2017

金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

万学教育
UNIVERSAL EDUCATION GROUP

海文考研

管理类

专业硕士 数学复习全书

徐婕 主编

√ 严格根据专业硕士联考考试大纲和真题命题规律编写
√ 权威而富于教学经验的经管类联考命题研究中心成员编写
√ 提供基于零基础的、精细完整的经管类联考应试解决方案

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

2017 管理类专业硕士数学复习全书

徐婕 主编

编委：徐婕 陈生生 张燕 柯汉杰 谢景欢
张喜珠 周晓燕

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

管理类专业硕士数学复习全书/徐婕主编. —北京:北京理工大学出版社，2016.5
ISBN 978-7-5682-2314-0

Ⅰ.①管… Ⅱ.①徐… Ⅲ.①数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 097608 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1 / 16
印　　张 / 16
字　　数 / 310 千字
版　　次 / 2016 年 5 月第 1 版　2016 年 5 月第 1 次印刷
定　　价 / 36.80 元

责任编辑 / 梁铜华
文案编辑 / 多海鹏
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

丛书序

本丛书为参加管理类联考、经济类联考的考生设计，是报考管理类、经济类专业学位硕士考生的必备应试教材。本套丛书由经管类联考命题研究中心成员、资深命题专家和辅导教师们联合编写，包括逻辑写作系列丛书和经管类联考数学系列丛书。

本丛书具有如下特点：

一、严格根据专业硕士联考考试大纲和真题命题规律编写

本套丛书完全根据《管理类专业学位联考(199科目)综合能力考试大纲》、《经济类专业学位联考(396科目)综合能力测试考试大纲》进行编写，并对经管类联考的历年真题进行深度分类解析，形成完整、有效、易理解的应试书籍。丛书通过"知识点——经典例题——巩固习题——真题——模拟题"的方式，帮助考生充分理解和掌握所有考点，并能准确判断高频考点，达到经管类联考所需要的高分。

二、权威而富于教学经验的经管类联考命题研究中心成员

本套丛书的作者是经管类联考命题研究中心的权威资深辅导老师。逻辑写作丛书系列的主编杨岳老师、数学丛书系列的主编徐婕老师主力参加了各大媒体组织的2012至2016届经管类专硕研究生入学考试的"大纲解析"和"真题解析"工作。他们从2007年开始便致力于研究生入学考试的应试辅导，具有丰富的经管类联考辅导经验，既有对大纲的精准解析能力，又能对命题规律和真题进行深度把握，结合多年辅导经验编写的本套丛书，能快速地帮助考生达到经管类联考的应试要求。

三、提供基于零基础的、精细完整的经管类联考应试解决方案

于参加经管类联考考生而言，逻辑、写作一般都是零基础，数学基础一般较差。本丛书充分考虑绝大多数考生的现实情况，提供了基于零基础的、包含考研各个阶段的精细完整应试解决方案，帮助考生实现高分目标。

逻辑写作系列丛书包括《逻辑复习全书》、《写作复习全书》、《逻辑历年真题》、《写作历年真题》四本书籍。数学系列丛书包括《管理类专业硕士数学复习全书》、《经济类专业硕士数学复习全书》、《管理类专业硕士数学历年真题》、《经济类专业硕士数学历年真题》四本书籍。

该系列图书从考生的应试学习起点出发，详尽讲解大纲的所有知识点，并通过例题、习题、真题、模拟题的系统性训练，构建考生出色的应试能力。

我们最大的目标是希望考生们通过自己的努力和我们众多经管类联考命题研究中心专家、教师们的帮助，在2017届经管类专硕考研中脱颖而出、金榜题名！

丛书编委会

前　言

基于多年参加 199 管理类联考、396 经济类联考“大纲解析”、“真题解析”的工作经验和多年对考生进行经管类联考的应试辅导的关注和总结，作者对考生在数学学习中的难点、困惑和解决方案，有了越来越深的理解。帮助学生们避开陷阱、考出高分，是写作本书最直接的动力，同时逻辑写作系列的这四本书籍也算是作者对自己近十年工作的一个总结和交代。

本书为报考管理类专业硕士（会计硕士 MPAcc、工商管理硕士 MBA 等）、经济类专业硕士（金融硕士、国际商务硕士等），需要参加 199 管理类联考和 396 经济类联考的考生编写使用，也可作为辅导老师的授课参考教材。

本书分为两个部分。

第一部分按章编写，基于考生学习的起点，按照“知识点——重要题型——题型方法分析——典型例题——习题”的思路来编写，目的是使考生从零开始构建完整的知识框架，并精确把握各个章节常考重要题型及题型方法，通过典型例题，迅速形成解题能力，每章至少配备 30 道习题，帮助大家加强固化解题能力，提升解题速度。

第二部分提供了 5 套模拟卷，每套 25 题，用于考生进行整体检测和查漏补缺。

下面对本书的标签进行说明：

【章的各级标题】构建形式完整的理论体系。

【注】帮助理解知识点的说明、扩展。

【题型】每个章节的常考重要题型。

【题型方法分析】针对每种题型精炼处对应的解题方式。

【例题】对某一个或几个知识点进行考察的标准化考题。

【答案】提供 A～E 的具体答案。

【解析】提供详尽的深度精确解析。

【总结】每道例题后面都给出根据本道例题所总结、提炼的常规结论和方法

【练习】学完一章的理论和例题后，以章为单位进行测试的标准化考题。

【模拟卷】以每套卷为单位，每次 60 分钟进行整体测试的标准化考题。

本书的编委会成员包括：徐婕（主编）、陈生生、张燕、柯汉杰、谢景欢、张喜珠、周晓燕。各位老师在成书过程中付出了时间和精力，尤其感谢陈生生老师。

考生在使用本书过程中如有疑问，可以登录新浪微博@万学徐婕与老师进行交流。

徐　婕

我们因梦想而伟大，
所有的成功者都是大梦想家：
在冬夜的火堆旁，
在阴天的雨雾中，
梦想着未来。
有些人让梦想悄然绝灭，
有些人则细心培育、维护，
直到它安然度过困境，
迎来光明和希望，
而光明和希望总是降临在
那些真心相信梦想一定
会成真的人身上。

目　录

考点概述

仿真模拟

考点概述

第一章 算 术

预备知识

一、数学基础考查目标

管理类专业学位联考综合能力考试中的数学基础部分主要考查考生的运算能力、逻辑推理能力、空间想象能力和数据处理能力，以及运用所学知识分析问题和解决问题的能力，通过问题求解和条件充分性判断两种形式来测试.

二、数学基础考试形式

考试答题方式为闭卷、笔试.不允许使用计算器.

三、数学基础试卷结构

数学基础共 25 道题，满分 75 分，有两种考查形式：

第一种是问题求解，有 15 道小题，每道小题 3 分，共 45 分；

第二种是条件充分性判断，有 10 道小题，每道小题 3 分，共 30 分.

四、数学基础解题说明

两种考查形式说明如下：

(一) 问题求解（本题在试卷中为第 1 ～ 15 小题，每小题 3 分，共 45 分.下列每题给出的 A、B、C、D、E 五个选项中，只有一个选项符合试题要求.）

【考题范例 1】 (2016) 某家庭在一年总支出中，子女教育支出与生活资料支出的比为 3:8，文化娱乐支出与子女教育支出为 1:2. 已知文化娱乐支出占家庭总支出的 10.5%，则生活资料支出占家庭总支出的(　　).

(A)40%　　(B)42%　　(C)48%　　(D)56%　　(E) 64%

【答案】 D

【解析】 文化娱乐支出:子女教育支出:生活资料支出的比为 3:6:16.

由 $\dfrac{3}{10.5\%}=\dfrac{16}{x}$ 解得 $x=0.56$.

(二) 条件充分性判断（本题在试卷中为第 16 ～ 25 小题，每小题 3 分，共 30 分）

解题说明：

本大题要求考生判断所给出的条件(1) 和条件(2) 能否充分支持题干中陈述的结论(而不必考虑条件是否必要)A、B、C、D、E 五个选项为判断结果，请选择一项符合试题要求的判断.

A. 条件(1) 充分，但条件(2) 不充分.

B. 条件(2) 充分，但条件(1) 不充分.

C. 条件(1) 和(2) 单独都不充分，但是条件(1) 和(2) 联合起来充分.

D. 条件(1) 充分，条件(2) 也充分.

E. 条件(1) 和(2) 单独都不充分，联合起来也不充分.

注：如果条件 A 成立，能推出结论 B 成立，即 $A\Rightarrow B$，称 A 是 B 的充分条件.

【考题范例 2】 (2016) 设 x,y 是实数，则 $x\leqslant 6$，$y\leqslant 4$.

(1) $x\leqslant y+2$；

(2) $2y\leqslant x+2$.

【答案】 C

【解析】 条件(1)，举反例，$x=10$，$y=13$，不充分；条件(2)，举反例，$x=5$，$y=2$，不充分；联立条件(1) 和条件(2)，可得 $2y-2\leqslant x\leqslant y+2\Rightarrow y\leqslant 4$，$x-2\leqslant y\leqslant \frac{x}{2}+1\Rightarrow x\leqslant 6$，充分，选 C.

第一节 整 数

知识精讲

一、整数的除法

整数加上、减去、乘以整数，结果仍然是整数. 但整数除以整数，结果不一定是整数.

1. 带余除法

对任意的两个整数 $a,b(b\neq 0)$，总唯一存在整数 p,r，使得 $a=b\cdot p+r$，其中 $0\leqslant r<|b|$ 称为余数，a 称为被除数，b 称为除数，p 称为商.

2. 整除

当 $r=0$，即 $a=b\cdot p$ 时，称 b 能整除 a，或者称 a 能被 b 整除，记为 $b\mid a$，此时 b 称为 a 的约数(或者因数)，a 称为 b 的倍数.

由上述定义可知，a 除以 b 的余数为 r 的充分必要条件为 b 能整除 $a-r$，即 $a=b\cdot p+r\Leftrightarrow b\mid(a-r)$.

整除具有如下性质：

(1) 传递性　若 $c\mid b$，$b\mid a$，则 $c\mid a$.

(2) 关联性　若 $c\mid b$，$c\mid a$，则对任意的整数 m,n，有 $c\mid(ma+nb)$.

(3) 推论：若 $c\mid a$，则对任意的整数 n，有 $c\mid(a\pm nc)$；若 $c\nmid a$，则对任意的整数 n，有 $c\nmid(a\pm nc)$，且 a 除以 c 的余数与 $a\pm nc$ 除以 c 的余数相同.

常见整除数的特征：

能被 2 整除的数：末一位能被 2 整除(即末位为 0,2,4,6,8)；

能被 4(8) 整除的数：末两(三) 位能被 4(8) 整除；

能被 5 整除的数:末一位能被 5 整除(即末位为 0,5);

能被 25(125) 整除的数:末两(三) 位能被 25(125) 整除;

能被 3 整除的数:各个位上的数字之和能被 3 整除;

能被 9 整除的数:各个位上的数字之和能被 9 整除;

能被 10 整除的数:既能被 2 整除又能被 5 整除(即末位为 0);

能被 6 整除的数:既能被 2 整除又能被 3 整除;

能被 12 整除的数:既能被 3 整除又能被 4 整除.

二、整数的分类

根据除以整数所得余数的情况,可以对整数进行分类.

1. 奇数、偶数

根据整数除以 2 的余数可将整数分为偶数和奇数.

能被 2 整除的整数称为偶数(即余数为 0),记为 $2k(k\in\mathbf{Z})$;不能被 2 整除的整数称为奇数(即余数为 1),记为 $2k+1(k\in\mathbf{Z})$.

类似的,还可以根据除以其他整数的余数情况对整数进行分类.例如,根据整数除以 3 的余数(0,1,2)将整数分为 $3k,3k+1,3k+2(k\in\mathbf{Z})$;也可以根据整数除以 4 的余数(0,1,2,3)将整数分为 $4k,4k+1,4k+2,4k+3(k\in\mathbf{Z})$,等等.

奇数、偶数的运算性质:

加法“同偶异奇”:奇数 ± 奇数 = 偶数;偶数 ± 偶数 = 偶数;奇数 ± 偶数 = 奇数;

乘法“一偶则偶”:奇数 × 奇数 = 奇数;偶数 × 偶数 = 偶数;奇数 × 偶数 = 偶数.

2. 质数、合数

(1) 大于 1 的正整数中,只有 1 和其本身两个正因数的,称为质数(或者素数);除了 1 和其本身外还有其他正因数的,称为合数.

(2)(质数分解定理) 任一大于 1 的整数,均可以表示为若干质数的乘积,即对于任一整数 $a>1$,有 $a=p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_n$,其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 均为质数,且这样的分解形式是唯一的.

(3) 有关质数的常用性质:

①1 既不是质数也不是合数;

②2 是最小的质数,也是质数中唯一的偶数,其他质数均为奇数;

③ 若两个质数的和为奇数,则其中有一个是 2;

④ 若 p 是质数,a 是任一整数,则 $p\mid a$ 或者 $(p,a)=1$(互质);

⑤ 设 p 是质数,$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个整数,若 $p\mid(a_1\cdot a_2\cdots a_n)$,则至少有一个 $a_i(1\leqslant i\leqslant n)$,使得 $p\mid a_i$.

三、公约数、公倍数

1. 公约数、最大公约数

设 a,b 是两个整数,若整数 d 满足 $d\mid a$ 且 $d\mid b$,则称 d 为 a,b 的公约数(公因数);公约数中最大的一个称为最大公约数,记为 (a,b).

例如 20 与 60 的公约数有 1,2,4,5,10,20,而 $(20,60)=20$.

特别地,当 $(a,b)=1$ 时,称 a,b 是互质的.例如 8 与 9 是互质的.

2. 公倍数、最小公倍数

设 a,b 是两个整数,若整数 t 满足 $a\mid t$ 且 $b\mid t$,则称 t 为 a,b 的公倍数;公倍数中最小的一个

称为最小公倍数，记为$[a,b]$.

例如 20 与 60 的公约数有 60,120,180,240,…，而$[20,60]=60$.

3. 有关公约数、公倍数的常用性质

(1)$a \cdot b=(a,b)\cdot[a,b]$;

(2) 若 $d \mid a$ 且 $d \mid b$，则 $d \mid (a,b)$；若 $a \mid t$ 且 $b \mid t$，则$[a,b] \mid t$；(公约数都是最大公约数的约数，公倍数都是最小公倍数的倍数.)

(3) 若 $a \mid t, b \mid t$ 且$(a,b)=1$，则 $a \cdot b \mid t$;

(4) 若 $d \mid (a \cdot m)$ 且$(d,m)=1$，则 $d \mid a$;

(5) 设整数 $a,b,a=(a,b)\cdot k_1, b=(a,b)\cdot k_2$，则$(k_1,k_2)=1$.(常用这条性质确定整数 a，b 的值.)

重要题型

题型一　质数、合数、奇数、偶数

【题型方法分析】

(1) 奇数、偶数的运算性质：加法"同偶异奇"、乘法"一偶则偶".

(2) 若两个质数的和为奇数，则其中有一个是 2.

(3) 若 p 是质数，a 是任一整数，则 $p \mid a$ 或者$(p,a)=1$(互质).

(4) 设 p 是质数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个整数，若 $p \mid (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)$，则至少有一个 $a_i(1 \leqslant i \leqslant n)$，使得 $p \mid a_i$.

例 1.1　设 a 为整数，且 $5a^2+8a+9$ 是偶数，则 a 一定是(　　).

(A) 奇数　　(B) 偶数　　(C) 质数　　(D) 合数　　(E) 无法确定

【答案】 A

【解析】 根据奇数、偶数的运算性质：$5a^2+8a+9$ 是偶数，则 $5a^2+8a$ 是奇数，从而 $5a^2$ 是奇数；则 a^2 是奇数，可以确定 a 是奇数，选 A.

【总结】 牢记奇数、偶数的运算性质：同偶异奇(加减)，一偶则偶(乘法).

例 1.2　两个质数的和为 43，则它们的积为(　　).

(A)41　　(B)43　　(C)81　　(D)82　　(E)83

【答案】 D

【解析】 方法一　结合质数的性质与奇数、偶数的运算性质.

设这两个质数为 $a,b,a+b=43$，结果为奇数，可知 a,b 中有一个为 2，所以这两个数为 2，41，所以 $a \cdot b=82$，选 D.

方法二　结合选项，快速解答.

两个质数和为奇数，则其中有一个是 2，另一个是奇数，其乘积是偶数，结合选项，选 D.

【总结】 两个质数 a,b 且 $a+b$ 为奇数，则 a,b 中必有一个是 2，另一个是奇数，这是经常考查的一个结论.

例 1.3　以下各数是质数的为(　　).

(A)2 009　　(B)2 010　　(C)2 011　　(D)2 015　　(E)2 016

【答案】 C

【解析】 根据整除数的特点，易知选项 B、D、E 不是质数，因为 2010 有约数 2，2015 有约数 5，2016 有约数 3. 对于选项 A，因为 $7 \mid 2009$，所以 2009 也不是质数，选 C.

【总结】 试数法是处理质数问题的一种常用方法. 判断一个数是否为质数，可将比其小的所有质数按照从小到大分别去除该数，若都不能整除，则该数为质数.（实际上，只需要试比该数的一半小的所有质数即可.）

例 1.4 不超过 20 的质数的和为（ ）.

(A)74 (B)75 (C)76 (D)77 (E)78

【答案】 D

【解析】 不超过 20 的质数有：2，3，5，7，11，13，17，19.

方法一 列举法. 这些数相加得 $2+3+5+7+11+13+17+19=77$，选 D.

方法二 尾数法. 只将这些数的尾数相加 $2+3+5+7+1+3+7+9$，结果的尾数为 7，选 D.

【总结】 列举法也是处理整数的一种常用方法，利用列举法时，应结合题目尽可能地缩小范围，简化计算（如尾数法、估算法），以尽可能节省时间.

例 1.5 设 $126a$ 是一个自然数的完全平方数，其中 a 为正整数，则 a 必有正约数（ ）.

(A)2 和 7 (B)2、3 和 7 (C)3 和 7 (D)7 (E)2

【答案】 A

【解析】 根据题意可知，$126a=m^2$，m 是整数，则 $m=\sqrt{126a}=\sqrt{2\cdot 3^2\cdot 7\cdot a}$，可知 a 必有正约数 2 和 7，选 A.

【总结】 根据质数分解定理将整数分解为质数的乘积，是一种很好用的处理整数的方法，类似于整式的因式分解. 特别是遇到较大的整数时，经常将其分解为较小的质数的乘积，再结合质数的特殊性质来处理.

题型二 整数的除法

【题型方法分析】

(1) 带余除法

(2) 整除及其性质

例 1.6 设 x,y 是整数，且 x 被 3 除时余数为 1，y 被 9 除时余数为 8，则 xy 除以 3 的余数为（ ）.

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4 (E)5

【答案】 B

【解析】 根据题意，由整数的带余除法可知，$x=3k+1$，$y=9t+8$，其中 $k,t\in \mathbf{Z}$，则 $xy=(3k+1)(9t+8)=27kt+24k+9t+8$，因为 $27kt+24k+9t$ 能被 3 整除，根据整除的性质推论，可知 xy 除以 3 的余数与 8 除以 3 的余数相同，余数为 2，所以选 B.

【总结】 整数 a 除以 c 的余数与 $a\pm nc$ 除以 c 的余数相同.

例 1.7　已知 n 是除以 5 余 3，除以 7 余 3 的最小自然数，则 n 的各位数字之积为（　　）.

(A)38　　(B)35　　(C)30　　(D)28　　(E)24

【答案】 E

【解析】 由带余除法有 $n = 5k + 3 = 7t + 3,(k,t \in \mathbf{Z})$.

方法一　试数法. 依次试 $t = 1,2,3,\cdots$，解出整数 k，可得 $t = 5$，此时 $k = 7$，所以 $n = 38$，结果为 24，选 E.

方法二　利用带余除法与整除的关系. $n = 5k + 3 = 7t + 3,(k,t \in \mathbf{Z})$，则 $5 \mid (n-3)$，$7 \mid (n-3)$，可知最小的 $n-3$ 是 35，所以 $n = 38$，选 E.

【总结】 $a = b \cdot p + r \Leftrightarrow b \mid (a-r)$.

题型三　公约数、公倍数

【题型方法分析】

(1) $a \cdot b = (a,b) \cdot [a,b]$.

(2) 设整数 a,b，$a = (a,b) \cdot k_1$，$b = (a,b) \cdot k_2$，则 $(k_1,k_2) = 1$.

(3) 若 $d \mid (a \cdot m)$ 且 $(d,m) = 1$，则 $d \mid a$.

例 1.8　已知两个正整数的最大公约数为 5，最小公倍数为 65，则这两个数的和为（　　）.

(A)70　　(B)80　　(C)90　　(D)100　　(E)110

【答案】 A

【解析】 设这两个数为 a,b，根据题意知 $(a,b) = 5$，$[a,b] = 65$，又可设 $a = (a,b)k_1 = 5k_1$，$b = (a,b)k_2 = 5k_2$，且 $(k_1,k_2) = 1$，由公约数、公倍数的性质 $(a,b) \cdot [a,b] = a \cdot b$，可得 $5 \cdot 65 = 5 \cdot k_1 \cdot 5 \cdot k_2 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = 13$，则 k_1,k_2 的值为 1，13，所以这两个数为 5 和 65，和为 70，选 A.

【总结】 牢记公约数、公倍数的性质，尤其是有关最大公约数与最小公倍数的性质 $(a,b) \cdot [a,b] = a \cdot b$.

例 1.9　$\dfrac{5a}{42}$ 是整数.

(1) $\dfrac{9a}{14}$ 是一个整数；

(2) $\dfrac{7a}{12}$ 是一个整数.

【答案】 C

【解析】 取 $a = 14$，易知条件(1)不充分；取 $a = 12$，易知条件(2)不充分；联立两个条件，$14 \mid 9a$，$12 \mid 7a$，因为 $(14,9) = 1$，$(12,7) = 1$，所以 $14 \mid a$，$12 \mid a$，由公倍数的性质有 $[14,12] \mid a$，即 $84 \mid a$，所以 $42 \mid a$，$\dfrac{5a}{42}$ 是整数，充分，选 C.

【总结】 此题有一定的难度，综合考查了公约数、公倍数的性质与整除的性质，牢记基本性质是解题的关键.

第二节 实 数

知识精讲

一、实数的基本运算

实数四则运算(加减乘除)的结果,仍然是实数.下面简单介绍一下实数的乘方、开方运算.

1.乘方运算

$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{n}$,$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$;特别的,$a^0 = 1$.

注:负数的奇数次幂还是负数,负数的偶数次幂是正数.

2.开方运算

在有意义的情况下,$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$.

常用性质:

(1) 负实数没有偶次方根,例如 $\sqrt{-9}$ 无意义;

(2) 正实数的偶次方根有两个,且互为相反数,例如 4 的平方根为 ± 2;

(3) $\sqrt{a} \geqslant 0$;$\sqrt{a^2} = |a|$;$\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}$;$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$;

(4) 有限个非负项的和为零时,则每项均为零.常见的非负项:绝对值、偶次方、偶次方根.

二、小数、分数

1.小数的分类

小数可分为有限小数和无限小数,无限小数又可分为无限循环小数和无限不循环小数.无限不循环小数也称为无理数,如$\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$,π,e,….

2.分数的运算

形如$\dfrac{p}{q}$($p,q \in \mathbf{Z}$ 且 $q \neq 0$)的称为分数,分数也称为有理数.

(1) 约分、通分

约分:分子分母约去所有的公约数,使得分子分母互质.

最简分数(既约分数):分子分母互质的分数称为最简分数.

通分:把几个分母不同的分数化为分母相同,且与原分数相等的过程称为通分.经常取各分母的最小公倍数为相同的分母.

约分与通分是分数的两种基本运算.

(2) 分数的四则运算

加、减运算:同分母的分数相加减,分母不变,分子相加减;异分母的分数相加减,先通分,转化为同分母的分数,再计算.

乘法运算:分数乘以分数,分子与分子的乘积作分子,分母与分母的乘积作分母.

除法运算:分数除以分数,第二个分数取倒数,转化为分数的乘法,再计算.

3.小数与分数的相互转化

分数化为小数,有限小数化为分数,是比较简单的.无限不循环小数不能化为分数.下面主

要介绍循环小数化为分数的方法.

(1) 纯循环小数化为分数

先看一个例子,$0.\dot{3}=\dfrac{1}{3}$.

$0.\dot{3}=0.3\dot{3}\Rightarrow 0.\dot{3}\times 10=3.\dot{3}=3+0.\dot{3}$,则 $0.\dot{3}\times 10-0.\dot{3}=3$,所以 $0.\dot{3}=\dfrac{3}{10-1}=\dfrac{1}{3}$.

$0.\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_k=0.a_1a_2\cdots a_k\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_k$

$\Rightarrow 0.\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_k\times 10^k=a_1a_2\cdots a_k.\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_k=a_1a_2\cdots a_k+0.\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_k$,

则 $0.\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_k\times 10^k-0.\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_k=a_1a_2\cdots a_k\Rightarrow 0.\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_k=\dfrac{a_1a_2\cdots a_k}{10^k-1}$.

结论:纯循环小数化为分数,分子为循环节,分母为10^k-1,其中 k 为循环节的位数.

(2) 混循环小数化为分数

方法:先将小数拆分为有限小数+纯循环小数,再将有限小数和纯循环小数化为分数,最后相加.

三、有理数、无理数

可以写成分数的实数称为有理数,无限不循环小数称为无理数.

1. 有理数与无理数的运算性质

有理数+、-、×、÷有理数 = 有理数;有理数+、-无理数 = 无理数;非零有理数×、÷无理数 = 无理数;无理数与无理数四则运算的结果要根据具体情况具体分析.

结论:设 a,b 为有理数,$\sqrt{c}$ 为无理数,且 $a+b\sqrt{c}=0$,则 $a=b=0$.

2. 无理数的处理方法

(1) 平方　$(\sqrt{a})^2=a$,可以通过两边平方去掉根号.

(2) 配方　$\sqrt{a^2+b^2-2ab}=\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|$,配成完全平方式,可以去掉根号.

(3) 有理化　$\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$,利用平方差公式,可进行分子有理化或者分母有理化.

3. 实数的整数部分和小数部分

对于任意实数 x,用$[x]$表示不超过 x 的最大整数,称$[x]$为 x 的整数部分;令$\{x\}=x-[x]$,称$\{x\}$为x 的小数部分.例如,1.7 的整数部分为$[1.7]=1$,小数部分为$\{1.7\}=0.7$;-1.7 的整数部分为$[-1.7]=-2$(注意不是 -1,因为 -1 超过了 -1.7),小数部分为$\{-1.7\}=-1.7-(-2)=0.3$;π 的整数部分为 3,小数部分为 $\pi-3$.

性质:(1)$x=[x]+\{x\}$;　　(2)$0\leqslant\{x\}<1$.　　(3)$[x]\leqslant x<[x]+1$.

重要题型

题型一　有理数、无理数的性质

【题型方法分析】

(1) 有理数与无理数的运算性质;

(2) 设 a,b 为有理数,$\sqrt{c}$ 为无理数,且 $a+b\sqrt{c}=0$,则 $a=b=0$.

例 2.1　若 a,b,c 为有理数,且 $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=\sqrt{11-4\sqrt{6}}$,则 $a+b+c=$(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3　　(E)4

【答案】 B

【解析】 $\sqrt{11-4\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(2\sqrt{2})^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}}=\sqrt{(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}=2\sqrt{2}-\sqrt{3}$，所以 $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=2\sqrt{2}-\sqrt{3}$，则 $a=0,b=2,c=-1$，故 $a+b+c=1$，选 B.

【总结】 处理无理数的三种方法：平方、配方、有理化.

例 2.2　已知 a 为实数，且 $a+\sqrt{15}$ 与 $\frac{1}{a}-\sqrt{15}$ 都是整数，则 $a=$（　　）.

(A)$4-\sqrt{15}$　　(B)$4+\sqrt{15}$　　(C)$-(4+\sqrt{15})$

(D)$\sqrt{15}-4$ 或 $4+\sqrt{15}$　　(E)$4-\sqrt{15}$ 或 $-(4+\sqrt{15})$

【答案】 E

【解析】 设 $a+\sqrt{15}=m,\frac{1}{a}-\sqrt{15}=n,(m,n\in\mathbf{Z})$，则 $a=m-\sqrt{15},\frac{1}{a}=n+\sqrt{15}$，所以，有 $1=a\cdot\frac{1}{a}=(m-\sqrt{15})(n+\sqrt{15})=mn+(m-n)\sqrt{15}-15$，整理得 $mn-16+(m-n)\sqrt{15}=0$. 再根据有理数与无理数的运算性质，得 $mn-16=0,m-n=0$，解得 $m=n=4$ 或 $m=n=-4$，所以 $a=4-\sqrt{15}$ 或 $-(4+\sqrt{15})$，选 E.

【总结】 牢记有理数与无理数的运算性质，并灵活应用以下结论：(1) 若 $a+b\sqrt{m}=0$，则 $a=b=0$；(2) 若 $a+b\sqrt{m}=c+d\sqrt{n}$，则 $a=c,b=d=0$.

题型二　实数的运算

【题型方法分析】

(1) 处理无理数：平方、配方、有理化；

(2)$x=[x]+\{x\}$；$0\leqslant\{x\}<1$；$[x]\leqslant x<[x]+1$；

(3) 算式求值：裂项法.

例 2.3　$1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{99\times 100}+\frac{1}{100\times 101}=$（　　）.

(A) $\frac{199}{101}$　　(B) $\frac{200}{101}$　　(C) $\frac{201}{101}$　　(D) $\frac{202}{101}$　　(E) $\frac{199}{201}$

【答案】 C

【解析】 考查分数的运算.

$$1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{99\times 100}+\frac{1}{100\times 101}$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)+\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)=1+1-\frac{1}{101}=\frac{201}{101}.$$

选 C.

【总结】 裂项法是常用的一种化简方法：$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.