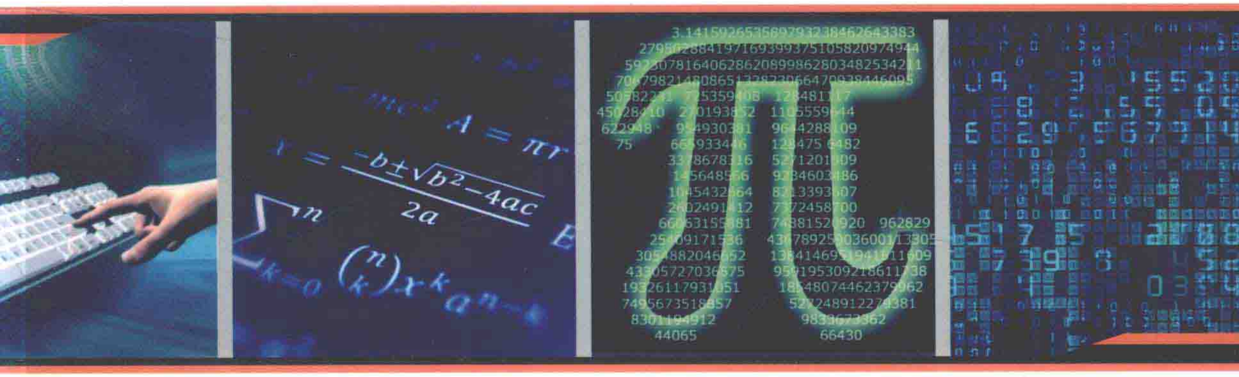
高等学校“十三五”规划教材

PLANNING TEXTBOOKS FOR HIGHER EDUCATION



常微分方程教程

张太雷　刘俊利　王　凯　编著

西北工业大学出版社

CHANGWEIFEN FANGCHENG JIAOCHENG

常微分方程教程

张太雷　刘俊利　王　凯　编著

西北工業大學出版社

【内容简介】 本书系统地介绍了常微分方程的初等解法、基本理论以及应用等基础知识.全书共分7章:绪论、一阶微分方程、一阶微分方程的基本理论、高阶微分方程、线性微分方程组、常微分方程稳定性理论简介和常微分方程的MATLAB求解与应用等.本书在引入概念时强调直观性和应用背景,注重内容的衔接,强调定理和方法的实用性,数学处理上确保准确严密,各章配有大量的例题和习题,便于教学和自学.

本书可作为高等院校理工科数学专业的本科生常微分方程课程的教材或参考书,也可供一般的数学工作者、物理工作者、工程技术等其他相关专业人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程教程/张太雷,刘俊利,王凯编著.—西安:西北工业大学出版社,2016.10
ISBN 978-7-5612-5085-3

Ⅰ.①常… Ⅱ.①张… ②刘… ③王… Ⅲ.①常微分方程—高等学校—教材 Ⅳ.①O175.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第261341号

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路127号　　邮编:710072
电　　话:(029)88493844　88491757
网　　址:http://www.nwpup.com
印 刷 者:陕西金德佳印务有限公司
开　　本:787 mm×960 mm　　1/16
印　　张:15.75
字　　数:335千字
版　　次:2016年10月第1版　　2016年10月第1次印刷
定　　价:33.00元

前　言

微分方程是研究事物变化规律的学科，它几乎与微积分同时出现，其形成和发展与物理学、力学、天文学、生命科学以及其他科学技术的发展密切相关. 早在微积分发展初期，数学家已深信微分方程在认识自然、改造自然方面有着巨大的力量. 美国数学家 Simmons 曾高度评价微分方程在数学中的地位："三百年来分析是数学里首要的分支，而微分方程又是分析的心脏. 这是初等微积分的天然后继课，又是为了解物理科学的一门重要的数学，而且在它所产生的较深的问题中，它又是高等分析里大部分思想和理论的根源."

常微分方程作为数学专业本科生的专业基础课程，具有理论性强、方法和技巧多样、应用性强等特点. 常微分方程同时也是后续课程，如偏微分方程、数学建模、泛函分析以及常微分方程定性和稳定性等课程的基础. 在多年从事常微分课程教学以及相关科研工作中，我们对本课程的教学方法、教材的优点和缺点、学生的学习方法上有了较深入的了解. 同时，参阅了一些国内外的优秀教材，加上对本课程的理解编写了本书. 本书既注重基本概念、基本理论和基本方法的阐述，又融入了一些训练学生数学逻辑思维能力的实用内容. 通过本书的学习，学生不仅可提高分析问题、解决问题的能力，而且能体会到微分方程在解决实际问题中所起的强大作用.

本书在每一章的开头，都对该章的背景和主题做概括性的介绍. 本书各章的主要内容如下. 第 1 章绪论，介绍微分方程及其解的相关概念，常微分方程定解问题的提法. 为了让读者尽快地了解常微分方程在实际问题中的应用，引入一些典型的常微分方程建模，而将其求解和结果分析放在后面的章节中. 第 2 章主要讲述一阶常微分方程的初等解法：分离变量法、变量代换法、常数变易法、积分因子法等. 值得一提的是，常数变易法是求解一阶线性非齐次微分方程的一种行之有效的方法，它同样适用于第 4 章和第 5 章的高阶线性微分方程和线性微分方程组. 第 3 章主要讲述常微分方程的理论基础：解的存在唯一性、解的延拓、解对初值和参数的连续依赖性与可微性. 这部分内容是微分方程的理论和应用的基石，同时也是教学的难点. 定理证明涉及的数学知识点较多，读者可以尝试分化难点，抓住各定理证明的思想. 第 4 章和第 5 章是本书的重点内容，主要讲述高阶线性微分方程和线性微分方程组的解法. 这里要借助线性代数中矩阵和向量等相关知识求解常系数线性微分方程(组). 事实上，这两章的内容完全可以进行统一处理，读者在阅读过程中要注意它们之间的联系和区别. 此外，Laplace 变换法也是求解线性微分方程和线性微分方程组的一类简捷方法. 考虑到常微分方程是近代数学发展的重要基础，除讲述常微分方程的初等解法外，在第 6 章还简要介绍常微分方程的稳定性理论，其中包括平面线性系统奇点的分类、Liapunov 第二方法、自治系统稳定性判定的 Liapunov 定理

以及线性近似理论等. 当今世界,计算机已大量应用于科学的各个领域,现代数学的发展和应用与数学软件息息相关. 基于这样的考虑,第 7 章介绍 MATLAB 在常微分方程中的应用. 希望读者通过这一章内容学会利用 MATLAB 求微分方程的解析解、进行数值计算以及对常微分方程模型进行参数估计和数值模拟等.

作为高校本科生初学常微分方程的教材,需要学生具备微积分和线性代数的基础知识. 根据经验,需要的学时在 64～72 学时之间,学时少的学校可以考虑只讲授前 5 章的内容,学生完全可以自学第 7 章——常微分方程 MATLAB 求解与应用;第 6 章可作为高年级本科生学习微分方程理论或相关应用的预备知识. 书中每节配有一定数量的习题,其中有些是基本解法的练习和常微分方程建模应用,有些是补充的一些常微分方程的解法讨论,有些是某些定理或结论的证明细节,还有一些本身就是有趣的结论. 读者可根据自己情况进行练习. 同时,大部分专业术语首次出现时附有相应的英文对照,供读者学习参考. 本书第 1～4 章由刘俊利编写,第 5,6 章由张太雷编写,第 7 章由王凯编写,最后由张太雷修改统稿.

编写本书曾参阅了相关文献资料,在此谨向其作者深表谢意.

本书在编写及出版过程中,笔者的研究生贾滢、邵明月、万槟萁、刘文娟校读了部分书稿,在此表示感谢! 感谢长安大学理学院、西安工程大学理学院以及新疆医科大学数学教研室的关心和支持,特别感谢长安大学中央高校基本科研业务费专项资金(项目号:310812152002)的资助和西北工业大学出版社的大力支持.

由于笔者水平有限,书中难免有错误之处,恳请读者指正.

编著者

2016 年 8 月

目　　录

第1章 绪 论

17 世纪,**Newton(牛顿)**①和 **Leibniz(莱布尼茨)**②分别独立地创立了微积分,几乎在同一时间产生了微分方程(**Differential Equation**).微积分作为解决自然科学(如物理、化学、天文、生物等)的重要工具,可以更加清楚地描述自然科学中的规律.当一个科学问题中出现一些变量和变化率之间的关系时,往往需要用微分方程描述.只含一个自变量的微分方程称为常微分方程(**Ordinary Differential Equation**).常微分方程是微积分和现代数学的重要组成部分,也是微积分解决问题的重要工具.历史上很多的问题都和微分方程有关,如等时曲线问题、1846 年海王星的发现、考古中的^{14}C标定法测定文物年代、核废料的处理等,类似的实例还有很多.在微分方程发展史中,牛顿、伯努利、欧拉、刘维尔、柯西、庞加莱、李雅普诺夫、伯克霍夫等数学家都做出了卓越的贡献.

本章将介绍常微分方程及其解的基本概念,通过相关的物理、化学和生物等有关规律建立一些典型的常微分方程模型.掌握常微分方程的概念和一些建模思想是求解和分析常微分方程的基础.

1.1 微分方程基本概念

本书的主要任务是给出常微分方程的求解方法、描述常微分方程解的性质.首先需要了解什么是常微分方程,它有哪些相关的基本概念,弄清楚这些问题是学习后面章节的基础.

在中学课程中,我们学习过什么是**方程(Equation)**,即含有未知量的等式,如

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0 \tag{1.1.1}$$

$$\sin x+x=\ln x \tag{1.1.2}$$

称方程(1.1.1)和(1.1.2)为代数方程,方程(1.1.2)也称为超越方程.

在数学分析中,我们学习隐函数存在定理时曾提及函数方程,如考虑函数方程

$$x^2+y^2=1 \tag{1.1.3}$$

---

① 牛顿(Isaac Newton,1643—1727 年):英国爵士,皇家学会会员,伟大的物理学家、数学家、天文学家、自然哲学家.

② 莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz,1646—1716 年):德国哲学家、数学家.

若存在函数 $y=\varphi(x)$ 使之满足方程(1.1.3),则称函数方程(1.1.3)确定了一个隐函数.

上述等式都称为方程,只是方程(1.1.3)的解是一个函数而不是一个简单的数.换句话说,方程(1.1.3)中含有未知函数.自然地,若方程中含有未知函数的导数或微分,那么这个方程就称为微分方程.具体地,我们给出如下精确的数学定义.

定义 1.1.1 含有自变量、未知函数和未知函数导数或微分的方程称为**微分方程**(**Differential Equation**).若未知函数为一元函数(即自变量个数为一个),那么方程称为**常微分方程**(**Ordinary Differential Equation**);若未知函数为多元函数(即自变量个数为两个或两个以上),那么方程称为**偏微分方程**(**Partial Differential Equation**).

常微分方程和偏微分方程统称为微分方程.本书主要讨论常微分方程,若无特别说明,将常微分方程简称为微分方程或者方程.另外,书写常微分方程时,常常省略未知函数的自变量.如方程 $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=2\sin x(t)+\mathrm{e}^t x^2(t)$ 通常写成 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2\sin x+\mathrm{e}^t x^2$ 或 $x'=2\sin x+\mathrm{e}^t x^2$,这里 $x'=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

下面给出的微分方程都是常微分方程:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x+2y\\
&\mathrm{d}y-\sqrt{1-y^2y''}\,\mathrm{d}x=0\\
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x^2+y^2}\\
&y'=xy'+\sin(y')\\
&x'''+a(t)x''+b(t)x'+c(t)x=f(t)
\end{aligned}\right\}\tag{1.1.4}$$

再列举一些偏微分方程的例子:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\
&\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0
\end{aligned}\right\}\tag{1.1.5}$$

其中,u 是未知函数,t,x,y,z 是自变量.

两个或两个以上的微分方程的联立称为**微分方程组**(**System of Differential Equations**).例如:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3x-2y\\
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x-2y
\end{aligned}\right\}\tag{1.1.6}$$

其中，t 是自变量，x，y 是未知函数.

微分方程(组)中出现的最高阶导数的阶数称为微分方程(组)的**阶**(**Order**). 如式(1.1.4)中第一个方程为一阶常微分方程，第二个方程为二阶常微分方程；式(1.1.5)中全是二阶偏微分方程，式(1.1.6)是一阶常微分方程组. 一般的 n 阶常微分方程具有形式：

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)},y^{(n)})=0 \tag{1.1.7}$$

或

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}) \tag{1.1.8}$$

其中，F 和 f 是已知函数. 作变量替换：

$$y_1=y,\quad y_2=y',\quad \cdots,\quad y_n=y^{(n-1)}$$

则 n 阶常微分方程(1.1.8)可化为一阶常微分方程组，有：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=y_2\\ \cdots\cdots\\ \dfrac{\mathrm{d}y_{n-1}}{\mathrm{d}x}=y_n\\ \dfrac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x}=f(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)\end{cases}$$

同理，高阶常微分方程组也可以化成一阶常微分方程组.

若常微分方程(1.1.7)中的左端函数 F 是变量 $y,y',\cdots,y^{(n)}$ 的线性函数，则称方程(1.1.7)是**线性常微分方程**(**Linear Ordinary Differential Equation**)，否则称之为**非线性常微分方程**(**Nonlinear Ordinary Differential Equation**). 此外，F 是变量 $y,y',\cdots,y^{(n)}$ 的线性函数的充要条件是什么？(请读者思考). 式(1.1.4)中的第 1 个和第 5 个方程是线性常微分方程. 类似地，我们可以定义什么是线性或非线性常微分方程组和线性或非线性偏微分方程. 显然，式(1.1.5)中都是线性偏微分方程，式(1.1.6)是线性常微分方程组. 读者可以试着构造出一些非线性的微分方程组或偏微分方程的例子.

求解常微分方程是学习本课程的一个主要任务，下面给出常微分方程的解的定义.

定义 1.1.2　若存在函数 $y=\varphi(x)$ 在某个区间 I 上有直到 n 阶导数，且满足：

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n-1)}(x),\varphi^{(n)}(x))\equiv 0$$

则称 $y=\varphi(x)$ 是方程(1.1.7)在区间 I 上的一个**解**(**Solution**)或者称 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上满足方程(1.1.7). 此外，若 $\Phi(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=\varphi(x)$ 满足方程(1.1.7)，则称 $\Phi(x,y)=0$ 是方程(1.1.7)的一个**隐式解**(**Implicit Solution**).

隐式解也可称为微分方程的**积分**(**Integral**)，注意不要把它与微积分中积分的概念混淆，隐式解也可直接叫作解.

容易验证 $y=\mathrm{e}^{2x}$ 是方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2y$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内的一个解，$x^2+y^2=1$ 是方程 $x\mathrm{d}x+$

$y\mathrm{d}y=0$ 的一个隐式解. $y=\tan(x-C)$(其中 C 是任意常数)是方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+y^2$ 在区间 $\left(C-\frac{\pi}{2},C+\frac{\pi}{2}\right)$ 上的解. 方程 $(y')^4+y^2=0$ 有且仅有一个解 $y\equiv 0$,而方程 $(y')^4+y^2=-1$ 无解.

在求解微分方程的过程中,经常采用不定积分消去导数,因此在微分方程的解中可能出现任意常数,下面给出例子.

例 1 验证 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的解.

解 对 y 求导,得

$$y'=C_1\cos x-C_2\sin x$$

再求二阶导数,得

$$y''=-C_1\sin x-C_2\cos x$$

因此

$$y''+y=-C_1\sin x-C_2\cos x+C_1\sin x+C_2\cos x\equiv 0$$

从而 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 是该方程的解.

从例 1 中我们可以看到二阶常微分方程 $y''+y=0$ 存在含有两个任意常数的解 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$,并且这两个任意常数是相互独立的. 以后我们将会看到,该方程任何一个解都能写成 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 的形式.

定义 1.1.3 n 阶常微分方程(1.1.7)的**通解**(**General Solution**)是含有 n 个独立的任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 的解,记作 $y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 或 $\Phi(x,y,C_1,C_2,\cdots,C_n)=0$. 通解又称为**通积分**(**General Integral**). 当通解中的一组任意常数被确定时,所得到的解称为**特解**(**Particular Solution**),特解又称为**特积分**(**Particular Integral**).

这里需要说明:上述定义独立常数的含义是指在$(C_1,C_2,\cdots,C_n)$的某个邻域内满足:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial C_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial C_n} \\ \frac{\partial\varphi'}{\partial C_1} & \frac{\partial\varphi'}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi'}{\partial C_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_1} & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_n} \end{vmatrix}\neq 0 \tag{1.1.9}$$

其中,$\varphi^{(k)}$ 表示 φ 关于 x 的 k 阶导数.

下面验证例 1 中的解 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$(其中 C_1,C_2 为任意常数)是通解. 由公式(1.1.9)得

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}=-1\neq 0$$

因此 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的通解.

如何确定常微分方程的特解呢？这就需要给出确定通解中任意常数的条件，该条件称为**定解条件**（**Definite Condition**），具有定解条件的常微分方程（组）称为**定解问题**（**Definite Solution Problem**）. 例如：一汽车匀速前进，遇到紧急情况以 8 m/s^2 的加速度刹车，求汽车行驶的位移 $s(t)$。该问题可以用中学物理知识解决，但要完全解决该问题，还需要给出汽车的初始位移和初始速度，即给出定解问题：

$$\left.\begin{array}{l} s''(t)=-8 \\ s(0)=s_0, \quad s'(0)=v_0 \end{array}\right\} \tag{1.1.10}$$

在定解问题(1.1.10)中，给出了初始时刻未知函数及其导数的值，这类条件称为**初始条件**（**Initial Condition**），具有初始条件的常微分方程（组）称为**初值问题**（**Initial Value Problem**）.

一般地，n 阶常微分方程初值问题的提法如下：

$$\begin{cases} F(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)},y^{(n)})=0 \\ y(x_0)=\xi_0,y'(x_0)=\xi_1,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=\xi_{n-1} \end{cases}$$

其中，$x_0,\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}$ 是 $n+1$ 个确定的常数. 初值问题又称为**柯西问题**[①]（**Cauchy Problem**）.

在常微分方程定解问题中，除了初值问题外，还有一类**边值问题**（**Boundary Value Problem**）. 常微分方程（组）的边值问题提法：求这个方程的解，使之在某个区间$[a,b]$上有定义，并且在区间的两端点 a,b 处满足某些条件，该条件称为**边界条件**（**Boundary Condition**）. 如定解问题

$$\begin{cases} y''+2y=\sin x \\ y(0)=y(1)=1 \end{cases}$$

就是一个边值问题. 初值问题和边值问题统称为定解问题.

最后，我们讨论一阶常微分方程的解的几何意义. 考虑如下一阶常微分方程：

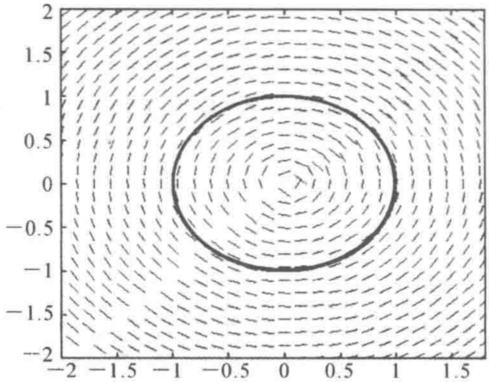
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y) \tag{1.1.11}$$

从几何上看，方程(1.1.11)的通解 $\Phi(x,y,C)=0$ 是 Oxy 平面上依赖于单参数 C 的一族曲线，这些曲线称为方程(1.1.11)的**积分曲线**（**Integral Curve**）；而特解则为通过 Oxy 平面上某一给定点的积分曲线. 另一方面，给定 Oxy 平面上任何一个点(x,y)，立即可以计算出 $y'=f(x,y)$，即积分曲线在这一点处切线的斜率. 换句话说，我们可以由方程(1.1.11)定义 Oxy 平面上的一个方向场（**Direction Field**）. 求解方程(1.1.11)，即找到一些光滑曲线，使得这些曲线上任意一点处切线的斜率与方程(1.1.11)的方向场在该点处的值相等. 这就是一阶常微分方程的几何意义.

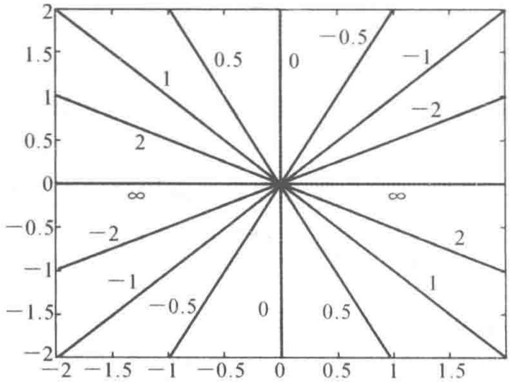
方程(1.1.11)的方向场在曲线 $f(x,y)=C$ 上任一点处的值相同，我们称它为**等倾线**

① 柯西（Ausgustin-Louis Cauchy，1789—1857 年）：法国著名数学家.

(**Isoclinic Line**). 特别地,$f(x,y)=0$ 为**水平等倾线**(**Horizontal Isoclinic Line**),而$\frac{1}{f(x,y)}=0$ 为**垂直等倾线**(**Vertical Isoclinic Line**). 等倾线常常用来考察方程积分曲线的走势. 如图 1.1 中,图 1.1(a) 给出了方程 $y'=-\frac{x}{y}$ 的方向场和一条积分曲线,图 1.1(b) 显示该方程的一些等倾线,其中等倾线上的数字表示积分曲线在这条线上切线的斜率值.



(a)



(b)

图 1.1　方程 $y'=-\frac{x}{y}$ 的方向场和等倾线

本节介绍了常微分方程的基本概念,在许多的常微分方程教材中都有提及[1-8],读者可以进行查阅.

习　题　1.1

1. 指出下列微分方程的阶数,并判断它们是线性方程还是非线性方程.

(1) $\frac{dy}{dx}=x^3+(y+1)^2$;

(2) $(1+y^2)\frac{d^2y}{dx^2}+\sin x\frac{dy}{dx}+2y=e^x$;

(3) $\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+y=e^{2x}$;

(4) $x^3\frac{d^3y}{dx^3}+3\sin^2x\frac{d^2y}{dx^2}+3\cos x\frac{dy}{dx}+y=e^{2x}$;

(5) $y''\frac{d^3e^{\sin x}}{dx^3}+y'\frac{de^{\sin x}}{dx}=xy$;

(6) $\frac{dy}{dx}=\sin(x+y)$;

(7) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin(x+y''))=xy$；

(8) $\sin(1+(y'')^3)+\sin(1+(y^2)''')=x$.

2. 验证下列给定函数是否为相应微分方程的解.

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2, y=\tan x-x$；

(2) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+6y=0, y_1=\mathrm{e}^{2x}, y_2=\mathrm{e}^{3x}$；

(3) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-y=0, y_1=\sinh x, y_2=\cosh x$；

(4) $x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-12y=0, y_1=x^{2\sqrt{3}}, y_2=x^{-2\sqrt{3}}$；

(5) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+2xy, y=\mathrm{e}^{x^2}\left(1+\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}t\right)$；

(6) $4\sin x\sin 3y\cos x\mathrm{d}x-3\cos 3y\cos 2x\mathrm{d}y=0, -\cos 2x\sin 3y=C$.

3. 验证下列给定函数是否为相应微分方程的通解.

(1) $\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x=0, y=C\mathrm{e}^{2x}$；

(2) $x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=x^3, y=C_1x+C_2x\ln x+\frac{1}{2}x^3$；

(3) $(y')^2+y^2=0, y=0$；

(4) $y''+y=0, y=C_1\sin(x+C_2)$；

(5) $y'''-2y''-y'+2y=0, y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}+C_3\sinh x$.

4. 给定一阶微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}x$，请回答下列问题.

(1) 求方程的通积分；

(2) 求过点$\left(1,\frac{1}{2}\right)$的特积分；

(3) 求与直线 $y=2x+1$ 相切的积分曲线；

(4) 求满足$\int_0^1 y+y'\mathrm{d}x=1$ 的特解；

(5) 求直线 $ax+by+c=0$ 与方程的积分曲线相切的充要条件；

(6) 画出(2)，(3) 和(4) 中所求的积分曲线图形.

5. 画出一阶微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{2y+x^3+1}$ 的水平等倾线和垂直等倾线，并计算它们的交点.

1.2 一些典型的常微分方程模型

本节将建立一些典型的常微分方程模型.需要指出的是,这里仅建立相应的微分方程模型,其问题的求解或分析将在后续章节中进行讨论.

例 1 下落问题

在中学物理课程中,我们学习过匀速直线运动和匀变速直线运动.在这些运动过程中,总假定速度或加速度是常量.从下面的例子中将看到,常微分方程可以解决加速度不是常量的运动问题.

设一个质量为 m 的质点从高空下落,已知下落过程中该物体受到的空气阻力的大小与其速率成正比,取竖直向下为正方向,确定物体的运动规律.

先给出一些与该问题相关的变量,设 g 表示重力加速度,t 表示时间,v 表示速度,那么速度 v 一定是时间 t 的函数.根据牛顿第二定律,得

$$F = ma \tag{1.2.1}$$

其中,F 是合外力,a 是加速度并且 $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.因此,我们可以将式(1.2.1)写为

$$F = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{1.2.2}$$

图 1.2 物体受力分析

下面进行受力分析(见图 1.2),该物体受到重力和阻力,物体始终下落,因此速度始终为正.由已知条件,空气阻力的大小为 kv,其中 k 为阻尼常数.阻力始终阻碍物体的运动,因此方向向上.从而有

$$F = mg - kv \tag{1.2.3}$$

因此,式(1.2.2)可写成

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv \tag{1.2.4}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \rho v \tag{1.2.5}$$

其中 $\rho = k/m$.式(1.2.4)或式(1.2.5)可以反映该下落物体的运动规律.

例 2 办公室的形状问题

建筑设计师要设计一个办公室,办公室的边界形状是一条光滑的封闭曲线,要求:房间中

有两个固定点 P 和 Q，当主人坐在一个点与坐在另一个点的客人交谈时，谈话的声音最清楚. 问如何设计办公室的边界形状.

记 $|PQ|=2c$，如图1.3所示，以 PQ 为 x 轴，PQ 的中垂线为 y 轴建立平面直角坐标系. 设 $y=y(x)$ 为所求曲线，$M(x,y)$ 为曲线上任意一点，MR 为 M 点处的切线. 从而可得 P 点坐标 $(-c,0)$、Q 点坐标 $(c,0)$ 和向量：

$$\boldsymbol{PM}=(x+c,y),\quad \boldsymbol{MQ}=(c-x,-y),\quad \boldsymbol{MR}=(1,y') \tag{1.2.6}$$

按照设计要求，从 P 点发出的声波经墙壁反射聚焦到 Q 点才能使声音最清楚. 根据反射定律，入射角 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 等于反射角 $\frac{\pi}{2}-\beta$. 又因为 α 和 β 分别为向量 $\boldsymbol{PM}$ 和 $\boldsymbol{MR}$，$\boldsymbol{MQ}$ 与 $\boldsymbol{MR}$ 的夹角，由 $\cos\alpha=\cos\beta$ 可得

$$\frac{(\boldsymbol{PM},\boldsymbol{MR})}{|\boldsymbol{PM}|\,|\boldsymbol{MR}|}=\frac{(\boldsymbol{MQ},\boldsymbol{MR})}{|\boldsymbol{MQ}|\,|\boldsymbol{MR}|} \tag{1.2.7}$$

将式(1.2.6)代入式(1.2.7)中直接计算得

$$\frac{(x+c)+yy'}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}=\frac{(c-x)-yy'}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}} \tag{1.2.8}$$

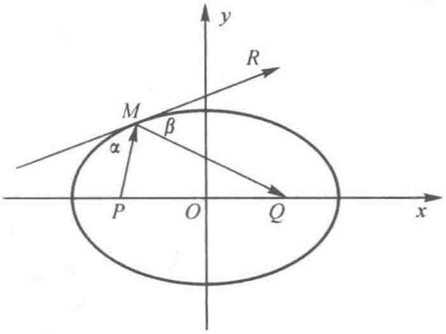


图1.3　办公室形状问题示意图

或写成

$$\frac{(x+c)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}=\frac{(c-x)\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}} \tag{1.2.9}$$

通过求解方程(1.2.8)或方程(1.2.9)就可以得到办公室边界形状曲线.

例3　化学反应模型

考虑某种物质A经化学反应全部生成另一种物质B. 设A的初始质量为 M g，在1 h内生成B物质 m g，问物质A的质量变化规律.

设 t 时刻物质A的质量为 $x(t)$，根据质量守恒原理，t 时刻物质B的质量为 $M-x(t)$，由化学反应的性质知，A的质量减少的速率和物质B与物质A的质量之比成正比，记 k 为比例常数. 因此，可得微分方程：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-k\frac{M-x}{x}\\&x(0)=M\\&x(1)=M-m\end{aligned}\right\} \tag{1.2.10}$$

其中，方程中的负号表示物质A的质量减少. 式(1.2.10)是一个具有定解条件的一阶非线性常微分方程，$x(0)=M$ 是初始条件，$x(1)=M-m$ 是边界条件. 该类问题又称为混合问题.

例 4　单种群模型

种群(Population)是指一定时间内占据一定空间的同种生物的全体[9,10]，如同一池塘的鲤鱼、一片森林里的松树或同一地区的人群等. 种群中个体的数量称为**种群规模**(**Population Size**). 提到单种群模型，最经典的就是 1798 年英国人口学家 **Malthus**①(**马尔萨斯**)的《人口学原理》中提出的 **Malthus 人口模型**，该模型的基本假设是单位时间内人口的增长量与当时人口数成正比(即人群的内禀增长率为常数).

设 $x(t)$ 为 t 时刻人口总数，单位时间内人口的增长量与当时人口数之比为 r，根据 Malthus 人口模型的假设，得

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=rx(t)$$

令 $\Delta t \to 0$，得到 Malthus 模型：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx(t) \tag{1.2.11}$$

当环境中资源比较丰富，种群中个体数量较少的时候，Malthus 人口模型的内禀增长率为常数的假设是合理的，但是当环境中资源短缺，种群个体数量较多时，就会出现种内竞争. 基于这个考虑，比利时数学家 **Verhulst**② 提出了 **Logistic 模型**，他引入了**环境容纳量**(**Carrying Capcity**)K，即环境中所能容纳最多的种群个体数. 假设种群的内禀增长率和当时剩余资源的比例$1-\dfrac{x(t)}{K}$ 成正比，比例常数仍记为 r，从而可得 Logistic 模型：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx(t)\left(1-\frac{x(t)}{K}\right) \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx\left(1-\frac{x}{K}\right) \tag{1.2.12}$$

上述模型也称为 **Verhulst 模型**或**阻滞增长模型**. 当 $x(t)$ 很小时，Logistic 模型近似接近于 Malthus 模型；而当 $x(t)$ 很大时，Logistic 模型右端的$\dfrac{rx^2}{K}$ 项会对种群规模的发展有很强的制约作用，因此项$\dfrac{rx^2}{K}$ 反映一种密度制约或种内竞争.

例 5　多种群模型

一般来说，现实世界中大多数种群都不是单独生存的，即一个种群与其他种群之间存在相互作用. 因此，我们需要研究多种群模型. 最经典的多种群模型是 **Lotka - Volterra**③(**洛特卡-**

① 马尔萨斯(Thomas Robert Malthus，1766—1834 年)：英国人口学家和政治经济学家.

② 韦吕勒(Pierre Francois Verhulst，1804—1849 年)：比利时数学家.

③ 洛特卡(Alfred James Lotka，1880—1949 年)：美国数学家；沃尔泰拉(Vito Volterra，1860—1940 年)：意大利数学家.