●主编　李兴怀

金牌之路

竞赛解题指导

高中数学

陕西师范大学出版社

读金牌之路 圆金牌之梦

金牌之路

竞赛解题指导

高中数学

主 编：李兴怀
编 写：李兴怀 薛党鹏
陈昭亮

陕西师范大学出版社

图书代号:JF4N0299

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛解题指导/李兴怀主编．－西安:陕西师范大学出版社,2000.6

ISBN 7－5613－1923－1

Ⅰ.高…　Ⅱ.李…　Ⅲ.数学－竞赛－高中－教学参考资料

Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 09673 号

责任编辑 高书敏　　**责任校对** 刘锋利

出版发行:陕西师范大学出版社

(西安市南郊　陕西师大 120 信箱　邮编 710062

http://www.snuph.com　　E－mail:if－centre@snuph.com)

印　　制:陕西丰华印务有限公司

开本 850×1168　1/32　　印张 9.875　　字数 303 千

版次印次:2004 年 7 月第 2 版　　2004 年 7 月第 1 次印刷

定　　价:12.80 元

开户行:光大银行西安南郊支行　账号:0303070－00330004695

读者购书、书店添货或发现印装问题,请与本社营销中心联系、调换。

电　话:(029)85307864　85233753　85251046(传真)

金牌之路 作者阵容

张大同	特级教师	(华东师大二附中)
彭大斌	特级教师	(湖南长沙一中)
武建谋	特级教师	(湖南长沙一中)
肖鹏飞	特级教师	(湖南师大附中)
林肃浩	特级教师	(浙江杭州二中)
刘诗雄	特级教师	(湖北武钢三中)
李兴怀	特级教师	(华南师大附中)
高冠荣	副教授	(南京晓庄学院)
高建军	特级教师	(湖南长沙一中)
罗增儒	教授	(陕西师范大学)
江文哉	特级教师	(福建师大附中)
李 安	特级教师	(湖南师大附中)
黄国强	高级教师	(湖南师大附中)
何 雄	高级教师	(华东师大二附中)

金牌之路出版人：高经纬
金牌之路整体策划：王佰铭 杨雪玲
金牌之路整体设计：陶安惠 郭永新

《金牌之路》自述

我是《金牌之路》，今年整8岁。金牌教练呵护我，金牌得主信赖我。在这8年里，我从一颗小种子生根发芽长成一棵参天大树，根深叶茂，任凭风吹雨打，依然坚韧挺拔，成为众所周知的常青树。

我的含金量很高，经得起千锤百炼

我凝结着顶级教练的智慧与谋略

★著名金牌教练、特级教师张大同自1991年以来培养的学生获国际物理竞赛金牌8枚、银牌1枚，这在全国是独一无二的；

★著名金牌教练、特级教师刘诗雄培养的学生获国际数学竞赛金牌7枚；

★著名金牌教练、特级教师李兴怀培养的学生获国际数学竞赛金牌4枚、银牌1枚；

★著名金牌教练、特级教师肖鹏飞培养的学生获国际化学竞赛金牌2枚、银牌1枚；

★著名金牌教练、特级教师高建军培养的学生获国际生物竞赛金牌2枚、银牌3枚；

★著名金牌教练、特级教师江文哉培养的学生获国际计算机竞赛金牌5枚、银牌1枚、铜牌1枚。

……

我的每一个细胞都是精雕细刻、精心打造的

大章小节,布设着金牌教练的良方妙计

字里行间,渗透着金牌教练的聪明智慧

我的每一个枝叶,都是千姿百态、各具特色的

从不同系列到不同科目,规模大,品种全

——适应不同级别的参赛需要

从竞赛入门到冲刺金牌,起点低,落点高

——满足不同层次的读者需求

年年发新芽,岁岁放异彩

在金牌教练的精心栽培下,借着猴年的和煦春风,我又生发出新的枝芽——新版《竞赛解题指导》问世,而且是全新面目,直对市场。其中蕴藏着勃勃生机:

大板块,小专题,各个击破

传秘诀,详点拨,触类旁通

先指导,后演练,立竿见影

愿这枝新芽璀璨夺目,给读者照亮通向金牌之路。让市场认准我吧!让读者接受我吧!

金牌在等着您!

《金牌之路》策划组

目录 MU LU

第一章 集合与函数 …… 1
专题一 集合 …… 1
专题二 简易逻辑 …… 7
专题三 函数的概念、图像和性质 …… 13
专题四 二次函数、指数函数与对数函数 …… 21
训练题一 …… 28
训练题二 …… 28
第二章 三角函数 …… 30
专题一 三角函数的概念、图像与性质 …… 30
专题二 三角变换 …… 34
专题三 平面几何问题的三角证法 …… 40
训练题一 …… 45
训练题二 …… 46
第三章 向量 …… 47
专题一 向量及其运算 …… 47
专题二 向量的应用 …… 50
训练题一 …… 53
训练题二 …… 54
第四章 数列 …… 56
专题一 等差、等比数列 …… 56
专题二 数列的极限与数学归纳法 …… 62
训练题一 …… 68
训练题二 …… 69
第五章 不等式 …… 70
专题一 不等式的证明 …… 70
专题二 不等式的解法 …… 75
专题三 几个重要不等式 …… 81
训练题一 …… 85
训练题二 …… 85

第六章　解析几何 …… 87
专题一　直线与圆 …… 87
专题二　圆锥曲线 …… 92
专题三　平面几何问题的解析证法 …… 98
训练题一 …… 103
训练题二 …… 103
第七章　立体几何 …… 105
专题一　直线与平面 …… 105
专题二　空间距离和角 …… 108
专题三　空间几何体 …… 114
训练题一 …… 119
训练题二 …… 120
第八章　排列组合　二项式定理　概率 …… 121
专题一　排列　组合 …… 121
专题二　二项式定理 …… 124
专题三　概率 …… 128
训练题一 …… 131
训练题二 …… 132
第九章　复数 …… 133
专题一　复数的概念及其运算 …… 133
专题二　复数与方程 …… 138
专题三　平面几何问题的复数解法 …… 143
训练题一 …… 146
训练题二 …… 147
第十章　平面几何 …… 148
专题一　与圆有关的几何问题 …… 148
专题二　面积与面积方法 …… 153
专题三　几个重要定理 …… 157
专题四　几何不等式 …… 161
训练题一 …… 166
训练题二 …… 167

目录 MU LU

第十一章　数论问题 …… 168
专题一　整数的整除性 …… 168
专题二　整数的奇偶性 …… 172
专题三　同余 …… 177
专题四　高斯函数 …… 184
专题五　不定方程 …… 189
训练题一 …… 196
训练题二 …… 197
第十二章　组合数学 …… 198
专题一　抽屉原理 …… 198
专题二　容斥原理 …… 204
专题三　组合计数 …… 211
专题四　组合恒等式 …… 218
专题五　组合不等式和组合最值 …… 226
训练题一 …… 230
训练题二 …… 231
第十三章　几个典型问题 …… 232
专题一　染色问题 …… 232
专题二　存在性问题 …… 237
专题三　离散变量的最值问题 …… 244
专题四　凸包及其应用 …… 250
训练题一 …… 255
训练题二 …… 256

竞赛模拟题一 …… 257
竞赛加试模拟题一 …… 259
竞赛模拟题二 …… 260
竞赛加试模拟题二 …… 262

答案与点拨 …… 263

第一章 集合与函数

专题一 集合

例题1

已知集合 $P=\{x|x^2+2tx-4t-3>0\}$，$Q=\{x|x^2+2tx-2t=0\}$，定义 $A=\{t|P=\mathbf{R}\}$，集合 $B=\{t|Q\neq\varnothing\}$，其中 x,t 均为实数.

(1)求 $A\cap B$；(2)设 m 为实数，$g(m)=m^2-3$，求 $M=\{m|g(m)\in A\cap B\}$.

分析 集合 A 实质上为使得不等式 $x^2+2tx-4t-3>0$ 恒成立的实数 t 的取值范围；集合 B 实质上为使得方程 $x^2+2tx-2t=0$ 解集非空的实数 t 的取值范围.

解题灵感

求解集合问题的关键是认清集合的元素，认清集合之后，往往还需要借助于语言转换(将正规的集合语言转化为通俗的非集合语言)来弄懂题意，进而去解决问题.

解 (1)集合 A 实际上是：使得 $x^2+2tx-4t-3>0$ 恒成立的所有实数 t 的集合，故令 $\Delta_1=(2t)^2-4(-4t-3)<0$，解得 $-3<t<-1$.

集合 B 实际上是：使得方程 $x^2+2tx-2t=0$ 有解的所有实数 t 的集合.故令 $\Delta_2=(2t)^2-4\cdot(-2t)\geqslant0$，解得 $t\geqslant0$ 或 $t\leqslant-2$.

所以，$A=(-3,-1)$，$B=(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$，$A\cap B=(-3,2]$.

(2)设 $g(m)=u$，则问题(2)可转化为：已知函数 $u=g(m)$ 的值域为 $u\in(-3,-2]$，求其定义域.令 $-3<m^2-3\leqslant2$，可解得 $-1\leqslant m\leqslant0$ 或 $0<m\leqslant1$.

所以，$M=\{m|-1\leqslant m<0$ 或 $0<m\leqslant1\}$.

说明 集合作为近、现代数学的重要基础，集合语言、集合思想也已经渗透到数学的方方面面.集合和简易逻辑，是学习、掌握和使用数学语言的基础.本题以集合和逻辑为背景，主要考查对数学符号语言的阅读、理解以及迁移

转化的能力.

例题 2

已知 $U=\mathbf{R}, A=\{x, y, \lg(xy)\}, B=\{0, |x|, |y|\}$. 若集合 $A\cap B=B$ 且 $A\cap(\complement_U B)=\varnothing$，求 $\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^{2003}+\frac{1}{y^{2003}}\right)$ 的值.

分析 求值归结于求出 x、y，而这有两个未知数，需从已知条件中导出两个独立的等量关系. 由 $A\cap B=B$ 有 $A\supseteq B$，由 $A\cap(\complement_U B)=\varnothing$ 有 $A\subseteq B$. 于是 $A=B$，根据有限等集的性质有

$$\begin{cases} x+y+\lg(xy)=|x|+y, \\ xy\cdot\lg(xy)=|x|\cdot y\cdot 0. \end{cases}$$

这个方程组解起来比较复杂，如果注意到集合 B 中含有一个已知元素 0，从它出发，根据等集的定义（互为子集）逐一讨论便可确定 x、y 的值.

知识平台

对于两个相等的有限数集，有时需用到它们的简单性质：①相等两集合的元素个数相等；②相等两集合的元素之和相等；③相等两集合的元素之积相等.

解 根据元素的互异性，由 B 知 $x\neq 0, y\neq 0$.

$\because 0\in B$，且 $A=B$，$\quad\therefore 0\in A$.

故只有 $\lg(xy)=0$，从而 $xy=1$.

又由 $1\in A$ 及 $A=B$，得 $1\in B$. 于是有 $\begin{cases}|x|=1,\\ xy=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}xy=1,\\ y=1.\end{cases}$

其中 $x=y=1$ 与元素的互异性矛盾，所以 $x=y=-1$ 代入得

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^{2003}+\frac{1}{y^{2003}}\right)=-2+2-2+\cdots+2-2=-2.$$

说明 本题主要应用了集合相等的概念和集合中元素的性质，计算量不大，概念性较强. 关于子集有下述重要刻画：$A\subseteq B\Leftrightarrow\complement_U B\subseteq\complement_U A\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow A\cap(\complement_U B)=\varnothing$.

例题 3

设 a, b 是两个实数，$A=\{(x,y)\,|\,x=n, y=na+b, n\text{ 是整数}\}$，$B=\{(x,y)\,|\,x=m, y=3m^2+15, m\text{ 是整数}\}$，$C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 144\}$ 是 xOy 平面内的集合，讨论是否存在 a 和 b 使得(1) $A\cap B\neq\varnothing$，(2) $(a,b)\in C$ 同时成立.

分析 这是讨论存在性问题,可以先假设存在实数 a 和 b 使得结论成立,找出结论成立的必要条件. 如果存在,再证明它的充分性.

难点突破

题目中的三个集合均为点集,且有着明显的“形”的意义,因此,数形式结合即为解决此问题的一条捷径.

解法一 如果存在实数 a 和 b 使得(1)成立,则存在整数 m 和 n 使得 $(n,na+b)=(m,3m^2+15)$,即 $n=m$, $na+b=3m^2+15$, $\therefore na+b=3n^2+15$.

这个等式表明点 $P(a,b)$ 在直线 $l:nx+y=3n^2+15$ 上.

由于原点 O 到直线 l 的距离

$$d=\frac{|3n^2+15|}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{3(n^2+5)}{\sqrt{n^2+1}}=3\left(\frac{n^2+1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{4}{\sqrt{n^2+1}}\right),$$

$\therefore d\geqslant 12$,当且仅当 $n^2=3$ 时取等号,而 $n\in\mathbf{Z}$, $n^2\neq 3$,故只有 $d>12$.

$\therefore$ 点 P 到原点的距离 $|PO|=\sqrt{a^2+b^2}>d>12$,即 $a^2+b^2>144$.

而(2)成立要求 $a^2+b^2\leqslant 144$.

由此可知,同时满足(1)、(2)的 a,b 不存在.

解法二 如果存在实数 a,b 能同时满足(1)、(2),同解法一,由(1)成立知,存在整数 n 使得 $na+b=3n^2+15$,即 $b=3n^2-na+15(*)$.

由(2)成立得 $a^2+b^2\leqslant 144$.

将(*)式代入上式,并整理得关于 a 的二次不等式

$(1+n^2)a^2-2n(3n^2+15)a+(3n^2+15)^2-144\leqslant 0$.

它的判别式 $\Delta=4n^2(3n^2+15)^2-4(1+n^2)[(3n^2+15)^2-144]$

$=-36(n^2-3)$.

$\because n\in\mathbf{Z}$, $\therefore n^2-3\neq 0$,于是 $\Delta<0$.

又因为 $1+n^2>0$,故这个关于 a 的不等式不可能有实数解,即不存在实数 a,b,使得(1)、(2)同时成立.

解法三 如果存在实数 a,b 能同时满足(1)、(2),同解法一,由(1)成立知,存在整数 n 使得

$3n^2-an-(b-15)=0(*)$,

于是它的判别式应非负,即 $\Delta=a^2+12b-180\geqslant 0(**)$

由此得 $12b-180\geqslant -a^2$.

由(2)成立知 $a^2+b^2\leqslant 144(***)$

即 $-a^2\geqslant b^2-144$.

因此有 $12b-180\geqslant b^2-144$，即 $(b-6)^2\leqslant 0$，只有 $b=6$.

将 $b=6$ 代入判别式($**$)得出 $a^2\geqslant 108$，但将 $b=6$ 代入($***$)式得出 $a^2\leqslant 108$.

于是只有 $a^2=108$，此时从($*$)式解出 $n=\frac{a}{b}\pm\sqrt{3}\notin \mathbf{Z}$.

所以，不存在实数 a,b，使得(1)、(2)同时成立.

说明 以上三种解法是出于对于条件(1)和(2)的不同处理方法，特别是对(1)式的不同认识. 解题时，要注意字母的个数以及由此所导致可能的结果；还要注意常量与变量的辩证关系.

例题 4

一个集合含有10个互不相同的两位数. 试证这个集合必有2个无公共元素的子集合，此两子集的各数之和相等.

分析 两位数共有10，11，…，99，计 $99-9=90$ 个，最大的10个两位数依次是90，91，…，99，其和为945，因此，由10个两位数组成的任意一个集合中，其任一个子集中各元素之和都不会超过945，而它的非空子集却有 $2^{10}-1=1023$ 个，这是解决问题的突破口.

证明 已知集合含有10个不同的两位数，因它含有10个元素，故必有 $2^{10}=1024$ 个子集，其中非空子集有1023个，每一个子集内各数之和都不超过 $90+91+\cdots+98+99=945<1023$，根据抽屉原理，一定存在2个不同的子集，其元素之和相等. 设这两个子集为 A、B. 如此2个子集无公共元素，即 $A\cap B=\varnothing$，则 A、B 已符合题目要求；如果这2个子集有公共元素，即 $A\cap B\neq\varnothing$，则划去它们的公共元素即共有的数字，可得两个无公共元素的非空子集，其所含参数之和相等。

说明 此题构造了一个抽屉原理模型，分两步完成，计算子集中数字之和最多有945个“抽屉”，计算非空子集得1023个“苹果”，由此得出必有两个子集数字之和相等，第二步考察它们有无公共元素，如无公共元素则已符合要求；如有公共元素，则去掉相同的数字，得出无公共元素并且非空的两个子集，满足条件. 可见，有限元素子集个数公式起了关键作用.

例题5

设 S 是集合 $\{1,2,3,\cdots,50\}$ 的非空子集，S 中任何两个数之和不能被 7 整除，试求 $|S|$ 的最大值.

分析 两数之和若能被 7 整除，那么它们被 7 除所得余数之和能被 7 整除. 据此可以考虑将集合 S 进行划分.

解 将集合 $\{1,2,3,\cdots,50\}$ 的数按照被 7 除所得的余数（即以 7 为模）划分为如下 7 个子集：

$A_1=\{1,8,15,22,29,36,43,50\}$,

$A_2=\{2,9,16,23,30,37,44\}$,

$A_3=\{3,10,17,24,31,38,45\}$,

$A_4=\{4,11,18,25,32,39,46\}$,

$A_5=\{5,12,19,26,33,40,47\}$,

$A_6=\{6,13,20,27,34,41,48\}$,

$A_7=\{7,14,21,28,35,42,49\}$.

取 $S=A_1\cup A_2\cup A_3\cup\{7\}$，下面证明 S 为满足要求的一个集合，且 $|S|$ 最大.

首先，对 $a,b\in S$，有三种可能：

(1) $a,b\in A_i(i=1,2,3)$，则 $a+b\equiv 2i(\mathrm{mod}7)$，从而 $7\nmid a+b$；

(2) $a\in A_i,b\in A_j(1\leqslant i\neq j\leqslant 3)$，则 $a+b\equiv i+j(\mathrm{mod}7)$，从而 $7\nmid a+b$；

(3) $a\in A_i,b=7(i=1,2,3)$，则 $a+b\equiv i(\mathrm{mod}7)$，从而 $7\nmid a+b$.

综上知，S 中任何两个元素之和不能被 7 整除，即 S 为满足要求的一个集合.

其次证明，若给 S 添加一个元素 c，则必存在 S 中的一个元素与 c 之和能被 7 整除.

添加的 c 有两种可能：

(1) $c\in A_i\quad(i=4,5,6)$，则 c 与 A_{7-i} 中的元素之和能被 7 整除；

(2) $c\in A_7$，则 c 与 7 之和能被 7 整除.

综上知，S 中的元素不能再添加.

故中 $|S|=|A_1|+|A_2|+|A_3|+1=8+7+7+1=23$.

说明 本题的解答过程采用了先构造后证明的方法，在构造时又应用了集合划分的意义，把一个集合 A 分成若干个不同的非空子集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$. 如

果①$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=A$,②$A_i\cap A_j=\varnothing(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$,则称$A_1,A_2,\cdots,A_n$为$A$的一个$n$划分.特别地,如果$A_1,A_2,\cdots,A_n$仅满足条件①,则称$A_1,A_2,\cdots,A_n$为$A$的一个覆盖,集合划分是一条必须遵循的解题准则,同时也是一种行之有效的解题手段.

例题6

设集合$E=\{1,2,3,\cdots,200\}$,$F=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{100}\}\subset E$,且$F$具有下列两条性质:

(1)对任何$1\leqslant i<j\leqslant 100$,恒有$a_i+a_j\neq 201$;

(2)$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=10080$.

试证明:F中奇数的个数是4的倍数,且F中所有数的平方和为定值.

分析 注意到$200+1=199+2=198+3=\cdots=101+100$,而$a_i+a_j\neq 201$,所以可将集合$E$划分为100个子集:$\{1,200\}$,$\{2,199\}$,$\{3,198\}$,$\cdots$,$\{100,101\}$,则$F$的元素只能在这100个子集中各取1个.为了讨论$F$中奇数的个数,可以考虑将这100个子集进行分类.

问题探究

此例实质上是由下面的一个基本问题改编而来的:设F是给定集合$E=\{1,2,3,\cdots,2n,2n+1\}$的子集,若对于$F$中的任意三个数$a,b,c$,都有$a+b\neq c$,求$|M|$的最大值.

证明 将集合E所划分的100个子集$\{1,200\}$,$\{2,199\}$,$\{3,198\}$,$\cdots$,$\{100,101\}$分成以下两类:

一类的特征是:每个子集中,偶数是$4k$型,奇数是$4k+1$型$(k\in\mathbf{N}^*)$,有$\{1,200\}$,$\{4,197\}$,$\{5,196\}$,$\{8,193\}$,$\cdots$.

另一类的特征是:每个子集中,偶数是$4k+2$型,奇数是$4k+3$型$(k\in\mathbf{N}^*)$,有$\{2,199\}$,$\{3,198\}$,$\{6,195\}$,$\{7,194\}$,$\cdots$.

设F的100个元素中有$4k+1$型的奇数x个,$4k+3$型的奇数y个,则F中有$4k$型的偶数$50-x$个,$4k+2$型的偶数$50-y$个,这里$k\in\mathbf{N}^*$.于是F中奇数的个数共有$x+y$个.

由$x+y\equiv(4k+1)x+4k(50-x)+(4k+3)y+(4k+2)(50-y)$

$$\equiv\sum_{i=1}^{100}a_i=10080\equiv 0(\bmod 4),故 4|(x+y).$$

下面说明F中所有数的平方和为定值.设有两个符合题设条件的不同

子集 $F_1=\{a_1,a_2\cdots,a_{100}\}$ 和 $F_2=\{b_1,b_2,\cdots,b_{100}\}$. 若 $F_1\cap F_2$ 中有 $100-k$ 个元素,其和为 m,则 $F_1\cap F_2$ 关于 F_1 的补集有 k 个元素,从小到大排列成 $a_{i1}<a_{i2}<\cdots<a_{ik}$,$F_1\cap F_2$ 关于 F_2 的补集也有 k 个元素,从大到小排列成 $b_{i1}>b_{i2}>\cdots>b_{ik}$,于是必有 $a_{i1}+b_{i1}=a_{i2}+b_{i2}=\cdots=a_{ik}+b_{ik}=201$.

所以 $\sum\limits_{i=1}^{100}a_i^{\ 2}-\sum\limits_{i=1}^{100}b_i^{\ 2}=201\times(\sum\limits_{j=1}^{k}a_{ij}-\sum\limits_{j=1}^{k}b_{ij})=201\times[(\sum\limits_{j=1}^{k}a_{ij}+m)-(\sum\limits_{j=1}^{k}b_{ij}+m)]$

$=201\times(10080-10080)=0$,

即 $\sum\limits_{i=1}^{100}a_i^{\ 2}=\sum\limits_{i=1}^{100}b_i^{\ 2}$. 所以,$F$ 中的所有数的平方和为定值.

说明 这是一个集合与数论的综合题,上述解法的关键是对集合 E 的划分与分类化处理. 请读者予以细细体会.

专题二 简易逻辑

例题 1

命题甲:$x\neq2$ 或 $y\neq3$;命题乙:$x+y\neq5$,则(　　)

A. 甲是乙的充分非必要条件

B. 甲是乙的必要非充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件,也不是乙的必要条件

分析 为了进行判断,首先需要构造两个命题:甲$\Rightarrow$乙;乙$\Rightarrow$甲. 但是,这两个命题都是否定性的命题,正面入手较为困难,于是可以转化为判断其逆否命题是否正确.

解 "甲$\Rightarrow$乙",即"$x\neq2$ 或 $y\neq3$"$\Rightarrow$"$x+y\neq5$",其逆否命题为:"$x+y=5$"$\Rightarrow$"$x=2$ 且 $y=3$"显然不正确. 同理,可判断命题"乙$\Rightarrow$甲"为真命题,故选择 B.

解题灵感

本题看上去是一个基本的不等量关系,但实质上逻辑性很强,容易选错,解本题的关键:一是从反面入手,利用原命题与逆否命题的等价性,二是要对逻辑联结词"或""且"深刻理解与领悟.

例题 2

现有 2000 个接点,每两个之间用电线相连.现让瓦西亚和皮特轮流来剪断这些电线.瓦西亚先开始,他每次仅能剪断一根,而皮特可以剪断两根或三根,规定谁剪最后一根谁就输了.问谁有最后必胜的把握?

分析 由于瓦西亚每次仅能剪断一根,而皮特可以剪断两根或三根,故先考虑四根电线的特殊情形,知皮特能够获胜.再考虑电线根数和 4 的关系,推知一般情况.

解 先考察 4 根电线,瓦西亚能剪断一根,皮特剪 2 根,最后一根由瓦西亚剪,因此皮特能取胜.现有 2000 个接点,每两个之间用电线相连,则有 $C_{2000}^{2}=1999000$ 根电线.由于 1999000 是 4 的倍数,瓦西亚剪一根,皮特剪 3 根,直至剩最后 4 根电线且轮到瓦西亚剪,这与 4 根电线的情形相同,因此,皮特有最后必胜的把握.

解题灵感

这是一个最佳策略问题,讨论在双人进行的游戏中,如何在遵循规则的前提下,选定一个最佳策略以保证获胜.题中皮特是"后发制人",他采取的策略是:每次剪的数目与瓦西亚剪的数目和为 4,使得瓦西亚面对最后 4 根电线,从而使自己必胜.解题中用了从特殊到一般的思想方法.

例题 3

钱小姐穿红衣服,翁小姐养狗,陈小姐喝茶.穿绿衣服的小姐站在穿白衣服的小姐左边,穿绿衣服的小姐喝咖啡,吃西瓜的小姐养鸟,穿黄衣服的小姐吃梨,站在中间的小姐喝牛奶,赵小姐站在最左边,吃橘子的小姐站在养猫小姐的旁边,养鱼的小姐的旁边的小姐吃梨,吃苹果的小姐喝香槟,江小姐吃香蕉,赵小姐站在穿蓝衣服的小姐旁边,喝白开水的小姐站在吃橘子的小姐旁边,有一位小姐养蛇.问哪位小姐养蛇?

分析 这一问题的条件错综复杂,宜用列表法理出头绪.

解 逻辑推理过程如下:(1)站在中间的小姐喝牛奶,赵小姐站在最左边,赵小姐站在穿蓝衣服的小姐旁边;(2)穿绿衣服的小姐站在穿白衣服的小姐左边,穿绿衣服的小姐喝咖啡.得表 1.