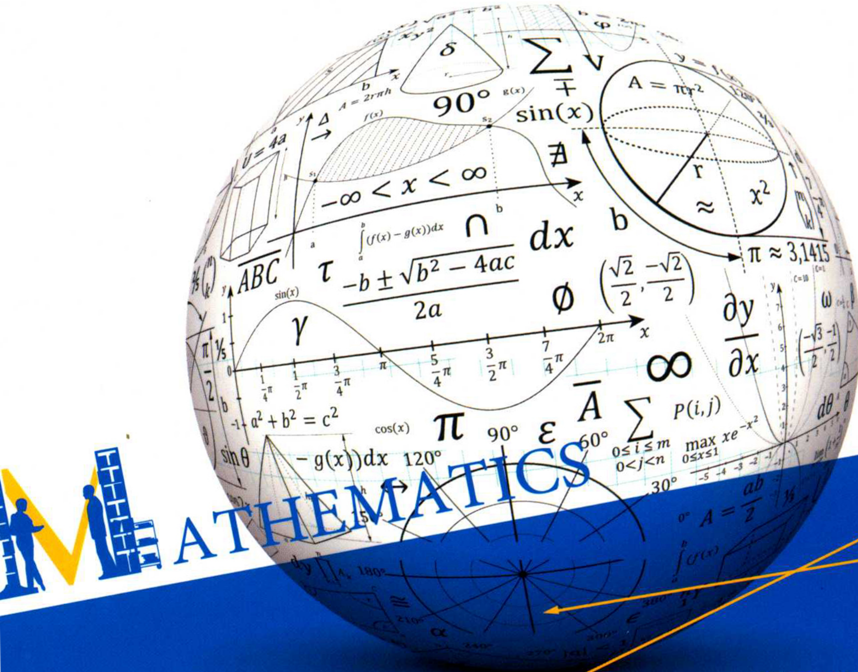
江苏省高等教育成果二等奖



（第四版）

应用高等数学

第二册

主编 翟修平
主审 刘志林

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

江苏省高等教育优秀教学成果二等奖

应用高等数学

（第四版）

第二册

主编 翟修平
主审 刘志林

上海交通大学出版社

内容提要

应用高等数学(第四版),全书分三册,本书为第二册。主要内容包括:向量代数与空间解析几何,多元函数微分,二重积分和级数。

本书以应用为目的,重视数学概念的建立、数学基本方法的掌握和数学应用能力的培养;以学生受益为宗旨,内容阐述清晰,简捷直观,通俗易懂,不仅强调数学学习方法的引导,而且特别注重融入数学的思想和应用;以能力训练为基础,每节配有习题,每章配有自测题,并附有参考答案。

本书可作为高职高专院校、成人高校和独立学院各专业的教材,也可供相关科技人员和数学爱好者参考。

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学.第2册/翟修平主编.—4版.—上海:上海交通大学出版社,2016

ISBN 978-7-313-02116-8

Ⅰ.①应… Ⅱ.①翟… Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第036056号

应用高等数学(第四版)第二册

主　　编:翟修平

出版发行:上海交通大学出版社　　地　　址:上海市番禺路951号

邮政编码:200030　　电　　话:021-64071208

出 版 人:韩建民

印　　制:上海颛辉印刷厂　　经　　销:全国新华书店

开　　本:880mm×1230mm　1/32　　印　　张:4.5

字　　数:122千字

版　　次:1999年7月第1版　2016年1月第4版　　印　　次:2016年1月第24次印刷

书　　号:ISBN 978-7-313-02116-8/O

定　　价:20.00元

Preface

前　言

高职教育的人才培养目标是培养具有一定理论知识和较强实践能力的高端技能型专门人才。数学作为一门公共基础理论课程，应以应用为目的，以必需、够用为度。本教材结合高职院校应用高等数学的教学特点和当前高职高等数学课程改革，以强化数学应用为导向，以培养学生创新能力为目标，本着“必需够用”的基本原则，淡化严格的数学论证，注重培养学生严谨的思维习惯，提升职业素质。通过教学实践，我们感到所编内容能更好地适应当前高职高等数学教育教学的改革要求，同时能有效解决学时少与专业需求多样的问题。

本书分三册，第一册包括一元函数的极限与连续、一元函数微分、导数的应用、一元函数积分、微分方程、数学建模初步、数学软件应用；第二册包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分、二重积分、级数；第三册包括行列式、矩阵与线性方程组、随机事件及其概率、随机变量及分布、随机变量的数字特征、数理统计基础。

本册书由翟修平担任主编，廖为鲲、李晓瑾担任副主编，刘志林担任主审。参加本册书编写的还有刘志林、章朝庆、沐雨芳、崔靖、潘敏等。

本教材的编写得到了泰州职业技术学院领导的大力支持，在此深表感谢。

限于编者水平，同时编写的时间比较仓促，教材中存在的不妥之处，敬请广大读者批评和指正。

编　者

2015 年 12 月

Contents

目 录

第六章

向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中，我们曾引入平面直角坐标系，把平面上的点与一对有序数组对应起来，从而可通过代数方法来研究平面几何问题。同样，为了研究空间几何问题，我们引进空间直角坐标系和向量。向量是解决许多数学、物理、力学及工程技术问题的一个有力工具，也是我们研究空间解析几何的重要工具。空间解析几何是平面解析几何的推广，是学习多元函数微积分的基础。

本章先引进向量的概念，根据向量的线性运算建立空间坐标系，然后利用坐标进行向量的运算，并讨论空间平面、空间直线、空间曲面、空间曲线等空间解析几何问题。

第一节　向量的概念及线性运算

一、向量的概念

客观世界中遇到的量可分为两类：**一是只有大小的量，称为数量或标量**，如质量、温度、时间、面积等；二是**既有大小，又有方向的量称为向量或矢量**，如力、位移、速度、电场强度等。

在数学中，常用一条带有箭头的有向线段来表示向量，线段的长度表示该向量的大小，箭头表示向量的方向。以 A 为起点、B 为终点的向量记为$\overrightarrow{AB}$，也可用黑体小写字母 $\boldsymbol{a}$ 表示。(见图 6－1)。

向量的大小称为向量的模，向量$\overrightarrow{AB}$或 $\boldsymbol{a}$ 的模记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$。模为 1 的向量称为单位向量，记作 $|\boldsymbol{a}^0|$，模为零的向量称为零向量，

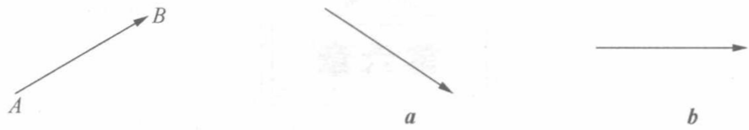


图 6-1

记为 0,零向量的方向为任意的。

在实际问题当中,有许多向量与其起点无关,而一切非零向量的共性是它们有大小和方向,我们称与起点位置无关的向量为**自由向量**。因而在空间中任意一个向量经平行移动后仍为同一个向量。**如果两个向量的模相等,而且方向相同,则称这两个向量相等,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。两个向量的方向相同或相反,则称这两个向量平行,并记为 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$。**由于零向量方向的任意性,故可认为零向量平行于任何向量。

向量有两个要素,即模和方向。向量之间不能比较大小,但其模是一非负实数,可以比较大小。

二、向量的线性运算

1. 向量的加法

从中学物理中可知,作用于一点的两个不平行力的合力可由平行四边形法则来确定,类似地,将其简化便可得向量的加法。

定义 1　**已知两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,将 $\boldsymbol{b}$ 平移使其始点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合,则以 $\boldsymbol{a}$ 的始点为始点、以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量 $\boldsymbol{c}$,称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量。记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ (见图 6-2)。**

定义 1 给出了求两个向量之和的方法称为向量相加的**三角形法则**。可见,三角形法则是中学物理中力的合成的**平行四边形法则**的简化,三角形法则还可以推广到求空间中任意有限个向量的和。从图 6-3 可以看到,只要把这些向量首尾相连,以第一个向量的始点为始点,以最后一个向量的终点为终点的向量就是这些向量的和向量,这种方法又称为**“折线法”**。如图 6-3 所示,可知 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5=\boldsymbol{s}$。

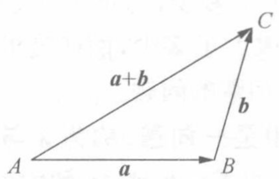


图 6-2

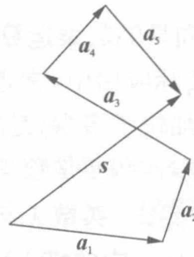


图 6-3

容易证明,向量的加法具有下列运算律:

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$。

(2) 结合律　$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$。

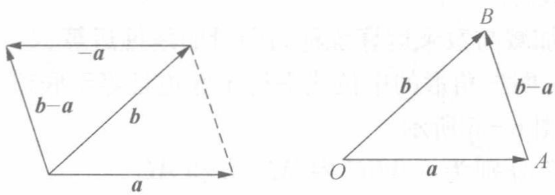
2. 向量的减法

与数的运算类似,向量加法的逆运算即为向量的减法,定义如下:

定义 2　**与向量 $\boldsymbol{a}$ 模相等而方向相反的向量,称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记作:$-\boldsymbol{a}$。向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的差**

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上,便得到 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$[见图 6-4(a)]。



(a)　　(b)

图 6-4

特别地,当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时,有 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$。

显然,任给向量$\overrightarrow{AB}$及点 O,有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA},$$

因此,若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O,则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量$\overrightarrow{AB}$便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$[见图 6-4(b)]。

3. 向量的数乘运算

在实际应用中，常遇到像速度加快了多少，力增大了多少等问题，速度加快了多少，是指速度的大小增大了多少，而速度的方向并没有改变，这些便是数学上的数与向量相乘的问题。

定义 3　实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一向量，称为 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的数乘，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$。它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量。

由定义 3 及向量平行的定义可知，无论 λ 为正或为负或为零，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 都是平行的。于是我们有：

(1) 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平行(共线)的充要条件为存在非零实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$。

(2) 设 $\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量，记与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^0$，则有 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 或 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$。

显然，向量的数乘满足下列运算律：

(1) 结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$。

(2) 分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$。这里 λ、μ 是任意实数。

向量的加减与数乘运算统称为向量的**线性运算**。

例 1　证明三角形的中位线平行于底边且等于底边的一半。

证　如图 6-5 所示，

设 D、E 分别为 $\triangle ABC$ 中 AB 边和 AC 边的中点，

令 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，则

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$。

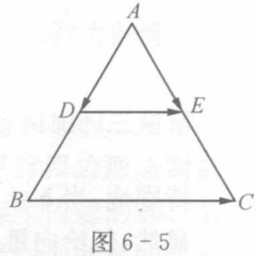


图 6-5

又　$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

因此　$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，

所以　$\overrightarrow{DE}\,/\!/\,\overrightarrow{BC}$，$|\overrightarrow{DE}|=\left|\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$。

三、空间直角坐标系

过空间一定点 O，作三条两两互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，且具有相同的长度单位，就构成了一个**空间直角坐标系**。定点 O 称为**坐标原点**。这三个轴分别称为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(立轴)，统称为坐标轴。习惯上，x 轴、y 轴设置在水平面上，而 z 轴设置为铅垂线。它们的正向符合右手法则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴的正方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 角度转到 y 轴的正方向时，大拇指的指向就是 z 轴的正方向，如图 6-6 所示。

在空间直角坐标系中，三条坐标轴 Ox、Oy、Oz 决定两两互相垂直的三平面 xOy、yOz、zOx，它们统称为**坐标面**。三个坐标面把整个空间分为八个部分，每一个部分称为一个**卦限**，卦限的编号如图 6-7 所示。则八个卦限内的点的坐标 $(x,\ y,\ z)$ 的符号依次为

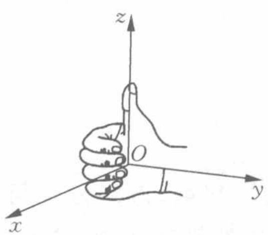


图 6-6

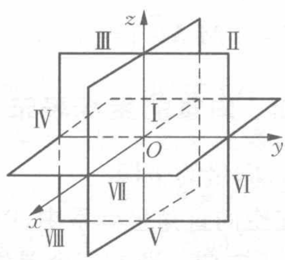


图 6-7

Ⅰ$(+,\ +,\ +)$；　Ⅱ$(-,\ +,\ +)$；　Ⅲ$(-,\ -,\ +)$；　Ⅳ$(+,\ -,\ +)$；
Ⅴ$(+,\ +,\ -)$；　Ⅵ$(-,\ +,\ -)$；　Ⅶ$(-,\ -,\ -)$；　Ⅷ$(+,\ -,\ -)$。

特别地，原点的坐标 $(0,\ 0,\ 0)$，x 轴、y 轴、z 轴上的点的坐标分别为 $(x,\ 0,\ 0)$、$(0,\ y,\ 0)$、$(0,\ 0,\ z)$；三个坐标面 xOy、yOz、zOx 上点的坐标分别为 $(x,\ y,\ 0)$、$(0,\ y,\ z)$、$(x,\ 0,\ z)$。

建立了空间直角坐标系后，就可以讨论空间的点与三个有序数之间的对应关系。

设 P 为空间一点，过点 P 分别作与三条坐标轴垂直的平面，它

们分别交 x 轴于 A 点,交 y 轴于 B 点,交 z 轴于 C 点(见图 6-8),这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x、y、z。反之,给定有序数组 x、y、z,在 x 轴上取坐标为 x 的点 A,在 y 轴上取坐标为 y 的点 B,在 z 轴上取坐标为 z 的点 C,再过这三个点分别作垂直于三条坐标轴的平面,则这三个平面必然交于点 P。这样就建立了空间的点 P 与三元有序数组 x、y、z 之间的一一对应关系。有序实数组 x、y、z 称为**点 P 的坐标**,记作 $P(x, y, z)$,x、y、z 分别称为点 P 的横坐标、纵坐标和立坐标。

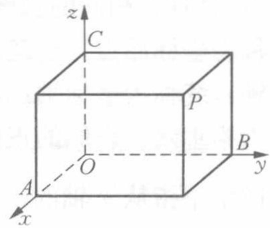


图 6-8

下面将平面上两点间的距离公式推广到空间直角坐标系(证明从略)。

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间中任意两点,则点 M_1 与点 M_2 之间的距离为

$$d = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}。$$

四、向量的坐标表示

1. 向量的坐标

在空间直角坐标系中,以原点 O 为共同起点,方向分别与 x、y、z 轴的正方向一致的三个单位向量,叫做基本单位向量,分别记为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$。

设向量 $\boldsymbol{r}$ 的起点为坐标原点 O,终点为 $M(x, y, z)$,过 M 点作三个平面分别垂直于三条坐标轴,设垂足分别为 P、Q、R,则 $\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OQ} = y\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OR} = z\boldsymbol{k}$,如图 6-9 所示,由向量加法法则,得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM_1} + \overrightarrow{M_1M} \\ &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} \\ &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}。 \end{aligned}$$

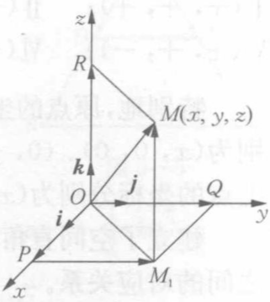


图 6-9

称 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 为**向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标表示式**，又称为**向径**，简记为 $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$，称有序实数组 $\{x, y, z\}$ 为**向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标**。显然零向量的坐标为 $\boldsymbol{0} = \{0, 0, 0\}$。由此可见，当一个向量始点在原点时，向量的坐标就是其终点的坐标。

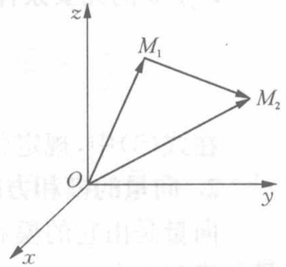


图 6-10

如果空间中任意向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的始点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，终点为 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，如图 6-10 所示，则有 $\overrightarrow{OM_1} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k} = \{x_1, y_1, z_1\}$，$\overrightarrow{OM_2} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k} = \{x_2, y_2, z_2\}$，

及
$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} \\ &= (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) - (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) \\ &= (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}, \end{aligned} \tag{1}$$

或
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}。 \tag{2}$$

式(1)及式(2)称为向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表示式。向量 $(x_2 - x_1)\boldsymbol{i}$，$(y_2 - y_1)\boldsymbol{j}$，$(z_2 - z_1)\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在坐标轴上的**分向量**，$\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ 称为向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标。因此，向量的坐标等于它的终点与始点对应坐标之差。由于向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 为任意向量，故向量的始点在原点时，上述结论同样成立。

特别地，$\boldsymbol{i} = \{1, 0, 0\}$，$\boldsymbol{j} = \{0, 1, 0\}$，$\boldsymbol{k} = \{0, 0, 1\}$。

利用向量的坐标，很容易进行向量的线性运算。

设 $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$，$\boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$，

则
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} &= \{a_1, a_2, a_3\} + \{b_1, b_2, b_3\} \\ &= (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) + (b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) \\ &= \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\};\end{aligned}$$

同理
$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \{a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3\};$$

$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda\{a_1, a_2, a_3\} = \lambda(a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}$，这

里 λ 为任意实数。

显然,$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ **的充要条件**为 $a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3$。

$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$ **的充要条件是** $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1=\lambda b_1,\ a_2=\lambda b_2,\ a_3=\lambda b_3$

$$\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}。\tag{3}$$

在式(3)中,规定分母为零时,分子也为零。

2. 向量的模和方向余弦

向量是由它的模和方向确定的,下面利用向量的坐标来表示向量的模和方向。

任给一个向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$,作向径$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 的模就是点 $M(a_1,a_2,a_3)$ 到原点的距离,由两点间的距离公式知 $|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$。

为了表示向量的方向,我们引入方向角的概念。称非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴的正方向的夹角 α,β,γ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的三个**方向角**,并规定 $0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$。方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦(见图 6-11)。容易推得

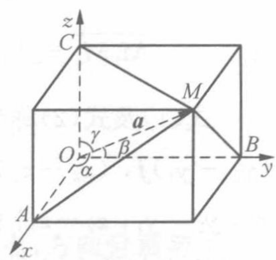


图 6-11

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|},\ \cos\beta=\frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|},\ \cos\gamma=\frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|},$$

且 $\qquad\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$

因此,与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$。

例 2 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\ -2\boldsymbol{a}$ 及 $|\boldsymbol{a}|$。

解 $\quad\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})+(-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=-2\boldsymbol{k};$

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k};$

$-2\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k};$

$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2+2^2+(-3)^2} = \sqrt{14}$。

例3　已知向量 $\boldsymbol{a}=\{3, \alpha, 6\}$ 与向量 $\boldsymbol{b}=\{-1, 2, \beta\}$ 平行，求常数 α，β 的值。

解　由两个向量平行的充要条件知 $\dfrac{3}{-1}=\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{6}{\beta}$，

故　　$\alpha=-6, \beta=-2$。

例4　设向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦 $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\cos\beta=\dfrac{1}{2}$，及 $|\boldsymbol{a}|=4$，求 $\boldsymbol{a}$。

解　因 $\cos^2\gamma=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta=1-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$，

知　　$\cos\gamma=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}=\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$。

因此，　　$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\boldsymbol{a}^0=\{2, 2, \pm 2\sqrt{2}\}$。

习题 6－1

1. 已知向量 $\overrightarrow{AB}=\{4, -4, 7\}$，它的终点的坐标为 $B(3, -2, 7)$，求它的起点 A 的坐标。
2. 已知：向量 $\boldsymbol{a}=\{5, -1, 2\}$，$\boldsymbol{b}=\{1, 0, 3\}$。
   (1) 求 $2\boldsymbol{a}$ 及 $|\boldsymbol{b}|$，$|3\boldsymbol{b}|$；
   (2) 求向量 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{c}$ 的方向余弦；
   (3) 求向量 $\boldsymbol{c}$ 的单位向量 $\boldsymbol{c}^0$ 及 $|\boldsymbol{c}|$。
3. 设 $|\boldsymbol{a}|=10$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$，且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，求向量 $\boldsymbol{a}$。
4. 试证明以三点 $A(4, 1, 9)$，$B(10, -1, 6)$，$C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形。
5. 设三向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$ 为三角形 ABC 的边，P，M，N 分别为三边中点，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{BN}$，$\overrightarrow{CP}$。

第二节　两向量的数量积与向量积

一、两向量的数量积

在中学物理中我们学过常力做功问题,设一物体在常力 F 作用下的位移为 S,若将 F 与 S 的夹角记为 θ,则力 F 所做的功为 $W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{S}|\cos\theta$,

在数学上,由此抽象引入两个向量的数量积。

1. 数量积的概念

定义 1　**给定的向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,设 $\boldsymbol{\theta}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,数 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\boldsymbol{\theta}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(或点积),记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\boldsymbol{\theta}$,且 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$。**

不难验证,向量的数量积满足下列运算律:

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) 与数乘运算的结合律　$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$;

(3) 分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$。

由数量积的定义可得:

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$;

(2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$;

(3) 两非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦 $\cos\langle \widehat{a,b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$;

(4) $\begin{cases}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1\\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0\end{cases}$。

2. 数量积的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=a_1b_1(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})+a_1b_2(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})+a_1b_3(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k})+a_2b_1(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i})+a_2b_2(\boldsymbol{j}\\&\quad\cdot\boldsymbol{j})+a_2b_3(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k})+a_3b_1(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i})+a_3b_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j})+a_3b_3(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

因此　$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

这就是两个向量数量积的坐标表示。

当 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为非零向量时, $\cos\langle \widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$。

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件为 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$。

例1　已知三点 $A(2,1,-2)$, $B(1,2,-2)$, $C(1,1,-1)$,求向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$的数量积。

解　$$\overrightarrow{AB}=\{1-2,2-1,-2-(-2)\}=\{-1,1,0\}$$

$$\overrightarrow{BC}=\{0,-1,1\}$$

所以　$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(-1)\times 0+1\times(-1)+0\times 1=-1$$

例2　证明向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 和向量 $\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 互相垂直。

证明　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times4-2\times9+2\times3=0$,故 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$。

二、两个向量的向量积

1. 向量积的概念

定义2　**两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量积是一个向量,记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,它的模和方向分别定义为:**

(1) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,(设 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,且 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$),

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 服从右手螺旋法则。即平移 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,使其有共同的始点,右手四指指向 $\boldsymbol{a}$,经过不大于 π 的角度握拳到 $\boldsymbol{b}$ 方向时,大拇指的指向就是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向(见图 6-12)。

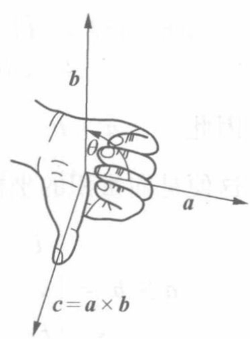


图 6-12