节上看,各有利弊,且很大程度是心理上的。譬如,冯·诺依曼(John von Neumann)[3]将弗雷格的过程缩短了一步,他更愿意将0定义为空集,1定义为只包含空集这个唯一元素的集合,2定义为包含空集和1这两个元素的集合,依此类推。

数年前,剑桥大学的康韦(John Horton Conway)[4]偶然想出了一个构造自然数的卓越新方法,该方法也是从空集开始。最初,他用了一份13页的打印文稿影印本描述他的新方法,“所有的数字,无论大小。”他开始写道,“让我们看看过去那些擅长构造数字的人们是怎样处理这个问题的。”这篇文章的结尾有10个问题,其中最后一个问题是:“这整个体系有用吗?”

1972年的某一天,当康韦在午饭时巧遇高德纳(Donald E. Knuth,斯坦福

① 弗雷格,德国数学家、逻辑学家。数理逻辑和分析哲学的奠基人。——译者注

② 罗素,20世纪英国哲学家、数学家、逻辑学家、历史学家,无神论者。他与怀特海合著的《数学原理》对逻辑学、数学、集合论、语言学和分析哲学有着巨大影响。——译者注

③ 冯·诺依曼,美籍匈牙利人,经济学家、物理学家、数学家,“现代电子计算机之父”,制定的计算机工作原理到现在还被各种电脑使用着。——译者注

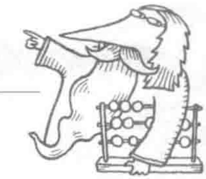
④ 康韦,英国数学家,活跃于有限群、趣味数学、纽结理论、数论、组合博弈论和编码学等领域的研究。——译者注

大学的计算机科学家)[1],他向高德纳解释了他的新方法。高德纳立刻为这种方法的可能性和革新性的内容着迷。1973年,高德纳利用在奥斯陆一周的度假时间,以短篇小说的形式给康韦的方法写了一篇导言。次年,该书以平装本形式由艾迪生韦斯利出版社出版,该出版社还出版过高德纳的著名《计算机程序设计艺术》(*The Art of Computer Programming*)系列。我认为这是唯一一次用小说形式来发表重大的数学发现。康韦在他之后的一部书《数与游戏》(*Numbers and Games*)中,开篇首先描述了他构造数的方法,进而描述了如何用此理论构造和分析两人对策。(可参见我1976年9月的《科学美国人》上的专栏文章。)

高德纳为这部小说体著作取名为《超现实数:两位前学生如何对纯数学感兴趣并找到了完完全全的幸福》(*Surreal Numbers How Two Ex-Students Turned On to Pure Mathematics and Found Total Happiness*)。高德纳在后记中解释道,该书的主要目的,与其说是为了传授康韦的理论,不如说是为了"教大家如何尝试去发展这样一个理论"。他还补充道:"因此,当书中两个人物在逐步探索和构建康韦的数字体系的时候,我不仅记录了他们灵感突现的瞬间,还有起初的失败和挫折。我想做的就是合理地、真实地描述数学研究的重要原则、方法,以及它所带来的快乐、激情和哲理。所以,我一边做研究的同时,一边写下了这个故事"。

高德纳笔下的这两位前学生,爱丽丝和比尔(A和B),已经飞离了"体系",停歇在印度洋海岸的港口里。在那里,他们发现了一块刻有古希伯来语的半埋的黑色岩石。通晓希伯来语的比尔试着翻译了开首语:"最初,万物都是虚空,J·H·W·H·康韦开始创造数字。"JHWH是古希伯来语中Jehovah的音译。"Con-

① 高德纳,出生于美国密尔沃基,著名计算机科学家,在计算机科学及数学领域发表了多部具广泛影响的论文和著作。他的名著《计算机程序设计艺术》是计算机科学方面最受重视的参考书籍之一。——译者注



way”在古希伯来语中也没有元音，不过它是比尔能想到的符合辅音发音最常见的英文名字了。

比尔继续翻译“康韦石头”：“康韦说道，‘让我们使用两条规则来创造所有的大小数字。第一条：每个数字都对应两个由在它之前被创建出来的数字组成的集合，左边集合中的任何元素，都小于右边集合中的任何元素。第二条：当且仅当第一个数字的左边集合中的每一个元素，都小于第二个数字，并且第二个数字的右边集合中的每一个元素，都大于第一个数字时，第一个数字才会小于或等于第二个数字。’康韦仔细检查了自己制定的这两条规则，棒极了。”

石头上的文字接着描述了康韦是如何在“零日”创造出了“零”。他将两个空集一左一右放置。用符号标记为：$0=\{\phi \mid \phi\}$，其中竖线将两个空集分开。左边空集中的任何元素，都不会大于或等于右边空集中的任何元素，因为空集中没有元素，所以满足康韦的第一条规则。应用到第二条规则，可以简单看出0小于或等于0。

第二天，石头上显露文字，康韦创造出了头两个非零整数，1和-1。方法就是简单地将空集和零以两种可能的方式结合起来：$1=\{0 \mid \phi\}$和$-1=\{\phi \mid 0\}$。这两个数满足规则。-1小于但不等于0，同时0小于但不等于1 。如此一来，1和-1，和随后创造出来的所有数字都可以被重新插到左—右公式中，用这样的方式，所有的整数就都会被创造出来。当0和1组成左边的集合，而右边是空集时，2就会被创造出来了。用0、1和2组成左边的集合，空集放在右边时，那么3就被创造出来了，依此类推。

此时，读者们可能喜欢上了自己去做一些探索。高德纳为《超现实数》一书作了封面图，图上用巨石组成的图形象征着$\{0 \mid 1\}$。这到底代表了哪个数字？读者们能证明出$\{-1 \mid 1\}=0$吗？

“生生不息结出累累的果实！”康韦对整数说。首先它们组合成了有限集