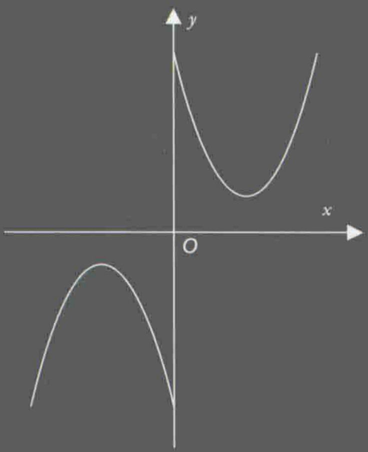
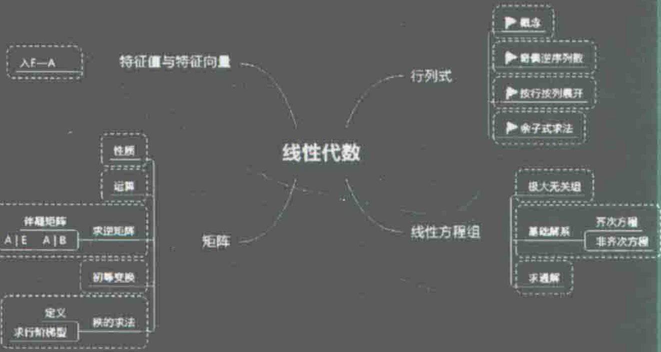



# 线性代数辅导书（第2版）


主　编　李继成

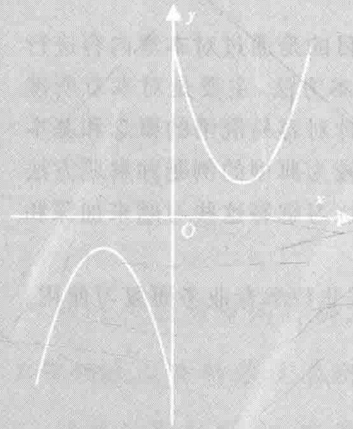
编　者　高安喜　魏　平　齐雪林

王勇茂　李　萍　刘晋平



西安交通大学出版社

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS



# 线性代数辅导书（第2版）


主　编　李继成

编　者　高安喜　魏　平　齐雪林

王勇茂　李　萍　刘晋平



西安交通大学出版社

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

## 内容简介

本书每章由五个部分组成：第一部分是内容提要，其目的是通过对本章内容进行总结，使读者对本章内容有一个总体了解；第二部分是基本方法，主要是对本章所涉及的基本解题方法进行概括；第三部分是释疑解惑，主要针对容易混淆的概念和基本方法辅以正确的理解；第四部分是典型例题，主要对一些较为典型的例题和解题方法给以详细地解答和分析；第五部分是自测题，读者可通过练习解答这些习题来加深和巩固课程内容的基本概念、基本方法和基本理论。

本书可供大学本科非数学专业学生学习使用，也可供非数学专业考研复习使用。

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数辅导书/李继成主编；高安喜等编. —2 版. —西安：西安交通大学出版社，2016.8

ISBN 978-7-5605-8941-1

Ⅰ.①线… Ⅱ.①李… ②高… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 198204 号

**书　　名**　线性代数辅导书(第 2 版)
**主　　编**　李继成
**责任编辑**　任振国

**出版发行**　西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049)
**网　　址**　http://www.xjtupress.com
**电　　话**　(029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315(总编办)
**传　　真**　(029)82668280
**印　　刷**　陕西日报社

**开　　本**　787mm×1 092mm　1/16　**印张**　9　**字数**　212 千字
**版次印次**　2016 年 8 月第 1 版　2016 年 8 月第 1 次印刷
**书　　号**　ISBN 978-7-5605-8941-1/O·549
**定　　价**　19.80 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo.cn

# 前 言

“线性代数与空间解析几何”是高等院校本科生教育阶段的一门重要基础课，在工程领域以及科学技术研究等领域中有着广泛的应用，是一门系统性强，理论抽象，计算过程较繁杂，实用性较强的课程。为使读者在学习本门课程时能很好地把握课程内容，我们组织编写了这本教学辅导书。

本书共分为8章，每章由五个部分组成：第一部分是内容提要，其目的是通过对本章内容进行总结，使读者对本章内容有一个总体了解；第二部分是基本方法，主要是对本章所涉及的基本解题方法进行概括；第三部分是释疑解惑，主要针对容易混淆的概念和基本方法辅以正确的理解；第四部分是典型例题，主要对一些较为典型的例题和解题方法给以详细的解答和分析；第五部分是自测题，读者可通过练习解答这些习题来加深和巩固课程内容的基本概念、基本方法和基本理论。

在基本内容之后，给出了5套模拟试题。最后给出自测题和模拟试题参考答案。

本辅导书由李继成统一策划。高安喜编写第1章、第5章；魏平编写第2章、第3章；齐雪林编写第4章；刘晋平编写第6章；李萍编写第7章；王勇茂编写第8章，李继成统稿。

由于编者水平有限，加之时间仓促，缺点、错误在所难免，恳请读者批评指正。

作 者

2016年6月于西安交通大学

# 目　录

# 第 1 章　行列式

## 1.1　内容提要

**1. $n$ 阶行列式的定义**

将 $n\times n$ 个元素排成 $n$ 行 $n$ 列的算式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为 $n$ 阶行列式 $D$，记 $D=\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 或 $D=|a_{ij}|=\det(\boldsymbol{A})$，其值为 $D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$. 其中，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 是元素 $a_{ij}$ 的代数余子式，$M_{ij}$ 就是将 $D$ 中 $a_{ij}$ 所在的第 $i$ 行第 $j$ 列元素划去，余下的 $n-1$ 阶子式，称 $M_{ij}$ 为元素 $a_{ij}$ 的余子式.

$n$ 阶行列式共有 $n!$ 项，每项都是取自不同行不同列的元素乘积，且赋予 $(-1)^{\tau}$，$\tau$ 是此项中行下标的逆序数与列下标逆序数之和.

**2. 行列式的性质**

(1) $\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\det(\boldsymbol{A})$

(2) $\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,k\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=k\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$

(3) $\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_n)=-\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_j,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$

(4) $\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i+\boldsymbol{\beta}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\det(\boldsymbol{A})+\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$

(5) $\det(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i+k\boldsymbol{\alpha}_j,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$

(6) $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}=\det\boldsymbol{A}\cdot\delta_{jk}$；$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=\det\boldsymbol{A}\cdot\delta_{ik}$；(其中 $\delta_{jk}=\begin{cases}1, & j=k\\ 0, & j\neq k\end{cases}$ )

## 1.2　基本方法

**1. 行列式计算的基本方法**

(1) 直接按定义展开；

(2) 利用性质，将行列式化为三角形行列式，行列式就等于对角线元素的乘积；

(3) 利用性质将某行(或列) 元素化为仅剩一个非零元素，然后按定义计算.

**2. 几种特殊行列式的计算**

如三角形行列式的值等于其主对角线元素的乘积，范德蒙行列式.

**3. 克莱姆法则**

若线性方程组 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$,$(i = 1,2,\cdots,n)$ 的系数行列式 $D = |a_{ij}|_n \neq 0$,则方程组有唯一解 $x_j = \dfrac{D_j}{D}$,$(j = 1,2,\cdots,n)$;其中 $D_j$ 是用常数列替换 $D$ 的第 $j$ 列元素所得行列式.

## 1.3 释疑解惑

**问题 1.1** $n$ 阶行列式难点是什么?

**答** $n$ 阶行列式的定义就是一个难点,对此,可以从 2 阶和 3 阶行列式的展开式来了解 $n$ 阶行列式的定义,并且注意 $n$ 阶行列式定义的结构有以下两个特点:

(1) $D_n$ 等于它的所有取自不同行、不同列的 $n$ 个元素的乘积的代数和,这里的"所有"是指对所有 $n$ 阶排列求和,而 $n$ 阶排列共有 $n!$ 种,所以 $D_n$ 的展开式中共有 $n!$ 个乘积项.

(2) 展开式中每个乘积项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 前面所带符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$,即当行指标成自然排列,而列指标所成排列 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 为偶排列时,该乘积项前面带正号,否则带负号.

**问题 1.2** $n$ 阶行列式的重点是什么?

**答** 按定义计算一个 $n$ 阶行列式需要作 $n!(n-1)$ 次乘法运算,当 $n$ 较大时,计算量太大,而且还要确定每一项前面所带的符号,所以按定义计算一般的 $n$ 阶行列式几乎是不可能的. 但行列式的计算又是一个重要问题,因此,掌握行列式的基本计算方法就是学习行列式的重点.

**问题 1.3** 行列式的基本计算方法有哪些?

**答** (1) 利用行列式的性质将行列式化成较简单的且易于计算的行列式(如三角形行列式等).

(2) 利用行列式的展开定理,将高阶行列式化成低阶行列式来计算.

(3) 行列式的具体计算方法技巧性较强,常常因题而异. 特别是含有字母的高阶行列式的计算,是行列式计算的一个难点. 对此,应该注意分析行列式的特点,灵活运用行列式的性质,采取适当的计算方法.

**问题 1.4** 用克莱姆法则解线性方程组应注意什么?

**答** 克莱姆法则是线性方程组理论中的重要结论,利用它可以简洁地表示方程组的解,还可以在不求解方程组的情况下判断解的情况,但必须注意应用克莱姆法则有两个条件:

(1) 方程组的系数组成 $n$ 阶行列式;

(2) 系数行列式不为零.

由于受这样两个条件制约,所以克莱姆法则主要用于理论问题及较简单方程组的求解.

## 1.4 典型例题

**例 1.1** 计算 $n$ 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

**解** 显然,该行列式的各列元素之和均为 $x+(n-1)a$,因此,将 2,3,…,$n$ 行均加到第 1 行,并提取第 1 行的公因子可得

$$D_n=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix},$$

再将第 1 行的$(-a)$倍加至其余各行后可化成上三角形行列式

$$D_n=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

**例 1.2** 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}x&a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1&x&a_2&\cdots&a_n\\a_1&a_2&x&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&x\end{vmatrix}.$$

**解** 显然,这是一个行和相等的行列式,因此,将第 2,3,…,$n+1$ 列都加到第 1 列,并提取第 1 列的公因子 $x+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 得

$$D_{n+1}=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix}1&a_1&a_2&\cdots&a_n\\1&x&a_2&\cdots&a_n\\1&a_2&x&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_2&a_3&\cdots&x\end{vmatrix},$$

再将第 1 列的$(-a_i)$倍加到第 $i$ 列$(i=2,\cdots,n)$,就把行列式化成了下三角形行列式

$$D_{n+1}=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&x-a_1&0&\cdots&0\\1&a_2-a_1&x-a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_2-a_1&a_3-a_2&\cdots&x-a_n\end{vmatrix}=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i).$$

**例 1.3** 计算 $n$ 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$.

**解** 先提取各列的公因子,将 $a_{ii}$ 元素都化成 1. 再将第 2 至第 $n$ 列的$(-1)$倍加至第 1 列,即

$$D_n = n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = n!\begin{vmatrix} 2-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = n!(2-n).$$

**例 1.4** 计算 $n$ 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}.$$

**解** $D_n$ 有很多元素为 $x$，若将第 1 行的 $(-1)$ 倍分别加至后边各行，就可将行列式中很多元素化成零，从而便于计算.

$$D_n = \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!\begin{vmatrix} x+1 & \frac{x}{2} & \frac{x}{3} & \cdots & \frac{x}{n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= n!\begin{vmatrix} 1+\sum_{j=1}^{n}\frac{x}{j} & \frac{x}{2} & \frac{x}{3} & \cdots & \frac{x}{n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = n!\left(1+\sum_{j=1}^{n}\frac{x}{j}\right).$$

**例 1.5** 计算 $n$ 阶行列式(其中 $a \neq b$)

$$D_n = \begin{vmatrix} c_1 & b & b & \cdots & b & b \\ c_2 & a & b & \cdots & b & b \\ c_3 & b & a & \cdots & b & b \\ c_{n-1} & b & b & \cdots & a & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_n & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}.$$

**解** 观察可见：$D_n$ 中有较多的元素为 $b$，因此，把第 1 行 $(-1)$ 倍分别加到后边各行上得

$$D_n = \begin{vmatrix} c_1 & b & b & \cdots & b & b \\ c_2-c_1 & a-b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_3-c_1 & 0 & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{n-1}-c_1 & 0 & 0 & \cdots & a-b & 0 \\ c_n-c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix},$$

现在,只要把第 $i$ 行的$\dfrac{-b}{a-b}$倍加到第 1 行上($i=1,2,\cdots,n$) 即得

$$D_n=\begin{vmatrix} c_1-\dfrac{b}{a-b}\sum\limits_{i=2}^{n}(c_i-c_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_2-c_1 & a-b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_3-c_1 & 0 & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{n-1}-c_1 & 0 & 0 & \cdots & a-b & 0 \\ c_n-c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)^{n-1}\left[c_1-\frac{b}{a-b}\sum_{i=2}^{b}(c_i-c_1)\right].$$

**例 1.6**　计算 $n$ 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$,其中 $a_{ij}=|i-j|$,($i,j=1,2,\cdots,n$).

**解**　由 $D_n$ 的定义知

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$D_n$ 有如下特点:相邻两行(列)的对应元素相差为1,因此相邻两行(列)对应元素相减得 1 或 $-1$,而元素为 1 或 $-1$ 的行列式显然是便于计算的. 因此,为了把 $D_n$ 的元素化成 1 或 $-1$,先把第 $n-1$ 行的($-1$) 倍加至第 $n$ 行,再把第 $n-2$ 行的($-1$) 倍加至第 $n-1$ 行,依次类推,最后把第 1 行的($-1$) 倍加至第 2 行得

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

于是,所化成的行列式满足主对角线下边的元素全为 1,而第 $n$ 列除 $a_{1n}$ 元素外全为 $-1$,所以,把第 $n$ 列分别加至前边各列,就把行列式化成了上三角形行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} n-1 & n & n+1 & \cdots & 2n-3 & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1).$$

**例 1.7**　计算 $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

**解** $D_n$ 第 1 列中除 $a_{11}$ 和 $a_{n1}$ 元素外，其他元素均为零，且 $a_{11}$ 元素的代数余子式为一上三角行列式，$a_{n1}$ 元素的余子式为一下三角行列式，因此，按第 1 列展开得

$$D_n=a^n+(-1)^{n+1}b^n.$$

**例 1.8** 计算 $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}.$$

**解** 由于 $D_n$ 的 $a_{n1}$ 元素的余子式为一下三角行列式，所以我们设法把 $D_n$ 第 1 列中除 $a_{n1}$ 外的其他元素化成零，以便于按第 1 列展开. 为此，先把第 $n$ 列的 $x$ 倍加至第 $n-1$ 列，再把第 $n-1$ 列 $x$ 的倍加至第 $n-2$ 列，……，最后把第 2 列的 $x$ 加至第 1 列得

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ x^n+\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_{n-k}x^k & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}\left(x^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_{n-k}x^k\right)(-1)^{n-1}$$

$$=x^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_{n-k}x^k.$$

**例 1.9** 计算 $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

**解** 将 $D_n$ 按第 1 列分成两个行列式得

$$D_n=\begin{vmatrix}\alpha & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$

$$=\alpha D_{n-1}+\beta^n,$$

$$D_n=\begin{vmatrix}\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$

$$=\beta D_{n-1}+\alpha^n,$$

两式联立解得
$$D_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\quad(\alpha\neq\beta),$$

$\alpha=\beta$ 时，容易解得 $D_n=(n+1)\alpha^n$.

**例 1.10**　计算 $D_3=\begin{vmatrix}1 & \omega & \omega^2\\ \omega^2 & 1 & \omega\\ \omega & \omega^2 & 1\end{vmatrix}$，其中 $\omega^3=1$.

**解**　$D_3\xlongequal{r_2+r_1\times(-\omega^2)}\begin{vmatrix}1 & \omega & \omega^2\\ 0 & 1-\omega^2 & \omega-\omega^4\\ \omega & \omega^2 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_1\times(-\omega)}\begin{vmatrix}1 & \omega & \omega^2\\ 0 & 1-\omega^3 & \omega-\omega^4\\ 0 & 0 & 1-\omega^3\end{vmatrix}$

$=(1-\omega^3)^2=0$.

**例 1.11**　计算 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & -n\\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1\\ -n & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}$.

**解**　各行元素之和皆为 $-1$，把各列加到第 1 列，再将第 1 行乘以 $(-1)$ 到其余各行得

$$D_n=(-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & -n\\ 0 & 0 & \cdots & -n-1 & 1+n\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & -n-1 & \cdots & 0 & 1+n\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1+n\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & -n-1 & 1+n\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1+n\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -n-1 & 0 & \cdots & 0 & 1+n\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1+n\end{vmatrix}$$

$$= (-1)(n+1)(-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}(-n-1)^{n-2}$$
$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n+1)^{n-1}.$$

**例 1.12** 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$.

**解** 显然各行元素之和均为$\frac{n(n+1)}{2}$,把各列元素加到第 1 列,提出公因子$\frac{n(n+1)}{2}$,并从最后一行起,依次减前一行,一直做到第 2 行减第 1 行(共做 $n-1$ 次),即得

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_n$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & n \\ -n & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}_{n-1},$$

再将各行乘以$\frac{1}{n}$加到第 1 行得(除过第 1 行)

$$D_n = \frac{(n+1)n}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -n & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & n \\ -n & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot n^{n-1}.$$

**例 1.13** 求使 3 个点$(x_1,y_1)$,$(x_2,y_2)$,$(x_3,y_3)$位于同一直线上的充分必要条件.

**解** 在平面直角坐标系中直线的一般方程为

$$ax+by+c=0 \tag{1-1}$$

3 个点位于该直线上时,点的坐标满足方程组

$$\begin{cases} ax_1+by_1+c=0 \\ ax_2+by_2+c=0 \\ ax_3+by_3+c=0 \end{cases} \tag{1-2}$$

作为一条直线,方程(1-1)中$a$、$b$、$c$不全为零,因此关于变量$a$、$b$、$c$的齐次线性方程组(1-2)有非零解. 所以 3 个点位于同一直线上等价于方程组(1-2)有非零解,由克莱姆法则知,3 个点$(x_1,y_1)$,$(x_2,y_2)$,$(x_3,y_3)$位于一直线上的充分必要条件为

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**例 1.14**　写出通过点(1,1,1),(1,1,−1),(1,−1,1),(−1,0,0)的球面方程.

**解**　空间直角坐标系中球面的一般方程为 $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$. 若上述四点在球面上,则其坐标满足该方程组

$$\begin{cases} a+b+c+d=-3 \\ a+b-c+d=-3 \\ a-b+c+d=-3 \\ a-d=1 \end{cases} \tag{1-3}$$

解方程组(1-3)得 $a=-1, b=c=0, d=-2$.

所以该球面的一般方程为 $x^2+y^2+z^2-x-2=0$,配方得

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

所以球面半径为$\frac{3}{2}$,球心坐标为$\left(\frac{1}{2},0,0\right)$.

注:读者不妨尝试写出类似例 1.13 的充分必要条件.

**例 1.15**　计算 $n$ 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

**解**　将 $D_n$ 写成一个便于计算的 $n+1$ 阶行列式(在 $D_n$ 的第 1 行前边加了一行,又在所得行列式的第 1 列前边加了一列,且使所得 $n+1$ 阶行列式的值与原来行列式 $D_n$ 的值相等.)

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[(i=2,\cdots,n+1)]{-r_1+r_i} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=2,\cdots,n+1)]{c_i+c_1} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n} a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1+\sum_{i=1}^{n} a_i$$

**例 1.16**　计算 $n$ 阶行列式(其中 $a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n$)

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \\ a_1^{n-2}b_1 & a_2^{n-2}b_2 & a_3^{n-2}b_3 & \cdots & a_n^{n-2}b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_1^{n-2} & a_2b_2^{n-2} & a_3b_3^{n-2} & \cdots & a_nb_n^{n-2} \\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & b_3^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

**解** 从 $D_n$ 的第 $j$ 列提取因子 $a_j^{n-1}$,$(j=1,2,\cdots,n)$,由范德蒙行列式的结论得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} & \frac{b_3}{a_3} & \cdots & \frac{b_n}{a_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2 & \left(\frac{b_3}{a_3}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \\ \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_3}{a_3}\right)^{n-1} & \cdots & \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (a_1a_2\cdots a_n)^{n-1}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}\left(\frac{b_i}{a_i}-\frac{b_j}{a_j}\right).$$

## 1.5 自测题

### 一、填空题

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$ ________.

2. 由行列式的定义计算 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 $x^4$ 的系数 $=$ ________.

3. $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$,则 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=$ ________.

4. 若 $D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$,则 $A_{11}+A_{21}+A_{31}=$ ________.

5. 若行列式每行元素之和都为零,则此行列式的值为________.

## 二、选择题

1. $D=\begin{vmatrix}3&4&0&0\\2&3&0&0\\0&0&5&6\\0&0&7&8\end{vmatrix}=(\quad)$.

(A) 2　　(B) $-2$　　(C) 0　　(D) 1

2. 若 $\begin{vmatrix}1&2&5\\1&3&-2\\2&5&u\end{vmatrix}=0$，则 $u=(\quad)$.

(A) 2　　(B) 3　　(C) $-2$　　(D) $-3$

3. $D_1=\begin{vmatrix}1&3&1\\2&2&3\\3&1&5\end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}$，若 $D_1=D_2$，则 $\lambda=(\quad)$.

(A) 0,1　　(B) 0,2　　(C) $1,-1$　　(D) $2,-1$

4. 当满足(　)时，方程组 $\begin{cases}kx+z=0\\2x+ky+z=0\\kx-2y+z=0\end{cases}$ 有非零解.

(A) $k=0$　　(B) $k=-1$　　(C) $k=2$　　(D) $k=-2$

5. 设 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$，其中 $M_{ij}$ 为 $a_{ij}$ 的余子式，$A_{ij}$ 为 $a_{ij}$ 的代数余子式，则 $D=(\quad)$.

(A) $a_{i1}M_{i1}+a_{i2}M_{i2}+\cdots+a_{in}M_{in}$

(B) $a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$

(C) $(-1)^{i+1}a_{i1}M_{j1}+(-1)^{i+2}a_{i2}M_{j2}+\cdots+(-1)^{i+n}a_{in}M_{jn}$

(D) $(-1)^{i+1}a_{i1}A_{i1}+(-1)^{i+2}a_{i2}A_{i2}+\cdots+(-1)^{i+n}a_{in}A_{in}$

## 三、计算题

1. 利用行列式的性质计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}12&13\\9988&9987\end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&2\\1&1&1\end{vmatrix}$　　(3) $\begin{vmatrix}246&427&327\\14&543&443\\-342&721&621\end{vmatrix}$

2. 用克莱姆法则解方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+3x_3=-1\\x_1+3x_2+6x_3=0\end{cases}$$

3. 判断齐次线性方程组是否有非零解