

第二卷

求是集

QIUSHIJI

——李杰学术论文选



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

求是集

——李杰学术论文选

第二卷



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本文集是李杰教授在结构工程领域发表论文的选集。书中论述了结构工程研究的关键科学问题和作者关于物理随机系统研究的基本思想。以此为纲,全书从六个方面展现了作者在过去 20 年中的主要研究工作。包括:灾害性动力作用分析与建模、混凝土随机损伤力学、随机结构分析与建模、概率密度演化理论、结构可靠性分析与结构控制、工程网络可靠性分析与设计方面的内容。这些内容反映了我国结构工程基础研究领域的热点问题和最新研究进展。

本书可供结构工程领域的教学、科研、工程技术人员和研究生阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

求是集:李杰学术论文选. 第二卷 / 李杰著. -- 上海: 同济大学出版社, 2016. 10
ISBN 978-7-5608-6565-2

I. ①求… II. ①李… III. ①结构工程—文集
IV. ①TU3-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 240245 号

求是集——李杰学术论文选(第二卷)

李 杰 著

责任编辑 李小敏

责任校对 徐春莲

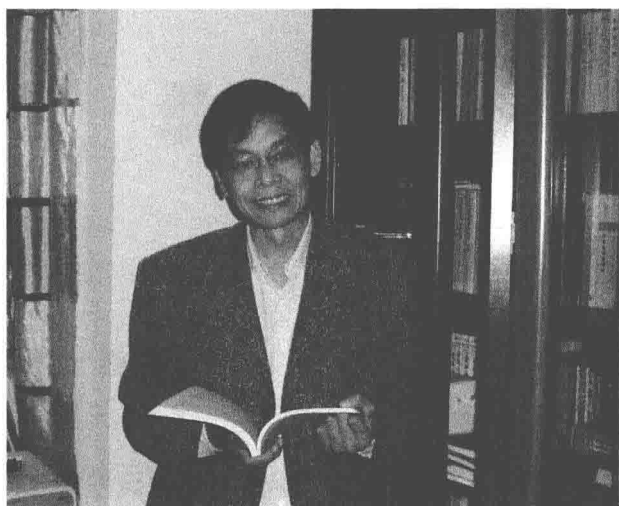
封面设计 于 飞

出版发行 同济大学出版社 www.tongjiipress.com.cn
(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)
经 销 全国各地新华书店
印 刷 虎彩印艺股份有限公司
开 本 787 mm×1 092 mm 1/16
印 张 29.5
字 数 590 000
版 次 2016 年 10 月第 1 版 2016 年 10 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5608-6565-2

定 价 198.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

李杰, 同济大学结构工程学科讲座教授, 博士生导师, 上海防灾救灾研究所所长。兼任国际结构安全性与可靠性协会(IASSAR)执行委员会委员、国际土木工程风险与可靠性协会(CERRA)主席团成员、国际结构安全性联合委员会(JCSS)委员; 中国振动工程学会副理事长、随机振动专业委员会主任、中



国建筑学会结构计算理论与工程应用专业委员会主任等学术职务; 国际期刊 *Structural Safety*, *International Journal of Damage Mechanics* 等刊编委。

长期从事结构工程理论研究工作, 在随机动力学、混凝土损伤力学、工程可靠性研究中有系列学术贡献。著有《地震工程学导论》(地震出版社, 1992 年)、《随机结构系统——分析与建模》(科学出版社, 1996 年)、《生命线工程抗震——基础理论与应用》(科学出版社, 2005 年)、《Stochastic Dynamics of Structures》(John Wiley & Sons, 2009)、《混凝土随机损伤力学》(科学出版社, 2014 年)等学术著作; 在国内外学术期刊发表研究论文 400 余篇, 其中 SCI 收录 120 余篇、EI 收录 260 余篇, 研究论著被他人引用 7000 余次; 获得国家级、省部级科技奖励 20 余项。

1998 年获得国家杰出青年科学基金; 1999 年入选教育部“长江学者奖励计划”首批特聘教授; 同年, 被国务院授予“有突出贡献的中青年专家”称号; 2001 年被教育部授予“全国优秀教师”称号; 2004 年被上海市授予“劳动模范”称号; 2005 年入选上海市“科技领军人才计划”; 2012 年被中国科学技术协会授予“全国优秀科技工作者”称号; 2013 年被丹麦王国奥尔堡大学授予荣誉博士学位; 2014 年, 因在概率密度演化理论与大规模基础设施系统抗震可靠性设计方面的学术成就, 被美国土木工程师学会(ASCE)授予 Freudenthal 奖章, 是这一权威国际奖项设立 40 年来的第一位亚洲获奖者。

目 录

第一卷目录

综论一 结构工程研究中的关键科学问题

结构工程研究中的关键科学问题	3
----------------------	---

第一篇 结构动力作用分析与建模

基于标准正交基的随机过程展开法	67
地震动随机过程的正交展开	75
脉动风速随机过程的正交展开	87
随机脉动风场的正交展开方法	98
基于物理的随机地震动模型研究	107
工程地震动的物理随机函数模型	115
工程场地地震动随机场的物理模型	128
工程随机地震动物理模型的参数统计与检验	142
随机地震动的概率密度演化	153
脉动风速功率谱与随机 Fourier 幅值谱的关系研究	161
实测风场的随机 Fourier 谱研究	172
结构随机动力激励的物理模型:以脉动风速为例	183
基于演化相位谱的脉动风速模拟	198
随机风场空间相干性研究	209
基于拟层流风波生成机制的海浪谱模型	220

第二篇 混凝土随机损伤力学

混凝土随机损伤本构关系	235
混凝土随机损伤本构关系——单轴受压分析	245
混凝土弹塑性损伤本构模型研究 I：基本公式	253
混凝土弹塑性损伤本构模型研究 II：数值计算和试验验证	265
混凝土随机损伤力学的初步研究	277
混凝土二维本构关系试验研究	289
混凝土弹塑性随机损伤本构关系研究	300
混凝土随机损伤力学——背景、意义与研究进展	314
混凝土单轴受压本构关系的概率密度描述	333
混凝土单轴受压动力全曲线试验研究	344
混凝土动力随机损伤本构关系	351
基于微-细观机理的混凝土疲劳损伤本构模型	363
基于摄动方法的多尺度损伤表示理论	377
混凝土破坏过程模拟的随机介质模型	391
随机结构非线性地震反应仿真分析	403
混凝土框架结构非线性静力分析的随机模拟	413
混凝土框架结构内力测量传感器研制	422
钢筋混凝土框架结构随机非线性行为试验研究	431
钢筋混凝土双连梁短肢剪力墙结构试验研究	441
双连梁短肢剪力墙结构非线性随机演化分析	457

第二卷目录

第三篇 随机结构分析与建模

随机结构动力矩阵的线性表示与线性截断	3
随机结构分析的扩阶系统方法(Ⅰ):扩阶系统方程	11
随机结构分析的扩阶系统方法(Ⅱ):结构动力分析	21
复合随机振动分析的扩阶系统方法	31
考虑场地介质随机特性的无限域波动分析	41
考虑岩土介质随机特性的工程场地地震动随机场分析	50
基于微分算子变换的广义卡尔曼估计方法	58
随机结构系统建模问题研究	66
未知输入条件下的结构物理参数识别研究	74
部分输入未知时求解动力复合反演问题的补偿算法	85
一类加权全局迭代参数卡尔曼滤波算法	92
基于反应力向量灵敏度的模型参数化方法	102

第四篇 概率密度演化理论

随机结构动力反应分析的概率密度演化方法	115
随机结构非线性动力响应的概率密度演化分析	124
随机结构响应密度演化分析的映射降维法	134
结构随机响应概率密度演化分析的数论选点法	144
随机动力系统中的广义密度演化方程	155
结构动力非线性随机反应的联合概率分布	167
结构随机动力非线性反应的整体灵敏度分析	180
随机动力系统中的概率密度演化方程及其研究进展	192

第五篇 结构可靠性分析与结构控制

随机结构动力可靠度分析的概率密度演化方法	225
结构反应的内蕴相关性与可靠度分析	234

钢筋混凝土框架结构体系可靠度分析	247
考虑多重失效机制的结构体系可靠度分析	257
风力发电高塔系统抗风动力可靠度分析	272
近海风力发电高塔波浪动力可靠度分析	285
基于广义密度演化方程的结构随机最优控制	297
考虑控制器拓扑的随机动力系统最优控制	308
结构地震反应随机最优控制的多目标概率准则研究	322

第六篇 工程网络可靠性分析与设计

大型生命线工程抗震可靠度分析的递推分解算法	335
大型相关失效工程网络系统可靠度的近似算法	343
生命线工程网络抗震可靠性分析方法的比较研究	352
网络可靠度分析的最小割递推分解算法	366
基于遗传算法的生命线工程网络抗震优化设计	375
生命线网络系统抗震拓扑优化的 Benchmark 模型	384
城市供水管网系统抗震功能可靠度分析	394
基于模拟退火算法的供水管网抗震优化设计	404
基于微粒群算法的供水管网抗震优化设计	414
基于可靠度的生命线工程网络抗震设计	422

综论二 物理随机系统研究的若干基本观点

物理随机系统研究的若干基本观点	433
-----------------------	-----

随机结构动力环境的数值表示与线性模拟

李 强

摘要 本文首先对随机结构动力环境的数值表示与线性模拟进行了系统的论述,然后对随机结构动力环境的数值表示与线性模拟进行了系统的论述,最后对随机结构动力环境的数值表示与线性模拟进行了系统的论述。

第三篇 随机结构分析与建模

第 一 章

第一章主要介绍随机结构动力环境的数值表示与线性模拟的基本概念、基本原理和基本方法。首先,本章介绍了随机结构动力环境的数值表示与线性模拟的基本概念,包括随机结构动力环境的定义、随机结构动力环境的分类、随机结构动力环境的性质等。其次,本章介绍了随机结构动力环境的数值表示与线性模拟的基本原理,包括随机结构动力环境的数值表示原理、随机结构动力环境的线性模拟原理等。最后,本章介绍了随机结构动力环境的数值表示与线性模拟的基本方法,包括随机结构动力环境的数值表示方法、随机结构动力环境的线性模拟方法等。本章的内容是全书的基础,也是后续章节的基础。

本章主要介绍随机结构动力环境的数值表示与线性模拟的基本概念、基本原理和基本方法。首先,本章介绍了随机结构动力环境的数值表示与线性模拟的基本概念,包括随机结构动力环境的定义、随机结构动力环境的分类、随机结构动力环境的性质等。

随机结构动力矩阵的线性表示与线性截断

李 杰

摘 要 随机结构地震反应分析是地震工程研究在 20 世纪 90 年代的热点课题之一. 文中论述了随机结构分析中动力矩阵的线性表示与线性截断方式. 提出了虚拟结构方法, 为随机结构动力矩阵的形成打开了方便之门.

前 言

传统的结构地震反应分析理论, 是基于确定性结构、确定性或随机性的地震动输入这样一个基本格局的. 这种分析模型忽略了结构物在模型化过程中所引入的各种不确定性因素, 而仅仅关注于结构主导因素的把握. 容忍这样忽略的主要原因来自两方面的认识: ①地震动是随机性很大的动力作用, 与动力作用的随机性相比较, 结构的随机性可以忽略; ②与输入的随机性相比较, 结构的随机性是更难把握的一个侧面, 不仅在分析上存在巨大的数学困难而难以获得问题的解析解, 而且对动力问题甚至难以获得理想的近似解, 同时, 在对结构随机因素的概率描述与概率统计上也存在实际的困难. 近年来, 这两方面的认识都不同程度地有所转变, 针对地震动的随机性与结构随机性的关系问题, 人们认识到这是属于两个不同性质的问题, 简单地以一种随机性代替另一种随机性是不适宜的. 尤其是地震动研究在近二十年来的巨大进展, 已使人们感觉到地震动的随机性已远不如人们开始想象的那么严重, 事实上, 当把震级、距离、场地条件等因素综合考虑进来之后, 地震动的随机性已进入到人们可以接受的数值范围. 而在另一侧面, 结构的随机性所引起的动力反应的大幅度涨落现象则使人们认识到, 在一些情况下, 结构随机性所引起的反应变异特性已足可以和地震动的随机性相比较. 至于对于随机结构的分析与结构随机性质的把握, 则因为随机结构分析的正交展开理论的产生与发展, 随机结构建模理论的出现, 而使得在实际工程中进行随机结构地震反应分析工作成为可以预期的现实. 正是基于上述观念的转变, 随机结构地震反应分析研究工作正在成为 90 年代地震工程基础理论研究工作中的热点问题之一.

在随机结构分析中, 结构动力矩阵的形成是带有基础性意义的工作. 由于多数文献集中于怎样进行分析的研究之中, 对于随机动力矩阵的形成还极少系统、专门

的论述. 基于这一背景, 本文特别阐述随机结构动力矩阵的线性表示与线性截断问题. 文中, 提出了虚拟结构方法, 使得随机结构动力矩阵可以如常规有限元刚度集成一样方便而简单.

1 随机动力矩阵

本文所述随机矩阵是指在随机结构动力分析中所出现的反映结构动力特性的矩阵, 如质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵等. 当这些矩阵中的基本变量如材料的质量密度、阻尼系数、弹性模量、泊松比、几何尺寸等被处理为随机参数时, 相应的矩阵成为随机矩阵.

不失一般性, 设结构参数随机场为 $\{B(U)U \in D\}$, 则利用随机场离散的离散化方法如局部平均法^[1], 可将其离散化为随机变量集合 $\{V_e, e=1, 2, \dots, n\}$, 这里 n 为场域单元划分数. 通常, 为方便起见, 将随机场离散划分格式取作与结构有限单元相同的划分格式. 将 V_e 转化为标准化随机变量的方式表达

$$V_e = V_{e0} + V_{er}\zeta_e \quad (e = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

式中, V_{e0} 为 V_e 的均值; V_{er} 为 V_e 的均方差; ζ_e 为均值为零、方差为 1 的标准化随机变量.

在另一方面, 对经过上述有限单元划分的单元, 可以按有限元位移法建立其单元特性矩阵, 一般地有

$$\tilde{m}_e = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} d\Omega \quad (2)$$

$$\tilde{c}_e = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \eta \mathbf{N} d\Omega \quad (3)$$

$$\tilde{k}_e = \int_{\Omega} \mathbf{B} \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (4)$$

式中, ρ 为质量密度; η 为阻尼系数; $\mathbf{N}$ 为形函数矩阵; $\mathbf{B}$ 为几何矩阵; $\mathbf{D}$ 为弹性矩阵.

前述 V_e 可以表示单元特性矩阵中的任一基本变量, 如 $\rho, \eta, E, U, L_e, I_e, A_e$ 等. 亦可以用 $V_a (i=1, 2, \dots)$ 表示多个基本变量的共同影响. 显然, 当单元特性矩阵中出现基本变量为随机变量的情况时, 相应单元特性矩阵成为单元随机矩阵.

2 随机矩阵的线性表示

当随机变量 V_e 以线性因子形式出现在动力矩阵中时, 相应随机矩阵可以表示为标准化随机变量的线性函数形式. 不失一般性, 用 $\mathbf{S}$ 表达一般的随机动力矩阵, 则有

$$\tilde{\mathbf{S}}_e = \tilde{\mathbf{S}}_{e0} + \tilde{\mathbf{S}}_{er} \zeta_e \quad (5)$$

其中, $\tilde{\mathbf{S}}_e$ 表示单元随机矩阵; $\tilde{\mathbf{S}}_{e0}$ 为单元均值参数矩阵; $\tilde{\mathbf{S}}_{er}$ 为单元均方差参数矩阵; ζ_e 为相应于 e 单元的标准化的随机变量。

事实上, 上述结果可由随机矩阵 $\tilde{\mathbf{S}}_e$ 关于标准化随机变量 ζ_e 的级数展开形式导出

$$\tilde{\mathbf{S}}_e = \tilde{\mathbf{S}}_{e0} + \left. \frac{d\tilde{\mathbf{S}}_e}{d\zeta_e} \right|_{\zeta_e=0} \zeta_e + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\tilde{\mathbf{S}}_e}{d\zeta_e^2} \right|_{\zeta_e=0} \zeta_e^2 + \cdots \quad (6)$$

由于 V_e 为 $\tilde{\mathbf{S}}_e$ 中的线性因子, 因此二阶以上导数为零, 而

$$\frac{d\tilde{\mathbf{S}}_e}{d\zeta_e} = \frac{d\tilde{\mathbf{S}}_e}{dV_e} \frac{dV_e}{d\zeta_e} = \tilde{\mathbf{S}}_{er} \quad (7)$$

于是式(5)成立。

以线性因子形式出现在动力矩阵中的基本变量有 ρ , η , E , I , A 等物理量。以平面梁单元为例, 不考虑轴向变形, 当取 ρ 为随机参数时, 有

$$\tilde{\mathbf{m}}_{e0} = \frac{\rho_{e0} Al}{420} \times \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 12 & -6l \\ -13l & -3l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\tilde{\mathbf{m}}_{er} = \frac{\rho_{er} Al}{420} \times \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 12 & -6l \\ -13l & -3l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

由于坐标变换与单元定位属于确定性线性变换, 因此, 对于在整体坐标系下的单元矩阵及整体结构动力矩阵亦保持类似于式(5)的关系, 即有

$$\mathbf{S}_e = \mathbf{S}_{e0} + \mathbf{S}_{er} \zeta_e \quad (10)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \sum_e \mathbf{S}_{er} \zeta_e \quad (11)$$

其中,

$$\mathbf{S}_e = \mathbf{T}_a^T \tilde{\mathbf{S}}_{e0} \mathbf{T}_a \quad (12)$$

$$\mathbf{S}_{er} = \mathbf{T}_a^T \tilde{\mathbf{S}}_{er} \mathbf{T}_a \quad (13)$$

$$\mathbf{S}_0 = \sum_e \mathbf{T}_e^T \mathbf{S}_{e0} \mathbf{T}_e \quad (14)$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{er} = \mathbf{T}_e^T \mathbf{S}_{er} \mathbf{T}_e \quad (15)$$

这里, T_a 为单元坐标转换矩阵, T_e 为单元定位矩阵. 于是, 系统的整体动力矩阵可以通过均值参数矩阵 S_0 和均方差参数矩阵 $\tilde{S}_{er}$ 按式(11)形成. 其中均值参数矩阵可以以单元均值参数按直接刚度法形成, 均方差参数矩阵可以通过构造如下“虚拟结构”按直接刚度法形成. 这一虚拟结构各单元相应于给定基本变量的参数为

$$\{r\} = (0, 0, \dots, \underset{\text{第 } e \text{ 个单元}}{V_{er}}, 0, \dots, 0)^T \quad (16)$$

当单元随机变量具有同分布参数时, 可以合并构造虚拟结构. 不失一般性, 设结构内各单元随机变量可以划分为 N 个子集, 在每个子集内随机变量具有同分布性质, 则式(11)可表示为

$$S = S_0 + \sum_{j=1}^N S_j \zeta_j \quad (17)$$

其中

$$S_j = \sum_e T_e^T S_e T_e \quad (18)$$

S_j 可按如下虚拟结构由直接刚度法形成:

$$\{r\} = (0, \dots, V_{lr}, 0, \dots, V_{mr}, 0, \dots, V_{pr}, 0, \dots, 0) \quad (19)$$

上式表明, 在第 j 个子集中, 共有 3 个单元, 由这 3 个单元相应的均方差参数与其他零单元一起共同构成虚拟结构.

引用随机向量的相关分解技术, 可以进一步使动力矩阵的线性表达与形成得到简化. 事实上, 根据相关结构分解技术, 式(1)可表达为

$$V_e = V_{e0} + \sum_{i=1}^n \phi_i \sqrt{\lambda_i} b_i \quad (20)$$

式中 $b_i (i=1, 2, \dots)$ 为标准化独立随机变量序列; λ_i 与 ϕ_i 分别为 V 的协方差矩阵的特征值与特征向量.

对比式(1)与式(20)可知:

$$\zeta_e = \frac{1}{V_{er}} \sum_{i=1}^n \phi_i \sqrt{\lambda_i} b_i \quad (21)$$

将上式代入式(11), 将给出

$$S = S_0 + \sum_e \tilde{S}_{er} \frac{1}{V_{er}} \sum_{i=1}^n \phi_i \sqrt{\lambda_i} b_i \quad (22)$$

由于随机变量 V_e 以线性因子形式出现于动力矩阵中, 所以上式分母中的 V_{er} 可与 $\tilde{S}_{er}$ 中的 V_{er} 约去. 同时, 上式中两个求和号也可以调换次序写为如下形式

$$S = S_0 + \sum_{i=1}^n S_i b_i \quad (23)$$

其中

$$\mathbf{S}_i = \sum_e \mathbf{T}_e^T \mathbf{S}_{er} \mathbf{T}_e \quad (24)$$

式中, $\mathbf{S}_{er}$ 是以 $\phi_i \sqrt{\lambda_i}$ 为基本变量形成第 i 个虚拟结构时的 e 单元在整体坐标系下的单元动力矩阵。

由于独立随机变量 $\eta_i = \sqrt{\lambda_i} b_i$ 的方差具有渐近序列的性质, 因此可以用 $q < n$ 的子集代替原随机变量集合, 即有

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \sum_{i=1}^q \mathbf{S}_i b_i \quad (25)$$

针对 r 个虚拟结构分别形成均方差矩阵 $\mathbf{S}_i$, 均值参数结构形成 $\mathbf{S}_0$, 即可按式 (25) 形成结构的随机动力矩阵。有意义的是, 上述形成方式均可借助有限单元法中的直接刚度法进行, 因此是比较方便的。

应该指出, 经过相关结构分解, 标准化随机变量集合 b 已为独立随机变量集合, 这为计算反应的数值特征进一步提供了方便。

3 随机矩阵的级数表示与截断

当随机变量 V_e 以非线性因子形式出现在动力矩阵中时, 相应的随机矩阵可表示为级数形式。以层间剪切型结构为例, 其第 e 层的单元刚度矩阵可表示为

$$\mathbf{K}_e = \frac{12\mathbf{E}_e \mathbf{I}_e}{l_e^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

当层间高度 l_e 为随机参数时, 它以非线性因子方式出现在动力矩阵之中, 设

$$l_e = l_{e0} + l_{er} \cdot \zeta_e \quad (27)$$

其中, l_{e0} 为层高均值; l_{er} 为层高方差; ζ_e 为标准化随机变量。

将 l_e 的表达式代入式 (26), 则单元刚度矩阵为关于随机变量 ζ_e 的非线性函数, 利用随机函数的级数展开, 可以将这种表达式转化为关于 ζ_e 的级数表达式, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e &= \mathbf{K}_{e0} + \left. \frac{d\mathbf{K}_e}{d\zeta_e} \right|_{\zeta_e=0} \zeta_e + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\mathbf{K}_e}{d\zeta_e^2} \right|_{\zeta_e=0} \zeta_e^2 + \dots \\ \zeta_e^2 + \dots &= \frac{12\mathbf{E}_e \mathbf{I}_e}{l_{e0}^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{36\mathbf{E}_e \mathbf{I}_e l_{er}}{l_{e0}^4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \zeta_e + \\ &\quad \frac{72\mathbf{E}_e \mathbf{I}_e l_{er}^2}{l_{e0}^5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \zeta_e^2 + \dots \end{aligned} \quad (28)$$

显然,当仅取前两项时, $\mathbf{K}_e$ 退化为 ζ_e 的线性函数.

一般地,含非线性变量的随机动力矩阵可以用下式表示

$$\tilde{\mathbf{S}}_e = \tilde{\mathbf{S}}_{0e} + \left. \frac{d\tilde{\mathbf{S}}_e}{d\zeta_e} \right|_{\zeta_e=0} \zeta_e + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\tilde{\mathbf{S}}_e}{d\zeta_e^2} \right|_{\zeta_e=0} \zeta_e^2 + \dots \quad (29)$$

或写为

$$\tilde{\mathbf{S}}_e = \tilde{\mathbf{S}}_{0e} + \tilde{\mathbf{S}}_{1e}\zeta_e + \tilde{\mathbf{S}}_{2e}\zeta_e^2 + \dots \quad (30)$$

此处,

$$\tilde{\mathbf{S}}_{ie} = \left. \frac{1}{i!} \frac{d^{(i)}\tilde{\mathbf{S}}_e}{d\zeta_e^i} \right|_{\zeta_e=0} \quad (31)$$

经过坐标变换和单元定位,可给出整体动力矩阵为

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \sum_e \bar{\mathbf{S}}_{1e}\zeta_e + \sum_e \bar{\mathbf{S}}_{2e}\zeta_e^2 + \dots \quad (32)$$

其中,

$$\bar{\mathbf{S}}_{ie} = \mathbf{T}_e^T \mathbf{T}_a^T \tilde{\mathbf{S}}_{ie} \mathbf{T}_a \mathbf{T}_e^T \quad (33)$$

由于基本变量 V_{er}/V_{e0} 为一小量,所以从数字特征收敛意义上,上述级数展开可取有限展开形式加以截断. 最常见的是线性截断,此时有

$$\tilde{\mathbf{S}}_e \approx \tilde{\mathbf{S}}_{0e} + \tilde{\mathbf{S}}_{1e}\zeta_e \quad (34)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \sum_e \bar{\mathbf{S}}_{1e}\zeta_e \quad (35)$$

截断误差应从 M 阶精度意义上考虑,例如,线性截断的二阶精度可用方差函数的余项表达:

$$\epsilon = \frac{D\mathbf{S}_2 - D\mathbf{S}}{D\mathbf{S}_1} \quad (36)$$

这里, $\mathbf{S}_1$ 表示按线性截断的结果; $\mathbf{S}_2$ 表示按 ζ_e 的 2 次项截断的结果.

对于上述线性截断形式,也可以引用相关结构分解的概念将式(35)化为式(25)的形式,这将使计算得到简化.

4 多随机因素复合情况

上述两节,是从每一动力矩阵中只出现一类随机参数的情况考虑的,本节考虑出现多类随机参数的情形. 此时,对于结构有限元划分的任一单元,经随机场局部平均后的随机变量组可以表达为

$$V_{ej} = V_{ej0} + V_{ejr} \zeta_{ej} \quad \left(\begin{matrix} e = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, m \end{matrix} \right) \quad (37)$$

式中, m 为单元 e 中需考虑的随机变量个数, 其余各符号含义可据式(1)类推.

随机矩阵 $\tilde{S}_e$ 关于标准化随机变量的级数展开式为

$$\tilde{S}_e = \tilde{S}_{e0} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial \tilde{S}_e}{\partial \zeta_{ej}} \right) \zeta_{ej} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial^2 \tilde{S}_e}{\partial \zeta_{ej} \partial \zeta_{el}} \right)_0 \zeta_{ej} \zeta_{el} + \dots \quad (38)$$

式中, 记号 $(\cdot)_0$ 表示对求导后函数中所有 ζ_{ej} 取零值.

当各基本变量皆为动力矩阵的线性因子时, 即, 若

$$\tilde{S}_e = \tilde{S}_e \left(\prod_{j=1}^m V_{ej} \right) \quad (39)$$

则式(38)可表示为

$$\tilde{S}_e = \tilde{S}_{e0} + \sum_{j=1}^m \tilde{S}_{ejr} \zeta_{ej} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m \tilde{S}_{ejlr} \zeta_{ej} \zeta_{el} + \dots \quad (40)$$

其中,

$$\tilde{S}_{e0} = \tilde{S}_{e0} \left(\prod_{j=1}^m V_{ejD} \right) \quad (41)$$

$$\tilde{S}_{ejr} = \tilde{S}_{ejr} \left(V_{ejr} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m V_{ejD} \right) \quad (42)$$

$$\tilde{S}_{ejlr} = \tilde{S}_{ejlr} \left(V_{ejr} V_{elr} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j, e}}^m V_{ejD} \right) \quad (43)$$

$(\cdot)$ 表示按这些参数形成单元动力矩阵.

与单类变量情况比较, 可见多类变量的特殊性在于要考虑复合均方差参数矩阵(如 $\tilde{S}_{ejlr}$) 的影响. 对于实际工程问题, 方差参数与均值参数相比一般为小参数. 因此从满足动力矩阵的二阶精度的角度考虑, 可以对式(40)作线性截断. 即取

$$\tilde{S}_e = \tilde{S}_{e0} + \sum_{j=1}^m \tilde{S}_{ejr} \zeta_{ej} \quad (44)$$

而整体结构的动力矩阵可表示为

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \sum_{j=1}^m \sum_e \bar{\mathbf{S}}_{ejr} \zeta_{ej} \quad (45)$$

其中

$$\bar{\mathbf{S}}_{ejr} = \mathbf{T}_a^T \mathbf{T}_e^T \tilde{\mathbf{S}}_{ejr} \mathbf{T}_e \mathbf{T}_a \quad (46)$$