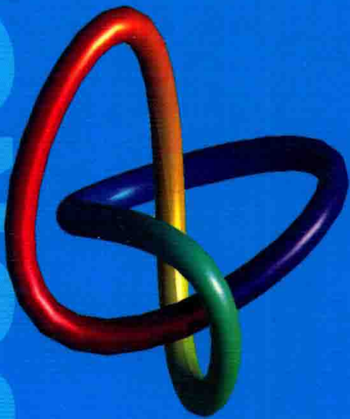
数学奥林匹克小丛书

初中卷 5

Shuxue Aolinpike XIAOCONG SHU



数学竞赛中的应用题

叶声扬 胡军 李建华 编著

华东师范大学出版社

Shuxue A

Xiao

Congshu

Shuxue A

olinpike

数学奥林匹克小丛书

初中卷 5

数学竞赛中的应用题

Olinpike Xiao Congshu 叶声扬 胡军 李建华 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克小丛书．初中卷．数学竞赛中的应用题/叶声扬，胡军，李建华编著．—上海：华东师范大学出版社，2005.3
ISBN 7-5617-4158-8

Ⅰ.数…　Ⅱ.①叶…②胡…③李…　Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第019482号

数学奥林匹克小丛书·初中卷

数学竞赛中的应用题

编　　著　叶声扬　胡　军　李建华
策划组稿　倪　明
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　王爱峰
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部　电话　021-62865537
　　　　　门市(邮购)　电话　021-62869887
　　　　　门市地址　华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区　021-62232873
　　　　　华东　中南地区　021-62458734
　　　　　华北　东北地区　021-62571961
　　　　　西南　西北地区　021-62232893
业务传真　021-62860410　62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编　200062

印 刷 者　商务印书馆上海印刷股份有限公司
开　　本　787×960　16开
印　　张　10
字　　数　177千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年4月第一次
印　　数　11 000
书　　号　ISBN 7-5617-4158-8/G·2385
定　　价　12.00元

出 版 人　朱杰人

（如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社市场部调换或电话021-62865537联系）

本书导读

用数学知识解决生活、生产中的有关问题，在某种意义上说是数学学习与研究的出发点与归宿．本书从近年来全国及各省市数学竞赛卷中精选优秀的应用性试题，依据解应用题的一般规律、思想方法、思维策略及各种常见类型精心设计、编写而成．所选例题具有典型性、示范性、新颖性和鲜明的时代性．更主要的是：作者对例题的分析透彻、深入浅出，重视体现某种模型策略或渗透某种数学方法或提供某种结论；通过抓住关键、突破难点，揭示思维过程，以一题代一类，真正让读者做到举一反三、融会贯通，达到优化知识应用结构、活跃思维、事半功倍的效果，真正有利于读者从“学会”到“会学”的转化．

叶声扬 1964年毕业于同济大学数理力学系，中学数学高级教师，上海市数学特级教师，中国数学奥林匹克高级教练．从事中学数学教研员工作四十余年，参加上海市数学竞赛辅导二十余年．现任教研员，上海市中学生业余数学学校教练员．主要著作有《高中代数》、《中考数学复习》、《数学竞赛辅导教程》等20余种．

数学奥林匹克小丛书

冯志刚	第44届IMO中国队副领队 上海中学特级教师
葛　军	中国数学奥林匹克高级教练、江苏省数学会普委会副主任 南京师范大学副教授
冷岗松	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 上海大学教授、博士生导师
李胜宏	第44届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员 浙江大学教授、博士生导师
李伟固	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 北京大学教授、博士生导师
刘诗雄	中国数学奥林匹克委员会委员 武钢三中校长、特级教师
倪　明	数学奥林匹克小丛书总策划 华东师范大学出版社副总编辑
单　墫	第30、31届IMO中国队领队 南京师范大学教授、博士生导师
吴建平	中国数学会普委会副主任、中国数学奥委会副主席 第40届IMO中国队副领队、《中学生数学》主编
熊　斌	第46届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员 华东师范大学副教授
余红兵	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 苏州大学教授、博士生导师
朱华伟	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 广州大学软件所常务副所长、研究员

数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率.这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者,既有踏实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的"催化剂",成为培养优秀人才的有力措施.

不过,应当注意在数学竞赛活动中,注意普及与提高相结合,而且要以普

及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久.

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意. 这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因为有某些缺点，就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版. 这套书，规模大、专题细. 据我所知，这样的丛书还不多见. 这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队. 他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动. 华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血. 我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

目　录

1 解答应用题的一般思路

数学是在实际应用的需求中产生的.应用题通常是指具有实际背景的或是有实际意义的数学问题.在各类初中数学竞赛中,应用题已成为常考的一种重要题型,它是考查学生阅读理解能力、信息迁移能力和数学思想方法的实际应用能力的重要形式,也是数学教育向大众化和应用化发展的一种必然趋势.而如何将一个用文字语言叙述的应用题根据其实际意义概括抽象为一个纯粹的数学问题,同时抓住题目中所蕴含的数学信息,恰当准确地转化为一个数学模型(即建模),则成为学生解应用题的一个“瓶颈”.

1.1 数学模型与数学建模

应用题的一个明显特征是:文字叙述多、生活科技术语多、相关制约因素多.正是应用题本身的复杂性和数学建模的抽象性,使学生一旦遇到背景生疏、条件隐蔽的应用题,便束手无策、望题兴叹.探究其原因,主要是对数学模型建立的实践不够,未能从根本上形成解应用题的能力.解应用题的关键是建立相关的数学模型.而什么是相关的数学模型呢?

简单地说,数学模型就是用数学语言来模拟空间形式和数量关系的模型.具体地说,数学模型就是对于一个特定的对象为了一个特定目标,根据特有的内在规律,做出一些必要的简化假设,运用适当的数学工具,得到的一个数学结构.一切数学概念、公式、理论体系、算法系统、表格、图形等都可以称为数学模型.著名的“哥尼斯堡七桥问题”是众多游客始终未能解决的难题,大数学家欧拉不是到桥上去试走,而是巧妙地运用数学知识把小岛、河岸抽象成“点”,把桥抽象为“线”,成功地构建出平面几何模型,成为数学史上用数学解决实际问题的经典,为了易于理解“数学模型”的概念,请看下面几个例题.

例 1　有一种足球是由 32 块黑白相间的牛皮缝制而成，黑皮为正五边形，白皮为正六边形，且边长都相等如图 1-1，则白皮的块数是(　　).
(2004 年太原市初中数学竞赛试题)

(A) 22　　　　(B) 20

(C) 18　　　　(D) 16

图 1-1

解　设白皮有 x 块，则黑皮有 $32-x$ 块.

因为黑皮为正五边形，所以，黑皮共有边数为 $5(32-x)$ 条.

又因为每块白皮有 3 条边和黑皮连在一起，故黑皮共有边数还可以表示为 $3x$ 条，由此得方程

$$5(32-x)=3x.$$

解得，$x=20$.

所以，选(B).

例 2　10 个人围成一圈，每人心中想一个数，并把这个数告诉左右相邻的两个人，然后每个人把左右两个相邻人告诉自己的数的平均数亮出来，结果如图 1-2 所示. 问：亮 5 的人心中想的数是多少？(第八届“华罗庚杯”少年数学邀请赛初一复赛试题)

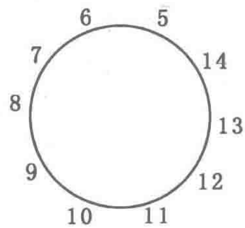


图 1-2

解　设亮 5 的人心中想的数是 x，则亮 7 的人心中想的数是 $(6\times2-x)$，亮 13 的人心中想的数是 $(14\times2-x)$. 亮 9 的人心中想的数是 $8\times2-(12-x)=4+x$. 亮 11 的人心中想的数是 $12\times2-(28-x)=x-4$.

依题意，得，$10=\dfrac{(4+x)+(x-4)}{2}$.

解得，$x=10$.

答：亮 5 的人心中想的数是 10.

这里，例 1 是生活应用问题，例 2 是数学游戏活动. 两题的背景素材完全不同，属于不同领域的实际问题，但抛开实际意义抽象出的数学问题都是一元一次方程，两题都可归结为用一元一次方程的知识求解.

这种舍去实际问题的实际意义，从中抽象出数量之间的关系，转化为所学过的数学知识的过程，一般称为“建立数学模型”，简称“数学建模”. 根据抽象出来的不同数学形式或结构，可建立相应的数学模型. 一般来说转化成什么数学问题，便可称为建立了这种类型的数学模型. 例 1、例 2 就属于同一类数学模型——一元一次方程模型.

对实际问题建立适当的数学模型后就可以用相应的数学知识去解答，建立的数学模型不同，解答的方法也随之而异，因此，恰当地建立数学模型对应用题的求解是十分重要的.

例 3 在某沙漠地带，汽车每天能行驶 200 千米，每辆汽车载运可行驶 24 天的汽油，现有甲、乙两辆汽车同时从 A 地出发，并在完成任务后沿原路返回. 为了让甲车尽可能开出更远距离，乙在行驶一段路程后，仅留足自己返回 A 地的汽油，将其他的汽油给甲车，问甲车能开的最远距离为多少千米？(1990 年南昌市初中数学竞赛试题)

模型 1 建立方程模型

分析 1 事实上，限制甲行驶距离的条件是汽车的最大载油量，可通过分析乙车返回时，甲车的油量入手(包括乙车给甲车的油量)，来考虑甲车行驶的最远距离.

甲车行驶到最远距离时，必然是这样一种情况：乙车给甲车倒油后，甲车油箱是满箱油，并且乙车开回去也正好把油耗尽. 否则，会出现如下两种与题设不合的情况：①若分手时，甲车是一满箱油，而乙车开回去油箱内还剩有汽油，那么这剩下的汽油还能使甲车开得更远，这与题设不符；②若分手时，乙车刚好能返回 A 地，但甲车不是满箱油(乙车给甲车倒油后)，那么，这样就说明，若乙少行一段路程，就能多给甲车一部分油，于是甲车就可以开得更远，这与题设也不符.

于是，要使甲车开得更远，必须同时满足两个条件：①甲车与乙车分手时，甲车油箱是满箱油；②乙车刚好能回到 A 地.

解法 1 设要使甲车开得最远，分手时，乙行驶了 x 天，由上述分析，得

$$(24-2x)+(24-x)=24,$$

解得，$x=8$.

所以，甲能开的最远距离是：

$$(x+24)\times 200\times \frac{1}{2}=(8+24)\times 200\times \frac{1}{2}=3\,200(\text{千米}).$$

答：甲能开的最远距离为 3 200 千米.

模型 2 建立不等式模型

分析 2 由于每辆汽车最多只能载运行驶 24 天的汽油，因此当乙将返回时，乙给甲的汽油加上甲自身的汽油量不能超过 24 天的汽油. 同时，乙车又必须满足返回 A 地的汽油.

解法 2 设乙行驶 x 天后返回，在乙车留足自己返回的汽油后，将其余的汽油供给甲，从甲车的最大载油容量考虑，可得

$$24\times 2-(2+1)x\leqslant 24. \quad ①$$

为了保证甲车尽可能行进最远，甲、乙两车不仅应尽可能行驶得远（即 x 尽可能大），而且乙车又必须留足返回 A 地的汽油，则可得

$$24-x\geqslant 2x, \quad ②$$

解①②，得 $x\geqslant 8$ 且 $x\leqslant 8$.

所以 $x=8$.

所以，甲能开的最远距离是 $(x+24)\times 200\times\frac{1}{2}=3\,200$（千米）.

答：甲能开的最远距离为 3 200 千米.

模型 3 建立一次函数模型

解法 3 设乙车行驶 x 天后返回，甲车能开的最远距离为 y 千米. 则甲、乙分手后，甲带了可行驶 $(24-x)+(24-2x)=(48-3x)$ 天的汽油. 依题意，得 $48-3x\leqslant 24$.

所以 $x\geqslant 8$.

所以甲的行程 $y=(x+48-3x)\cdot 200\times\frac{1}{2}=4\,800-200x$.

因为 $y>0$，$x\geqslant 8$.

所以 $x=8$ 时，y 有最大值为 3 200 千米.

答：甲车能开的最远距离是 3 200 千米.

由例 3 可知，解应用题时，可建立的数学模型并非惟一，本例中的三种模型效果相同. 但函数模型不如不等式模型简便，而不等式模型又不如方程模型简明，一般地，应选择容易理解、过程简便或者自己比较熟悉的模型为宜.

从以上三例看出，数学模型实质是针对应用题的特征或数量依存关系，采用形式化的数学语言，抽象或近似地表述出来的一种数学结构. 它作为一种数学结构，体现出了数学概念、符号、运算法则、公式及方法，而作为应用题的模型，又反映出了应用题的特征、数量关系及规律. 因此，解答应用题只要建立起合适的数学模型，就可以运用相应的数学知识和方法，求出或证明应用题的答案或结论. 由此可见，合理地建立数学模型是解答应用题的关键.

在解答应用题时，所分析问题的特性和数量之间的依存关系一旦与已学习过的某种类型的数学知识的特征或数量关系相吻合，那么该应用题的数学

模型也就建立起来了.但有一点要注意,就是在解答应用题之初,我们是很难判断它属于哪种数学模型的,只有列出了数学式子,在解这个数学问题时才能明确.因此,分析、确定应用题中的数量关系是解应用题时数学建模的前提.

1.2 解答应用题的思维方法

解答应用题就是在阅读材料、理解题意的基础上,把实际问题抽象转化成数学问题,建立相应的数学模型,再利用数学知识对数学模型进行分析、研究,得到数学答案,然后再把数学答案返回到实际问题中去,获取具有实际意义的结论.其具体步骤如下:

一、审题

审题是解答应用题的起点,只有有效地审题,才能准确理解题意,弄清题目所反映的实际背景,弄清每一个名词、概念,分析已知条件,明确所求的结论,把实际问题转化为数学问题.有些学生一见应用题的文字比较长,题目中的情景比较陌生,连题目都没有看完就放弃了.实际上,这类问题往往也是对学生心理素质的严峻考验,只要你能树立信心,保持冷静,认真对待,等你认真阅读完了,就会知道大部分的应用题并不难.审题的手段有下面三个:

(一) 读题

可用加点划线的方法强调关键性的语句,再连贯读出,形成完整的基本问题;也可以用划分层次,归纳大意的方法从背景材料中提炼需要解决的实际问题;或对多个数量进行汇集、归类,借助图表显现出已知量和未知量,体现出需要解决的数学问题;或者用改写的方法对应用题去掉枝叶,抓住主干,保留题中的数量关系和空间形式,将实际问题等价转化为数学问题.

(二) 翻译

应用题建模的关键在于语言的理解和转换,即翻译,它包括:对陌生名词、概念的领悟;把通俗的文字语言、专业术语及图形语言等转化为数学符号语言.

(三) 挖掘

有的应用题中的因果关系和内在规律具有一定的隐蔽性,而它正是建模的必备条件.因此,能否挖掘出题目中蕴涵的数学信息是正确建模的重要环节,这是解题的难点.

二、建模

在审题的基础上，将已知条件与所求问题联系起来，联想数学知识和数学方法，恰当地引入参数变量或适当的坐标系，利用数学知识把问题的主要特征及关系抽象出来，建立相应的数学模型. 建立数学模型是解答应用题的关键步骤，是一项具有创造性的工作.

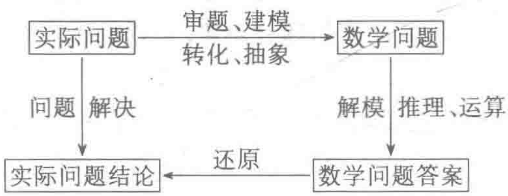
三、解模

在建立数学模型之后，运用相关的数学概念、知识及方法，或计算、或推理，得到数学模型的结果或结论. 即用所学过的数学知识和方法来解答纯数学问题.

四、还原

在解模后，把用数学方法得到的结果或结论，返回到原实际问题中，确定实际问题的准确答案.

解数学应用题的一般步骤也可用如下框图表示：



例 4 中国第三届京剧艺术节在南京举行，某场京剧演出的票价有多种，某团体需购买其中票价为 6 元和 10 元的票共 140 张，并且票价为 10 元的票数不少于票价为 6 元的票数的 2 倍. 问这两种票各购买多少张所需的钱最少？最少需多少钱？(2001 年江苏省初中数学竞赛 B 卷试题)

解答步骤如下：

一、审题 通过阅读题目，可知这是一个生活中的购票方案设计问题，题目中涉及的因素较多，相互制约，但通过归类，可知主要有“票价为 10 元的票数不少于票价为 6 元票数的 2 倍”限制，据此可建立一个不等关系.

二、建模 经过以上分析，可设购买 6 元的票为 x 张，则购买 10 元的票为 $(140-x)$ 张.

根据题意，得，$140-x \geqslant 2x$.