力学丛书·典藏版——4

弹性力学的变分原理及其应用

胡海昌 著

LX

科学出版社

力学丛书·典藏版 4

弹性力学的变分原理及其应用

胡 海 昌 著

科 学 出 版 社

1982

内 容 简 介

本书系统地叙述了弹性力学中的各种变分原理，尤其是广义变分原理，以及这些变分原理在理论方面和近似计算方面的应用. 讨论到的物体形式有梁、板、扁壳和一般的弹性体，论述的内容包括平衡、稳定性和振动各方面的问题.

本书可供科研人员、工程技术人员以及高等院校师生参考.

图书在版编目 (CIP) 数据

弹性力学的变分原理及其应用 / 胡海昌著. —北京：科学出版社，2016.1

(力学丛书)

ISBN 978-7-03-046895-6

I. ①弹… II. ①胡… III. ①弹性力学—变分学 IV. ① 0343

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 004466 号

力学丛书

弹性力学的变分原理

及其应用

胡海昌 著

责任编辑 魏茂乐

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

北京京华虎彩印刷有限公司印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1981 年第一版 开本：850×1168 1/32

2016 年印刷 印张：18 5/8

插页：2

字数：491,000

定 价：158.00元

序

变分原理是弹性力学的重要组成部分，在理论上和实用上都有重要的价值．自从本世纪初里兹提出根据变分原理的直接近似解法(即现在一般所称的里兹法)之后，对弹性力学变分原理的研究和应用出现了一个高潮．最近，随着有限元素法的诞生和广泛应用，出现了研究和应用变分原理的新高潮．这次新高潮在深度上和广度上都达到了新水平，影响到力学和数学的许多分支．

我国的科学技术工作者，一直十分重视弹性力学以及塑性力学中变分原理的研究和应用．中华人民共和国成立后不久，钱令希同志发表了“余能原理”[23]一文，打响了我国研究变分原理的第一炮，带动了一批土生土长的同志开展变分原理的研究．在活跃的学术气氛中，经过一段不长的时间，就取得了一系列成果，在赶超国际先进水平方面出现了可喜的形势．

可惜好景不长．变分原理的研究和其他的科学技术研究一样，遭到了林彪、“四人帮”的严重摧残．在林彪、“四人帮”横行的日子里，变分原理的研究几乎停止，已取得的成果也几乎被遗忘．

打倒“四人帮”，科学技术得解放．全国人民响应党中央的号召，掀起了学科学、用科学、大搞社会主义四个现代化的热潮．在这个热潮中，我应同志们的要求，在中国空间技术研究院卫星总体部讲述了关于弹性力学变分原理和它们的应用．后来应中国航空学会和北京市力学学会的要求，又讲了一遍．本书是在上述两次讲稿的基础上经过修改补充而成的．

变分原理有难讲的一面，也有易讲的一面．难讲是因为它涉及弹性力学的许多基本问题，而当前缺少有关的中文参考书．易讲是因为我国科学技术工作者有成果，不愁没有内容，只怕有遗

漏.在林彪、“四人帮”横行的日子里，一切学术刊物停办，个人联系中断，过去积累的一点资料也已散失. 打倒“四人帮”后，虽然逐步恢复了各种学术交流活动，但一时也难于了解全面的情况. 因此，作者主观上虽希望在本书中能充分反映出我国在这方面的成就，但实际上恐怕相差很远. 这是十分遗憾的事.

在写本书的过程中，得到了领导、老师、同事和出版社等方面的同志们热情的关怀和有力支持，现借此机会向上述的同志们表示衷心的感谢！

胡海昌

1979年7月

目　　录

第一章　求解泛函极值问题的一些基本概念

§1.1　几个简单的例子

在高等数学中讲述过求函数的极值问题，本章扼要地讲述一类更广泛的极值问题，称为泛函的极值问题．有些基本思想是与求函数的极值问题相同的．本节先举几个具体的简单的例子，以说明问题的性质．

例 1　弹性地基梁的一个问题．

设有一个放在弹性地基上的梁，承受分布横向载荷 $q(x)$ 的作用．已知梁的一端（$x=0$）是固定的，另一端（$x=l$）是自由的．问梁取怎样的挠度 $w(x)$ 能使这个系统的总势能 Π 取最小值？

设梁的弯曲刚度为 EJ，于是梁的弯曲应变能 Π_b 是

$$\Pi_b = \frac{1}{2}\int_0^l EJ\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx.$$

再设弹性地基的刚度系数为 k，于是地基中贮存的能量 Π_f 为

$$\Pi_f = \frac{1}{2}\int_0^l kw^2 dx.$$

由于梁的挠度，载荷的势能有了变化，载荷的势能 Π_l 可写成为

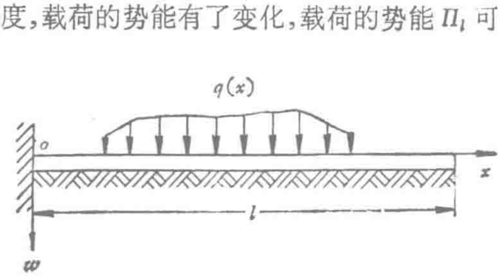

图 1.1

$$\Pi_l = -\int_0^l qw\,dx.$$

这个系统的总势能是上列三者之和,因此有

$$\Pi = \int_0^l \left\{\frac{1}{2}EJ\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 + \frac{1}{2}kw^2 - qw\right\}dx. \tag{1.1}$$

另外在提问题时已规定了 $x=0$ 是固定端,即

$$\text{在 } x=0 \text{ 处：} w=0,\ \frac{dw}{dx}=0. \tag{1.2}$$

这样上面提出的力学问题，经化为数学问题后变为：在 $0 \leqslant x \leqslant l$ 的区间内找一个函数 $w(x)$,使它满足边界条件(1.2),并使由公式(1.1)定义的 Π 取最小值.

这里要寻找的是一个未知函数 $w(x)$. $w(x)$ 必须满足的条件有两类：其一是明显提出的边界条件(1.2),不满足边界条件(1.2)的函数不在考虑之列,其二是这个函数 $w(x)$ 应使(1.1)右端的积分有意义,即能够算出一个 Π 的值. 这第二个条件应该是不讲自明的条件,任何一个计算不出 Π 的函数当然不在考虑之列. 要求是使 Π 取最小值.

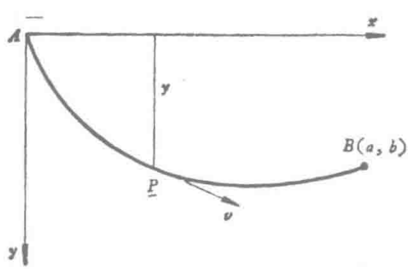

图 1.2

例 2　最速降线问题.

已知空间中两点 A 和 B, A 高于 B, 要求在这两点间连接一条曲线,使得有重物从 A 沿此曲线自由滑下时,从 A 到 B 所需之时间最小(忽略摩擦力).

通过 A, B 并垂直水平面作一平面，在此平面上取一坐标系

(x, y)，以 A 为坐标原点，x 轴水平，y 轴向下．设 B 点的坐标为 $x=a, y=b$．命所求之曲线为 $y=y(x)$．已经给定：

$$\begin{aligned} &在\ x=0\ 处：\ y=0, \\ &在\ x=a\ 处：\ y=b. \end{aligned} \tag{1.3}$$

设 $P(x, y)$ 是曲线上的某一点．重物在 P 点的速度 v 可由能量守恒原理求得：

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g y.$$

这里 g 是重力加速度．由此得到

$$v = \sqrt{2gy}.$$

命 ds 为曲线的弧长的微分，则

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2gy},$$

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}{\sqrt{2gy}}.$$

因此重物从 A 滑到 B 所需之时间 T 为

$$T = \int_0^a \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx. \tag{1.4}$$

上面提出的力学问题最后化为如下的数学问题：在 $0 \leqslant x \leqslant a$ 的区间内找一个函数 $y(x)$，使它满足边界条件(1.3)，并使(1.4)定义的 T 取最小值．

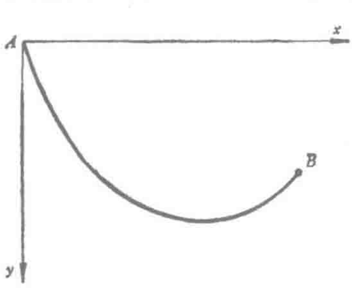

图 1.3

例 3 悬索线问题．

已知空间中 A，B 两点及一条长度 $l > \overline{AB}$ 的绳索．假定绳索的长度是不变的，而它的弯曲刚度可忽略不计．把此绳索的两端挂在 A，B 两点，求在平衡状态下绳索的形状．

和例 2 一样取一坐标系 (x, y). 命绳索所画的曲线方程是 $y = y(x)$. 已知有边界条件:

$$\begin{aligned} &\text{在 } x = 0 \text{ 处: } y = 0, \\ &\text{在 } x = a \text{ 处: } y = b. \end{aligned} \tag{1.5}$$

由于绳索长度已知,所以还有

$$\int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = l. \tag{1.6}$$

绳索在平衡状态下,它的势能 Π 应为最小值.设绳索的单位长度的质量为 m, 那末

$$\Pi = -mg \int_0^a y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

要使 Π 最小,也就是要使

$$M = \int_0^a y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \tag{1.7}$$

最大. 因此这个力学问题的一种数学提法是: 在 $0 \leqslant x \leqslant a$ 的区间内决定一个函数 $y(x)$, 使它满足边界条件 (1.5), 积分条件 (1.6), 并使 (1.7) 决定的 M 取最大值.

这个问题还可提成另一个类似的数学问题. 设 s 为绳索上某点到 A 点的弧长,曲线方程也可以用参数 s 来表示,即

$$x = x(s), \quad y = y(s). \tag{1.8}$$

这样边界条件变为

$$\begin{aligned} &\text{在 } s = 0 \text{ 处: } x = 0, \ y = 0, \\ &\text{在 } s = l \text{ 处: } x = a, \ y = b. \end{aligned} \tag{1.9}$$

而平衡条件可写成为使

$$M = \int_0^l y ds \tag{1.10}$$

取最大值. 因为参数 s 代表弧长 所以有

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1. \tag{1.11}$$

这样,上述力学问题也可以提成另外一个数学问题: 在 $0 \leqslant s \leqslant l$

的区间内决定两个函数 $x(s)$，$y(s)$，使它们满足边界条件 (1.9) 和微分方程 (1.11)，并使 (1.10) 定义的 M 取最大值.

§1.2 泛函、泛函极值问题的提法

上节几个例子中，都涉及到在一定的范围内可变化的函数，以及依赖于这些可变化的函数的量. 这些可变化的函数，称为自变函数. 依赖于自变函数而变的量，称为自变函数的泛函.

上节几个例子中碰到的泛函，都能用积分的形式表达出来. 但是根据泛函的定义，泛函并不一定都能用积分的形式来表达. 例如在区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 内有一个可变函数 $f(x)$. 命 M 为 $f(x)$ 的最大值，那末 M 是 $f(x)$ 的一个泛函，因为选定了 $f(x)$ 后便能够决定 M 的大小. 但是 M 并不能够用积分的形式表达出来.

正像函数关系方面有显函数、隐函数之分，在泛函中也有目前难于用明显的形式表达的泛函. 下面再举这样一个例子. 假设要设计一个两端简支的变剖面梁，已知它的跨度、所用材料的杨氏模量与密度、总重量，梁剖面的形状必须为圆形，但它的半径 $r(x)$ 是一个可由设计者选定的函数. 求 $r(x)$ 使得梁的基本固有频率尽量大. 根据题意，梁的基本固有频率 ω 是函数 $r(x)$ 的一个泛函，因为在给定一个函数 $r(x)$ 后，汇同题中原先给定的其他几个条件，便可决定 ω 了. 但是 ω 与 $r(x)$ 的关系是很复杂的，目前还难于写成明显的形式 $\omega = \omega(r)$.

不过本书后面涉及到的泛函都是能用积分表达的，而且绝大多数，被积函数是自变函数及其导数的二次整式. 由公式 (1.1) 定义的泛函 Π 便是 w 和 w'' 的二次整式. 这一类特殊类型的泛函叫二次泛函. 二次泛函的极值问题用一般高等数学的办法也能解决. 学了变分法后，能对这类问题理解得更为深刻.

要提清楚一个泛函的极值问题，除应当把泛函本身讲清楚（最好写出它的算式）以外，还必须讲明自变函数的性质. 譬如有几个自变函数，每个自变函数定义在什么区间里（平面问题则在什么区

域内)，要满足什么条件(包括边界条件、积分条件、微分方程条件之类，如果有这些条件的话)等等，都必须一一说清楚．除了个别的特殊情况以外，一般情况下增加一个条件将使泛函的极值及相应的自变函数发生变化．例如极小值可能变大，极大值可能变小，而非极值的驻立值可能变为极值．所以讲清楚自变函数性质，也是十分重要的事情．

§1.3 泛函驻立值问题与微分方程问题

本章的内容是介绍如何把泛函的驻立值问题化为微分方程的问题．变分法的早期的工作都是这一类问题．这是因为微分方程发展在先，变分法发展在后，因此在早期，一旦将泛函的驻立值问题化为微分方程问题之后，便认为问题已经解决，至少认为问题已经基本解决．自从里兹提出直接求泛函极值的近似方法(即著名的里兹法)以后，人们才发现，从求近似解的角度来看，从泛函的极值或驻立值出发，常常比从微分方程出发更为方便．而从电子计算机广泛使用以后，这种观点得到愈来愈多的赞同．于是人们的研究目标，从原来把泛函的驻立值问题化为微分方程问题，逐步转变为把微分方程问题化为泛函的驻立值问题(同时也就提出了转化的可能性问题)．经过欧拉、拉格朗日以及随后的许多数学工作者的努力，对于前一类问题已经建立了比较成熟、比较系统的方法．但是对于后一类新问题，虽然也已有许多人作了研究，但总的说来还是不很成熟．因此目前用得多的主要还是根据微分方程的物理和工程背景，采取尝试和核对的办法，即先猜想一个泛函的极值或驻立值问题，然后再核对一下，看它是否与原来的微分方程问题等价．本书后面几章介绍弹性力学的经典变分原理时，就用这种方法．

§1.4 定积分 $\int_a^b F(x, y, y')dx$ 的驻立值问题

本节先来讨论如何把一类简单泛函的极值问题，化为微分方