高等学校教材

高等数学（下册）

主编　陈巨龙　孙王杰

高等教育出版社

高等学校教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

（下　册）

主编　陈巨龙　孙王杰

高等教育出版社·北京

内容提要

本书分为上、下两册，下册包括多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、常微分方程四个单元，书后附有习题答案。

本书可作为高等工科院校工学、理学、经济学、管理学等各专业的教材或教学参考书，也可作为成人教育的教材，还可用作工程技术人员的自学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下册/陈巨龙，孙王杰主编. --北京：高等教育出版社，2015.2
ISBN 978-7-04-041897-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①陈… ②孙… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 015933 号

策划编辑 李 蕊　　责任编辑 李 蕊　　封面设计 李小璐　　版式设计 余 杨
插图绘制 宗小梅　　责任校对 刘 莉　　责任印制 朱学忠

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 北京鑫海金澳胶印有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 13
字　　数 230 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2015 年 2 月第 1 版
印　　次 2015 年 2 月第 1 次印刷
定　　价 22.00 元

物 料 号 41897-00

目　　录

第五单元　多元函数微分学

在工程实践问题中经常涉及多方面的因素，在数学上体现为多个自变量决定一个因变量，因此有必要讨论多元函数的微积分学问题. 我们首先研究多元函数的微分法及其应用，以二元函数为研究主体，并将研究结果推广到二元以上的多元函数上去.

§5.1　多元函数及其连续性

在多元函数中，仍然沿用一元函数的极限与连续思想，得到多元函数的连续性质.

一、区域

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一点，δ 为正数，与 P_0 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体称为点 P_0 的 δ **邻域**，记作

$$U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\},$$

即

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

这是以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为圆心、δ 为半径的平面圆内部的点 $P(x,y)$ 的全体. 如果不需考虑邻域半径 δ，点 P_0 的 δ 邻域也可简记作 $U(P_0)$.

点 P_0 的**去心邻域**记作

$$\mathring{U}(P_0)=\{(x,y) \mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

设 E 是平面点集，P 是该平面上的一点，若存在某个邻域 $U(P)$，使 $U(P)\subset E$，则称 P 为 E 的**内点**. 若 $U(P)\cap E=\varnothing$，则称 P 为 E 的**外点**.

若 E 的点都是内点，则称 E 为**开集**，如 $E_1=\{(x,y) \mid 1<x^2+$

$y^2<4\}$.

若点 P 的任一邻域内既含有属于 E 的点也含有不属于 E 的点，则称点 P 为 E 的**边界点**. E 的边界点可以属于 E,也可以不属于 E.

E 的边界点全体称为 E 的**边界**,如 E_1 的边界是 $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}$.

如图 5-1 所示,P_1 为内点,P_2 为外点,而 P_3 为边界点.

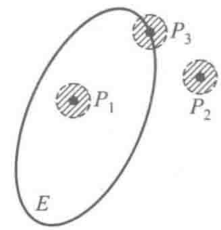

图 5-1

若开集 D 内的任意两点都可用折线或曲线连接起来,并且该连线上的点全部都属于 D,则称开集 D 是**连通的**.

连通的开集称为**区域**或**开区域**,如 E_1 就是区域.

开区域连同其边界一起所构成的点集称为**闭区域**,如 $E_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$.

对于点集 E,若有正数 K,使 $\forall P\in E$ 与某定点 A 之间的距离 $|AP|$ 不超过 K,即 $|AP|\leqslant K$,则称 E 为**有界集**,如 E_1 是有界开区域,而 E_2 是有界闭区域;否则称 E 为**无界集**,如 $E_3=\{(x,y)\mid x+y>0\}$ 就是无界开区域.

将 n 元有序实数组 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 的全体所构成的集合记为 $\mathbf{R}^n$,其中每个 n 元数组 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 可称为 $\mathbf{R}^n$ 的一点或一个 n 维向量,数 x_i 称为该点的第 i 个坐标. 当所有的 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都为零时,称这样的元素为 $\mathbf{R}^n$ 中的零元,记为 $\mathbf{0}$. 设 $\boldsymbol{x}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,$\boldsymbol{y}=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中任意两个元素,$\lambda,\mu\in\mathbf{R}$,规定 $\mathbf{R}^n$ 中元素之间的线性运算为

$$\lambda x+\mu y=\{\lambda x_1+\mu y_1,\lambda x_2+\mu y_2,\cdots,\lambda x_n+\mu y_n\}.$$

定义了线性运算的集合 $\mathbf{R}^n$ 称为 n 维空间,记为 $\mathbf{R}^n$. 如 $\{x,y,z\}$ 的全体就构成了 3 维空间 $\mathbf{R}^3$.

规定 n 维空间中两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 间的距离为

$$|PQ|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

二、多元函数概念

定义 5.1　设 D 是平面点集，若 $\forall P(x,y)\in D$，按某种法则有唯一确定的数 z 与之对应，则称 z 为变量 x,y 的**二元函数**（或点 P 的函数），记作 $z=f(x,y)$（或 $z=f(P)$）. 点集 D 为函数的**定义域**，x,y 为**自变量**，z 为**因变量**，$\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 为函数的**值域**.

如图 5-2 所示，以 x 为横坐标、以 y 为纵坐标、以 $z=f(x,y)$ 为竖坐标就唯一确定了空间一点 $M(x,y,z)$，当 (x,y) 遍取 D 上所有点 P 时，可得到一个空间点集 $\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$，称之为二元函数 $z=f(x,y)$ 的**图形**，一般来说，二元函数的图形是一张曲面.

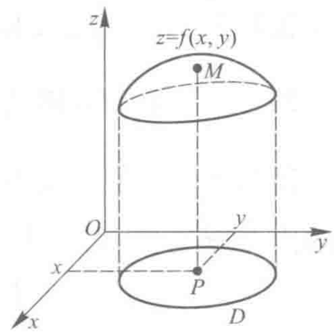

图 5-2

例如 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 是定义在闭区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}$ 上的二元函数，其图形为上半球面.

将平面点集 D 改成三维空间点集 $\Omega\in\mathbf{R}^3$，可类似定义三元函数 $u=f(x,y,z)$；改成 n 维空间点集，可定义 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 二元及其以上的函数统称为多元函数，如 $u=\arcsin(x^2+y^2+z^2)$.

三、多元函数的极限

定义 5.2　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点集 D 内有定义，且在 $P_0(x_0,y_0)$ 的任意去心邻域内都有使 $f(x,y)$ 有定义的点，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当点 $P(x,y)\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$ 时，都有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为**函数** $f(x,y)$ **当** $x\to x_0,y\to y_0$ **时的极限**，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A\quad 或\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A,$$

或

$$f(x,y)\to A(x\to x_0,y\to y_0),$$

也称为**二重极限**.

二重极限的意义是:当动点 P 以任何方式趋向于定点 P_0 时,函数 $f(x,y)$ 都趋向于同一数值 A. 由于一元函数 $x\to x_0$ 只有左右两种方式,所以二元函数极限远比一元函数极限复杂得多. 二元函数的极限概念可推广到三元及三元以上函数,并有与一元函数类似的运算法则.

四、多元函数的连续性

定义 5.3 设二元函数 $f(x,y)$ 在点集 D 内有定义,$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点或边界点,且 $P_0\in D$,若

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称**函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续**.

若函数 $f(x,y)$ 在区域 D(或闭区域 $\overline{D}$)内的每一点都连续,则称函数 $f(x,y)$ 在 D 内**连续**,或称 $f(x,y)$ 是 D 内的**连续函数**. 若 $f(x,y)$ 在点 P_0 不连续,则称 P_0 为函数 $f(x,y)$ 的**间断点**.

一元连续函数在闭区间上的性质以及运算法则都可以推广到多元连续函数上来,多元基本初等函数的含义与一元基本初等函数相类似,多元初等函数也是由常数与多元基本初等函数经过有限次的四则运算及复合运算得到的,并且能用一个数学式子表达,因而对于多元函数来说也有结论:**多元初等函数在其定义区域内连续**. 其中定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域.

与闭区间上一元连续函数的性质相类似,在有界闭区域上连续的多元函数具有如下性质:

(1) 有界性定理:在有界闭区域上连续的多元函数必有界;

(2) 最值定理:在有界闭区域上连续的多元函数必有最大值和最小值;

(3) 介值定理:在有界闭区域上连续的多元函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

例 1 求$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(xy+1)-1}=2.$

例 2 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$的连续性.

解 当 $P_0(x,y)\neq O(0,0)$时,显然函数$f(x,y)$在点 P_0连续;当 $P_0(x,y)=O(0,0)$时,若点 P 沿 $y=kx$ 的方向趋向于 P_0时,

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx\to0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx\to0}}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{k}{1+k^2}\neq0=f(x_0,y_0),$$

即当点 P 沿不同方向趋向于 P_0时,函数$f(x,y)$极限值也不同,故函数$f(x,y)$在点 $O(0,0)$的极限不存在,从而函数$f(x,y)$在点 $O(0,0)$不连续.

例 3 求$\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin(xy)}{y}$.

解

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sin(xy)}{y}=\lim_{(x,y)\to(2,0)}\left[\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot x\right]$$

$$=\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{(x,y)\to(2,0)}x=1\cdot2=2.$$

其中

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)}\left[\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot x\right]=\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{(x,y)\to(2,0)}x$$

是使用了积的极限运算法则,而$\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}x=2$则是利用了函数的连续性.

习题 5-1

1. 设$f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$,求$f\left(1,\dfrac{u}{v}\right)$.
2. 已知函数$f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$,试求$f(x+y,x-y,xy)$.
3. 设$z=x+y+f(x-y)$,且当$y=0$时$z=x^2$,求$f(x)$.

4. 求下列函数的定义域：

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$； (2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$；

(3) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$； (4) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$.

5. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{y}$； (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$； (4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$.

6. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$； (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$.

7. 研究下列函数的连续性：

(1) $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$； (2) $f(x,y)=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$.

8. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{ye^{\frac{1}{x^2}}}{y^2e^{\frac{2}{x^2}}+1}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 讨论函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是否连续？

§5.2 偏导数与全微分

一元函数的导数可以反映函数的变化率，对多元函数而言，由于具有多个自变量，函数的变化率研究也相应复杂. 我们首先研究只有一个自变量变化、而其他自变量相对不变时函数的变化状态，即函数沿着特定方向的变化率.

一、偏导数的定义

定义 5.4 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有定义，当变量 y 取定值 y_0，而变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx 时，相应地，函数也取得增量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**对自变量 x 的偏导数**,记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ f_x(x_0,y_0),\ z'_x(x_0,y_0),\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\ \text{或}\ \left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}};$$

同理函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**对自变量 y 的偏导数**定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ f_y(x_0,y_0),\ z'_y(x_0,y_0),\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\ \text{或}\ \left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}.$$

也称

$$\Delta_x f(x_0,y_0)\approx f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ **对自变量 x 的偏增量**,并称

$$\Delta_y f(x_0,y_0)\approx f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

为函数在点 $P_0(x_0,y_0)$ **对自变量 y 的偏增量**. 显然,偏导数就是函数的偏增量对于某一自变量改变量的变化率. 从这个意义理解偏导数的概念,可以看出:偏导数的本质就是当多元函数的其他自变量都固定不变时,函数相对于某一个自变量的变化率,即可看作一元函数的导数. 从而几乎所有一元函数导数的研究结果都可以推广到多元函数中,尤其是偏导数的计算可以沿用一元函数导数的公式和运算法则来完成.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在,这个偏导数就成为 x,y 的函数,称之为函数 $z=f(x,y)$ **对自变量 x 的偏导函数**,记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ f_x(x,y),\ z'_x,\ \frac{\partial f}{\partial x};$$

同理可定义函数 $z=f(x,y)$ **对自变量 y 的偏导函数**,记作

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ f_y(x,y)\ ,\ z'_y,\frac{\partial f}{\partial y}.$$

二元函数偏导数的概念可以推广到三个以上变量的多元函数中,如三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处对 x 的偏导数定义为

$$f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}.$$

函数在某点的偏导数就是函数在该点偏导函数的函数值,常把偏导函数简称为偏导数.

例 1　求函数 $z=x^2+3xy+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处的偏导数.

解　把 y 看作常量得 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x+3y$;把 x 看作常量得 $\frac{\partial z}{\partial y}=3x+2y$. 代入点 $(1,2)$ 的坐标得 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=8$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=7$.

例 2　已知物理学中理想气体的状态方程为 $pV=RT$(R 为常量),求证:$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-1$.

证　由 $p=\frac{RT}{V}$,得 $\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2}$;由 $V=\frac{RT}{p}$,得 $\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{p}$;由 $T=\frac{pV}{R}$,得 $\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R}$. 所以

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{V}{R}=-1.$$

从例 2 可以看到,偏导数是一个整体记号,不能看作分子与分母之商,这与一元函数导数的微商含义截然不同.

设 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 为曲面 $z=f(x,y)$ 上一点,过 M_0 作平面 $y=y_0$,平面截曲面得到曲线 $\begin{cases}z=f(x,y),\\y=y_0,\end{cases}$ 曲线在平面上的方程为 $z=f(x,y_0)$,则函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的偏导数

$$f_x(x_0,y_0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0},$$

这是曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率，也是偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 的几何意义；同理，偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 的几何意义是曲面 $z=f(x,y)$ 被平面 $x=x_0$ 所截得的曲线 $z=f(x_0,y)$ 在点 M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率，如图 5-3 所示.

如果一元函数在某一点处可导，则函数在该点处必连续. 而对于多元函数来说，即使在点 P_0 的各偏导数都存在，也只能保证当 P 沿平行于坐标轴的方向趋于 P_0 时，函数值 $f(P)$ 趋于 $f(P_0)$，却不能保证点 P 按任何方式趋于 P_0 时，函数值 $f(P)$ 都趋于 $f(P_0)$，从而，多元函数的各个偏导数都存在时，函数在该点却未必是连续的.

另一方面，当多元函数 $f(P)$ 在点 P_0 连续时，亦不能得到 $f(P)$ 的各偏导数在点 P_0 的存在性，这与一元函数的情况相同. 如图 5-4 所示，函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 连续，但这是函数的尖点，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$ 和 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$ 均不存在.

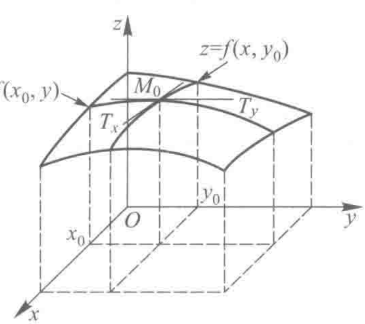

图 5-3

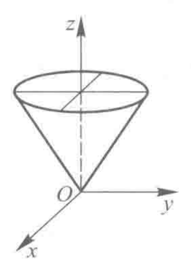

图 5-4

例 3 求函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 的偏导数.

解 $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0$；

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}0=0.$$

二、高阶偏导数

函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的偏导函数 $f_x(x,y)$,$f_y(x,y)$ 仍然是变量 x 和 y 的函数,如果它们具有偏导数,则称之为函数 $z=f(x,y)$ 的**二阶偏导数**,共有下列四种形式:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

其中第二、三两个偏导数称为**混合偏导数**. 还可得到三阶、四阶……直到 n 阶偏导数,统称为**高阶偏导数**.

对高阶偏导数而言,有下述结论.

定理 5.1 若函数 $z=f(x,y)$ 的混合偏导数 $f_{xy}(x,y)$,$f_{yx}(x,y)$ 在区域 D 内连续,则在该区域内两者相等.

对更高阶的混合偏导数而言,在各偏导数连续的条件下也与求导的次序无关.

例 4 设 $z=x^3y^2-3xy^3-xy+1$,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-3y^3-y,\frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y-9xy^2-x$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2,\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=6x^2y-9y^2-1=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^3-18xy;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=6y^2.$$

三、全微分的定义

由偏导数可得偏微分与偏增量之间的关系如下:

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)\approx f_x(x,y)\Delta x;$$

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\approx f_y(x,y)\Delta y.$$

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的某邻域内有定义,$P'(x+\Delta x,y+\Delta y)$ 为