考研数学命题人土豪金系列丛书

2017

分类归纳+紧贴大纲+考点全覆盖+真题精析+习题精练

考研数学命题人复习全书

题型强化练习参考答案

（数学二）

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著

北京大学 尤承业 教授 清华大学 徐荣 教授

北京大学 刘德荫 教授 首都师范大学 童武 教授

北京航空航天大学出版社

BEIHANG UNIVERSITY PRESS

目　　录

第一部分 高等数学

第1章 函数、极限与连续 题型强化练习参考答案

一、选择题

1. [A]

由函数$f(x)$的表达式知，它在实数轴上除点$x=0,x=1$及$x=2$外处处有定义，在它的定义域上有

$$|f(x)| = \left|\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}\right| = \frac{1}{|(x-1)(x-2)|}\cdot\left|\frac{\sin(x-2)}{x-2}\right| \leqslant \frac{1}{|(x-1)(x-2)|}.$$

由此可见，$f(x)$在区间$(-1,0)$内有界，而在任何以$x=1$或$x=2$为端点的开区间内无界. 故应选[A].

2. [B]

由于$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} x\tan x e^{\sin x}=\infty$，故$f(x)$无界；或考查$f(x)$在$x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{4}(n=1,2,\cdots)$的函数值，有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=+\infty$. 可见，$f(x)$是无界函数. 故应选[B].

3. [A]

① $x_n=\begin{cases}n, & \text{当 } n \text{ 为偶数时},\\ 0, & \text{当 } n \text{ 为奇数时},\end{cases}\quad y_n=\begin{cases}0, & \text{当 } n \text{ 为偶数时},\\ n, & \text{当 } n \text{ 为奇数时},\end{cases}$

则$\{x_n\}$、$\{y_n\}$都无界. 但$x_n\cdot y_n=0$，$\{x_ny_n\}$有界. 故[B]不正确.

② 若设$y_n=0$，x_n如①，则$\{y_n\}$有界，$x_n\cdot y_n=0$，$\{x_ny_n\}$有界. 故[C]不正确.

③ $x_n=n,y_n=-n$，$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都无界，但$x_n+y_n=0$，$\{x_n+y_n\}$有界，故[D]不正确.

4. [A]

由于$\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{t\to+\infty}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\lim\limits_{t\to+\infty}e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}=\lim\limits_{t\to+\infty}e^{\frac{1}{1+t}}=e^0=1$，应选[A].

这里应注意$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}=e^{-1}\neq-e$,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{-1}=e^{-1}\neq e.$$

5. [B]

设$f(x)=\begin{cases}0, & x \text{ 为有理数},\\ 1/x, & x \text{ 为无理数},\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}1/x, & x \text{ 为有理数，且 } x\neq0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$则

$$f(x)g(x)=0.$$

当$x\to0$时，$f(x)g(x)\to0$. 但$x\to0$时，$f(x)$及$g(x)$都不是无穷小，命题④不正确；且本例中$f(x)$及$g(x)$在$x=0$的任何邻域内都无界，但$f(x)g(x)=0$，在与前面相

同的邻域内有界，即命题 ① 不正确. 应选[B].

6. [D]

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=2\cdot0=0,$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=\infty.$$

当 $x\to1$ 时，函数没有极限，也不是 ∞，故应选[D].

7. [B]

因为

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2^x\ln2+3^x\ln3}{1}=\ln2+\ln3,$$

且 $\ln2+\ln3\neq1$，所以应选[B].

8. [D]

由于 $x\to0$ 时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\sqrt{1-x^2}-1\sim-\frac{1}{2}x^2$，

故 x^2，$1-\cos x$，$\sqrt{1-x^2}-1$ 是同阶无穷小，所以应选[D].

9. [A]

由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=-1$ 知，当 $x\to0$ 时，$f(x)\sim-x^2$，于是 $x^nf(x)\sim-x^{n+2}$.

又当 $x\to0$ 时，$\ln\cos x^2=\ln[1+(\cos x^2-1)]\sim\cos x^2-1\sim-\frac{1}{2}x^4$.

再根据题设有：$2<n+2<4$. 可见 $n=1$，故应选[A].

10. [D]

用排除法.

令 $$\varphi(x)=1-\frac{1}{x^2},f(x)=1,g(x)=1+\frac{1}{x^2},$$

显然 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且

$$\lim_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}=0.$$

此时 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$. 故[A]和[C]都不正确.

为排除[B]，再令 $\varphi(x)=x-\frac{1}{x^2}$，$f(x)=x$，$g(x)=x+\frac{1}{x^2}$，显然 $\varphi(x)$，$f(x)$，$g(x)$ 满足题设全部条件，但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$，故应选[D].

11. [A]

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a(e^{\sin x}-1)+b(x-\sin x)}{c\tan x+d(1-\cos x)}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ae^{\sin x}\cos x+b(1-\cos x)}{c\sec^2x+d\sin x}$,

当 $a\neq0$ 时，原式 $\neq0$，故选[A].

12. [D]

[A]，[B] 显然不对，因为由数列极限的不等式性质只能得出数列“当 n 充分大时”的情况，不可能得出“对任意 n 成立”的性质.

[C] 也明显不对，因为“无穷小 · 无穷大”是未定型，极限可能存在也可能不存在.

故应选[D].

13. [A]

由基本初等函数的连续性及连续函数的四则运算法则，知 $f(x) = \ln x + \sin x$ 在其定义域 $0 < x < +\infty$ 内连续，故应选[A].

14. [D]

由 $f(x)$ 是奇函数有 $f(0) = 0$，又因为 $f'(0)$ 存在，所以

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} g(x),$$

又因为 $x = 0$ 是 $g(x)$ 的间断点，且 $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = f'(0)$. 所以 $x = 0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点. 故应选[D].

15. [B]

易计算得 $f(x) = \begin{cases} 1 + x, & |x| < 1, \\ \dfrac{1 + x}{2}, & |x| = 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 讨论即知.

由题设得极限为

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & |x| < 1, \\ \dfrac{1 + x}{2}, & |x| = 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

可知 $x = -1$，$x = 1$ 为函数的分段点，作函数图形可知 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的间断点，$x = -1$ 为 $f(x)$ 的连续点，因此应选[B].

16. [D]

因为
$$\lim_{x\to 0}(x) = \lim_{x\to 0} f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} = y\lim_{y\to\infty} f(y) = a,$$

从而，当 $a = 0 = g(0)$ 时，$g(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续；当 $a \neq 0$ 时，$g(x)$ 在点 $x = 0$ 处间断，即 $g(x)$ 在点 $x = 0$ 处的连续性与 a 的取值有关. 故应选[D].

二、填空题

1. $\dfrac{6}{5}$.

$$原式 = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2 + 5}{5x^2 + 3x}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{6}{5}.$$

2. e.

[解法一]　$$原式 = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x} - 1\right)^x$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left[1 + \left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x} - 1\right)\right]} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x} - 1\right)}.$$

又
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x} - 1\right)x = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} + \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{x}} = 1,$$

故原式 $= e$.

[解法二] 设 $u = \frac{1}{x}$,则当 $x\to\infty$ 时,$u\to 0$. 于是

$$原式 = \lim_{u\to 0}(\sin u + \cos u)^{\frac{1}{u}} = e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(\sin u+\cos u)}{u}}.$$

而由洛必达法则,得

$$原式 = \lim_{u\to 0}\frac{\ln(\sin u + \cos u)}{u} = \lim_{u\to 0}\frac{\cos u - \sin u}{\sin u + \cos u} = 1,$$

故原式 $= e$.

3. $e^{\frac{n+1}{2}}$.　此极限是 1^∞ 型未定式.

[解法一]

$$原式 = \lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n}\right)\right]$$

$$= \exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}) - \ln n}{x}\right],$$

其中大括号内的极限是 $\frac{0}{0}$ 型未定式,因此由洛必达法则,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}) - \ln n}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + 2e^{2x} + \cdots + ne^{nx}}{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}} = \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

于是原式 $= e^{\frac{n+1}{2}}$.

[解法二] 由于

$$\frac{(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx})^{nx}}{2} = \left(1 + \frac{(e^x - 1) + (e^{2x} - 1) + \cdots + (e^{nx} - 1)}{n}\right)^{\frac{1}{x}},$$

又因

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x - 1) + (e^{2x} - 1) + \cdots + (e^{nx} - 1)}{nx}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x} - 1}{x} + \cdots \lim_{x\to 0}\frac{e^{nx} - 1}{x}\right]$$

$$= \frac{1}{n}(1 + 2 + \cdots + n) = \frac{1}{2}(n + 1),$$

故原式 $= e^{\frac{1}{2}(n+1)}$.

4. $1, -4$.

不难得出

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x - a}(\cos x - b) = \begin{cases} 0, a \neq 1, 任何\ b, \\ 1 - b, a = 1, 任何\ b. \end{cases}$$

从而,若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x - a}(\cos x - b) = 5$,则必须且只需 $a = 1, 1 - b = 5$,即 $a = 1, b = -4$.

5. $\frac{4}{3}$.

[解法一]　$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{\cos^2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^22x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{4}\sin4x}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{6x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{3x}=\frac{4}{3}.$$

[解法二]　$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{\cos^2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x\cos^2x}{x^2\sin^2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x(1-\sin^2x)}{x^4}\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^4}+\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}+\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}+1$$

$$=1+2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=1+\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{4}{3}.$$

6. $\frac{1}{4}$.

因为$\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\frac{x+1}{x-1}=\ln\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}=\ln e^2=2$,所以

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{f(2x)}=2,\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{2x}{f(2x)}=\frac{1}{2}\lim_{u\to0}\frac{u}{f(u)}=2.$$

故$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{4}$.

7. 16.

原式$\xlongequal{令x=-t}\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{at^2+t+2}-t+1}{\sqrt{t^2-\cos t}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{a+1/t+2/t^2}-1+1/t}{\sqrt{1-(\cos t)/t^2}}$

$$=\frac{\sqrt{a}-1}{1}=3.$$

故 $a=16$.

8. $\frac{1}{3}$.

$$\lim_{x\to0}\frac{(3+x)^x-3^x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3^x\left[\left(1+\frac{x}{3}\right)^x-1\right]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}3^x\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln(1+x/3)}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{3}}{x}=\frac{1}{3}.$$

9. 2.

原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+3\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}=2.$

10. $a=-\dfrac{3}{2}$.

由$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\dfrac{1}{3}ax^2,\cos x-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$,以及

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}a=1,$$

可得　$a=-\dfrac{3}{2}$.

11. $\dfrac{1}{1-2a}$.

由于

$$\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n=n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right],$$

利用等价无穷小代换,有

$$\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]\sim\frac{1}{n(1-2a)}(n\to\infty).$$

于是　$$原式=\lim_{x\to\infty}n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{n}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}.$$

12. $4\mathrm{e}^{-1}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{(n+n)}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\exp\left[\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\right]=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\right]\right\}$$

$$=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x}=4\mathrm{e}^{-1}.$$

三、解答题

1. 属 1^∞ 型

$$原式=\lim_{x\to0^+}[1+(\cos\sqrt{x}-1)]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\pi}{x}(\cos\sqrt{x}-1)}.$$

由于　$$\lim_{x\to0^+}\frac{\pi}{x}(\cos\sqrt{x}-1)=\pi\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{x}=-\frac{\pi}{2},$$

故原式 $=\mathrm{e}^{-\pi/2}$.

2. [解法一]

因为$\left(1-x+\dfrac{x^2}{2}\right)\mathrm{e}^x=\left(1-x+\dfrac{x^2}{2}\right)\left[1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)\right]=1+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3),$

$$\sqrt{1+x^3}=(1+x^3)^{1/2}=1+\frac{x^3}{2}+o(x^3),$$

所以　$$\lim_{x\to0}\frac{\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{e}^x-\sqrt{1+x^3}}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\left[1+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]-\left[1+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right]}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{3}.$$

[解法二]

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x-(1+x^3)^{1/2}}{x^3} - \lim_{x\to0}\frac{\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x-1}{x^3} - \lim_{x\to0}\frac{(1+x^3)^{1/2}-1}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{(x-1)e^x+\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x}{3x^2} - \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{x^2}{6x^2}e^x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}.$$

3. 这是 n 项式和的极限. 当各项分母均相同是 n 时, n 项和式

$$x_n = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n}$$

是函数 $\sin\pi x$ 在 $[0,1]$ 区间上的一个积分和, 于是可由定积分 $\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x$ 求得极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

为了求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}$, 首先通过放缩化简 n 项和数列:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+0};$$

由于
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+0} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi},$$

根据夹逼准则, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}} = \frac{2}{\pi}.$$

4. 【证明】首先, 显然有 $x_n>0$, $\{x_n\}$ 有下界.

证明 x_n 单调减: 用归纳法. $x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{6+10}=4<x_1$; 设 $x_n<x_{n-1}$ 则

$$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}<\sqrt{6+x_{n-1}}=x_n.$$

由此, x_n 单调减. 由单调有界准则, $\lim\limits_{x\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 求 a: 在恒等式 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 两边取极限, 得 $a=\sqrt{6+a}$ 取得 $a=33$($a=-2$ 舍去, 因为 $x_n>0, a\geqslant0$).

5. (Ⅰ) $\lim\limits_{x\to0}f(x) = \exp\left[\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n}{x}\right]$

$$= \exp\left(\lim_{x\to0}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}\ln(a_1 a_2 \cdots a_n)} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

（Ⅱ）记 $a = \max(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，则

$$a\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{a^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} \leqslant f(x) \leqslant \left(\frac{na^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = a,$$

而
$$\lim_{x \to +\infty} a\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} a = a,$$

所以
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a = \max(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

6.【证明】在所给方程中，用 $\frac{1}{x}$ 代替 x 得：$af\left(\frac{1}{x}\right) + bf(x) = cx$，联立原方程，消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 得

$$(a^2 - b^2)f(x) = \frac{ac}{x} - bcx,$$

又 $|a| \neq |b|$，所以 $f(x) = \frac{c}{a^2 - b^2}\left(\frac{a}{x} - bx\right)$. 将 $-x$ 代入 $f(x)$ 表达式得

$$f(-x) = \frac{c}{a^2 - b^2}\left(-\frac{a}{x} + bx\right) = -\frac{c}{a^2 - b^2}\left(\frac{a}{x} - bx\right) = -f(x).$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

7.【证明】由周期函数及奇函数的积分性质，得

$$F(x + T) = \int_0^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt + \int_T^{x+T} f(t)\,dt$$
$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt = F(x).$$

所以，$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ 是以 T 为周期的周期函数.

(2) 对于任意的常数 k，有

$$G(x) = \int_a^x [f(t) - k + k]\,dt = \int_a^x [f(t) - k]\,dt + k(x - a).$$

由于 $k(x-a)$ 是线性函数，所以只需证明当 k 取某一值时 $g(x) = \int_a^x [f(t) - k]\,dt$ 以 T 为周期即可.

由周期函数的定积分性质，得

$$g(x + T) = \int_a^{x+T} [f(t) - k]\,dt = \int_a^x [f(t) - k]\,dt + \int_x^{x+T} [f(t) - k]\,dt$$
$$= g(x) + \int_0^T f(t)\,dt - kT.$$

取 $k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$，则 $g(x + T) = g(x)$，即 $g(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

8. 题中给出了关于 $f(x)$ 及 $f(x)$ 的一个复合函数等式，此类题目的解法一般是利用变量代换，设法得到一个方程组，然后解出 $f(x)$. 为此，令 $t = \frac{x}{x-1}$，则 $x = \frac{t}{t-1}$，代入原等式得

$$f(t) = af\left(\frac{t}{t-1}\right)+\varphi\left(\frac{t}{t-1}\right).$$

于是得到关于$f(x)$,$f\left(\frac{x}{x-1}\right)$的二元一次方程组为

$$\begin{cases} f\left(\frac{x}{x-1}\right)-af(x) = \varphi(x), \\ f(x) - af\left(\frac{x}{x-1}\right) = \varphi\left(\frac{x}{x-1}\right), \end{cases}$$

解得$f(x) = \dfrac{1}{1-a^2}\left[a\varphi(x) + \varphi\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right]$.

9. 因当$x\to 0$时,$\ln(1+x^n) \sim x^n$,$\ln^m(1+x) \sim x^m$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^n)}{\ln^m(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^n}{x^m} = \begin{cases} \infty, & n<m, \\ 1, & n=m, \\ 0, & n>m. \end{cases}$$

10. 因为$\dfrac{e^{\frac{k+1}{n}}}{n+1} \leqslant \dfrac{e^{\frac{k+1}{n}}}{n+\frac{k^2}{n^2}} \leqslant \dfrac{e^{\frac{k+1}{n}}}{n}(k=0,1,\cdots,n-1)$,所以

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}} \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}.$$

又因为

$$\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}} = e^{\frac{1}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k}{n}} = e^{\frac{1}{n}}\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}, \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(1-e)e^{\frac{1}{n}}\frac{\frac{1}{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}} = e-1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}} = 1\cdot(e-1) = e-1,$$

由夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = e-1$.

11. 原式$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(1-x^{x-1})}{1-x+\ln x} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x[1-e^{(x-1)\ln x}]}{1-x+\ln x}$

$$= -\lim_{x\to 1}\frac{x[e^{(x-1)\ln x}-1]}{1-x+\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{-x(x-1)\ln x}{1-x+\ln x}$$

(因$e^{(x-1)\ln x}-1 \sim (x-1)\ln x, x\to 1$时)

$$\overset{\text{洛必达}}{\underset{\text{法则}}{=}} -\lim_{x\to 1}\frac{(2x-1)\ln x+(x-1)}{(1/x)-1} = -\lim_{x\to 1}\left[\frac{(2x^2-x)\ln x + x(x-1)}{1-x}\right]$$

$$= 1-\lim_{x\to 1}\frac{(2x^2-x)\ln x}{(x-1)x} \overset{\text{洛必达}}{\underset{\text{法则}}{=}} 1-\lim_{x\to 1}\frac{(4x-1)\ln x+(2x-1)}{-1}$$

$$= 1+\lim_{x\to 1}[(4x-1)\ln x+(2x-1)] = 1+1 = 2.$$

12. 原式$\overset{\text{洛必达}}{\underset{\text{法则}}{=}}\lim\limits_{\varphi\to 0}\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\cos\varphi}\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}+\dfrac{2}{\cos 2\varphi}\dfrac{\sin 2\varphi}{2\varphi}+\cdots+\dfrac{n}{\cos\varphi}\cdot\dfrac{\sin n\varphi}{n\varphi}\right)\cdot\right.$

$$\left.\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\cdots\sqrt[n]{\cos n\varphi}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(1+2+\cdots+n) = \frac{n(n+1)}{4}.$$

13. 利用$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$,分别取$n=1,2,\cdots$,求和得

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$$

故　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{1}{4}.$

14. 先将 n 项乘积化简为下述形式：

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2}=2^{1/2+1/4+1/8+\cdots+1/2^n}=2^{[1-(1/2)^n]},$$

再在上式两端求极限,得到

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2})=\lim_{n\to\infty}2^{[1-(1/2^n)]}=2.$$

15. 用等价无穷小代换分别得到：

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2/2)\cdot x^2}{x\cdot x^n}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x^{3-n}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x^n}{x^2}=\lim_{x\to 0}x^{n-1}=0,$$

因而 $3-n>0,n-1>0$. 由 $1<n<3$ 得 $n=2$.

16. 因为分母为 x^2,将 $\ln(1+x)$ 展成 2 阶带拉格朗日型余项的麦克劳林公式：

$$\ln(1+x)=x-(1/2)x^2+o(x^2),$$

则

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x-(1/2)x^2+o(x^2)-(ax+bx^2)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a)x-(1/2+b)x^2+o(x^2)}{x^2}=2.$$

于是必有 $1-a=0,-(1/2+b)=2$,解之得:$a=1,b=-5/2$.

第 2 章　导数与微分　题型强化练习参考答案

一、选择题

1. [C]

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos\sqrt[5]{x^4-1}}{x}=0$ 即 $f'(0)=0$.　应选[C].

2. [C]

因 $3x^3$ 处处任意阶可导，只需考查 $x^2|x|\triangleq\varphi(x)$，它是分段函数，$x=0$ 是连接点.

$$\varphi(x)=\begin{cases}-x^3, & x\leqslant0,\\ x^3, & x\geqslant0,\end{cases}\Rightarrow\varphi'(x)=\begin{cases}-3x^3, & x<0,\\ 3x^3, & x>0,\end{cases}$$

又　$\varphi'_+(0)=(x^3)=(x^3)'_+|_{x=0}=0,\varphi'_-(0)=(-x^3)'_-|_{x=0}=0\Rightarrow\varphi'(0)=0$，

即　$$\varphi'(x)=\begin{cases}-3x^2, & x\leqslant0,\\ 3x^2, & x\geqslant0.\end{cases}$$

同理可得　$\varphi''(x)=\begin{cases}-6x, & x<0,\\ 6x, & x>0,\end{cases}$　$\varphi''(0)=0$，

即　$$\varphi''(x)=\begin{cases}-6x, & x\leqslant0,\\ 6x, & x\geqslant0,\end{cases}\quad\varphi''(x)=6|x|,$$

因 $y=|x|$ 在 $x=0$ 不可导 $\Rightarrow\varphi''(0)$ 不存在. 应选[C].

3. [B]

当 $t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$x\in(0,1)$.　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{3\sin^2t\cos t}{3\cos^2t(-\sin t)}=-\tan t<0$，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\tan t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\tan t)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\sec^2t\cdot\frac{1}{3\cos^2t(-\sin t)}=\frac{1}{3\cos^4t\sin t}>0.$$

故选[B].

4. [D]

由题设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 知，$f(0)=0,f'(0)=1$.

令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F'(x)=f'(x)-1,F''(x)=f''(x)>0$.

于是 $F'(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 内单调增加，且 $F'(0)=0$. 当 $x\in(-\delta,0)$ 时，$F'(x)<F'(0)=0$；当 $x\in(0,\delta)$ 时，$F'(x)>F'(0)=0$. 可见，$F(x)$ 在点 $x=0$ 处取极小值，也即最小值，从而有 $F(x)>F(0)=0$，即 $f(x)>x,x\in(-\delta,\delta)$，故应选[D].

5. [A]

设 $\varphi(x)=f(x)-x$，则 $\varphi'(x)=f'(x)-f,\varphi''(x)=f''(x)$.

由 $f''(x)<0$ 得 $\varphi''(x)<0$，故 $\varphi'(x)$ 单调减小，则

当 $x<1$ 时，$\varphi'(x)>\varphi'(1)=f'(1)-1=0$；

当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)<\varphi'(1)=0$.

则 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值. 当 $x\in(1-\delta,1)\cup(1,1+\delta)$ 时，$\varphi(x)<\varphi(1)=f(1)-1=0$，即 $f(x)<x$. 故应选[A].

6. [D]

因为$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)x^{n+1}+R_{n+1}(x)$

$$=f(0)+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)x^{n+1}+R_{n+1}(x),$$

（由题设$f'(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=0$）

所以当$|x|$很小时,$f(x)-f(0)$与$\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)x^{n+1}$同号. 而$f^{(n+1)}(0)>0$,当$n$为偶数时,$\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)x^{n+1}$在$x=0$点两侧异号,$f(0)$不是极值点;当$n$为奇数时,在$x=0$两侧均有$\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)x^{n+1}>0$,即$f(x)>f(0)$,亦即$x=0$为$f(x)$的极小值点. 因此选[D].

7. [B]

设$f(x)=x^5+2ax^3+3bx+4c$,则

$$f'(x)=5x^4+6ax^2+3b=5(x^2)^2+6a(x^2)+3b.$$

由于$(6a)^2-4\cdot5\cdot3b=12(3a^2-5b)<0$,所以$f'(x)=0$无实根.

又$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f'(x)=+\infty$,于是$f'(x)>0$.

根据连续函数的介值定理及$f(x)$的严格单调增加性质,知$f(x)$有唯一零点,即方程$f(x)=0$有唯一实根.　应选[B].

8. [A]

为方便记$y=y(x)$. 由$y'=y^2$,逐次求导得$y''=2yy'=2y^3$,$y'''=3!y^2y'=3!y^4$,$\cdots$,归纳可证$y^{(n)}=n!y^{n+1}$. 应选[A].

9. [D]

利用极限的同号性可以判定$f(x)$的正负号:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2>0\Rightarrow\frac{f(x)}{1-\cos x}>0\text{（在 }x=0\text{ 的某空心邻域）},$$

由$1-\cos x>0$,有$f(x)>0$,即$f(x)$在$x=0$取极小值. 应选[D].

10. [D]

函数微分的函数增量的线性主部. 所以本题就是已知微分值、自变量x的增量,反过来求函数的导数值$f'(1)$.

因为$\mathrm{d}y=f'(x^2)\mathrm{d}x^2=2xf'(x^2)\mathrm{d}x$,所以得$0.1=-2f'(1)(-0.1)$,即$f'(1)=0.5$,故[D]是正确的.

11. [B]

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f'(x+a)-f'(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}f''(\xi)a(x<\xi<x+a)$.

因$\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=0$,故$\lim\limits_{x\to+\infty}f''(\xi)=\lim\limits_{\xi\to+\infty}f''(\xi)=0$,即$\lim\limits_{x\to+\infty}[f'(x+a)-f'(x)]=0$.

应选[B].

12. [C]

由$\lim\limits_{t\to a}[f(t)-f(x)]=f(a)-f(x)>0$,知必$\exists\delta>0$,使$x\in(a-\delta,a+\delta)$时,$f(t)-f(x)>0$,即$\frac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}>0$,从而$\lim\limits_{t\to a}\frac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\geqslant0$. 应选[C].

13. [C]

实质是$f''(x_0)$取值的正负情况,代入微分方程即得.

将$f(x)$代入方程有$f''(x)+f'(x)-e^{\sin x}=0$.

将$x=x_0$代入上式,有

$$f''(x_0)=e^{\sin x_0}-f'(x_0)=e^{\sin x_0}>0,$$

所以$f(x)$在$x=x_0$处取极小值,故[C]入选.

14. [B]

因为函数$f(x)$在点$x=a$处可导,故$f(x)$必在点$x=a$处连续.由此可知,若$f(a)\neq 0$,则存在点$x=a$的一个邻域,使$f(x)$在该邻域内与$f(a)$同号,从而在该领域内$|f(x)|$或恒等于$f(x)$或恒等于$-f(x)$,即$|f(x)|$在点$x=a$处必可导.可见[C],[D]不正确.

为了判定选项[A]还是选项[B]正确,可采用举例法:

设$f(x)=x^2,a=0,f(x)$满足$f(0)=f'(0)=0$,但是$|f(x)|=f(x)=x^2$在点$x=0$处可导,可见[A]不正确.从而应选[B].

15. [D]

通过变量代换$t=x+1$或按定义由关系式$f(x+1)=af(1)$将$f(x)$在$x=1$的可导性与$f(x)$在$x=0$的可导性联系起来.

令$t=x+1$,则$f(t)=af(t-1)$.由复合函数可导性及求导法则知,$f(t)$在$t=1$处可导且

$$f'(t)\Big|_{t=1}=af'(t-1)(t-1)'\Big|_{t=1}=af'(0)=ab.$$

因此,应选[D].

或按定义考查

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{af(x)-af(0)}{x}=af'(0)=ab.$$

16. [C]

[解法一]　由$f(-x)=f(x)(-\infty<x<+\infty)$知,$f(x)$的图形关于$y$轴对称.由在$(-\infty,0)$内$f'(x)>0$且$f''(x)<0$知,$f(x)$的图形在$(-\infty,0)$内单调上升,且是凸的;由对称性知,在$(0,+\infty)$内,$f(x)$的图形单调下降,且是凸的,所以应选[C].

[解法二]　由$f(-x)=f(x)$可知

$$-f'(-x)=f'(x),f''(-x)=f''(x).$$

当$x\in(0,+\infty)$时,$-x\in(-\infty,0)$,此时由题设知$f'(-x)<0,f''(-x)$.故$f'(x)<0,f''(x)<0,x\in(0,+\infty)$.应选[C].

[解法三]　排除法.例如取$f(x)=-x^2$,易验证$f(x)$符合原题条件,计算可知(A)、(B)、(D)三个选项均不正确,故应选[C].

[解法四]　由题设可知$f(x)$是一个二阶可导的偶函数,从而$f'(x)$为奇函数,$f''(x)$为偶函数.因在$(-\infty,0)$内$f'(x)>0,f''(x)<0$,故在$(0,+\infty)$内$f'(x)<0$,$f''(x)<0$,即应选[C].

17. [B]

由于$f(x)$在(a,b)内可导,$\xi\in(a,b)$则$f(x)$在ξ点可导,因而在ξ点连续,故$\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$.所以应选[B].

注意本题也可用排除法求解.例如:由函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, a\leqslant x<b,\\ 1, x=b\end{cases}$$

可知结论[A]不正确,由函数

$$f(x)=\begin{cases}x, a\leqslant x<b,\\ a, x=b\end{cases}$$

可知结论[C]和[D]都不正确.

18. [C]

$f(x)$ 是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数,在$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$内有表达式

$$f(x)=\begin{cases}x-x^2, 0\leqslant x<\frac{1}{2},\\ x^2-x, -\frac{1}{2}<x<0,\end{cases}$$

于是 $f'(x)=\begin{cases}1-2x>0, 0<x<\frac{1}{2},\\ 2x-1<0, -\frac{1}{2}<x<0,\end{cases}$ $f''(x)=\begin{cases}-2<0, 0<x<\frac{1}{2},\\ 2>0, -\frac{1}{2}<x<0,\end{cases}$

即 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点,$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点. 故应选[C].

19. [C]

设 $f(x)=2-x^2, a=-1, b=1$,则 $f'(x)=-2x$ 在$[a,b]=[-1,1]$上连续,且 $f'(a)=f'(-1)=2>0, f'(b)=f'(1)=-2<0$. 但在$[a,b]=[-1,1]$上 $f(x)\geqslant 1$,即任何点 $x_0\in(a,b)=(-1,1)$ 都使 $f(x_0)\neq 0$. 这表明结论[D]是错误的,故应选[C].

由极限的保号性质及导数的定义知,从

$$f'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$$

可得,存在 $x_0\in(a,b)$,使得$\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}>0$ 即 $f(x_0)>f(a)$,这表明结论[A]正确,类似可证结论[B]正确. 由闭区间上连续函数的介值定理可知结论[C]正确.

20. [D]

由题设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内可导,且 $f(x)=f(x+4)$,两边对 x 求导,得 $f'(x)=f'(x+4)$,故 $f'(5)=f'(1)$.

由于$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\frac{1}{2}f'(1)=-2$,故 $y=f(x)$ 在点$(5,f(5))$处的切线斜率为 $f'(5)=-2$. 所以应选[D].

21. [C]

由于当 $x\to 0$ 时 $\sin\frac{1}{x^2}$ 为有界变量,$\sqrt{|x|}$ 为无穷小量,故

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2}=0,\text{且} f(0)=0.$$

于是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 从而[A],[B]不正确.

又因为$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\sin\frac{1}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x^2}$ 不存在,即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导,所以应

选[C].

22. [C]

由$f(x)$在(a,b)内可导知,$f(x)$在$[x_1,x_2]$上连续,在(x_1,x_2)内可导,由拉格朗日中值定理知,存在一点ξ,使

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),x_1<\xi<x_2,$$

所以应选[C].因为由$f(x)$在(a,b)内可导知,$f(x)$在$[a,b]$,$[x_1,b]$,$[a,x_2]$上连续,从而$f(x)$在$[a,b]$,$[x_1,b]$,$[a,x_2]$上未必满足拉格朗日中值定理条件,即[A]、[B]、[D]均不正确.故应选[C].

23. [B]

由于函数可导(除$x=0$)且取得两个极值,故函数有两个驻点,即导函数图形与x轴有且仅有两个交点.故[A]、[C]不正确.又由函数图形知,极大值点应小于极小值点,故[D]不正确.

24. [A]

因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)+f(x)}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)+f(x)}{x}=1$,所以

$$\lim_{x\to0}[f'(x)+f(x)]=f'(0)+f(0)=0.$$

由$f(0)=0$知$f'(0)=0$,

又$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f'(x)+f'(0)}{x}+\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right]=1$,所以$f''(0)+f'(0)=1$,$f''(0)=1>0$.

故$f(x)$在$x=0$处取极小值.应选[A].

25. [B]

由导数与微分的关系$\dfrac{dy}{dx}=f'(x_0)=\dfrac{1}{2}\to\dfrac{1}{2}$(当$\Delta x=dx\to0$),$dy$是与$\Delta x$同阶且不等价的无穷小.应选[B].

26. [C]

因为导函数有三个零点,所以由罗尔定理和$f'(x)$的图形知有且仅有两点$\xi_1\neq\xi_2$,使$f''(\xi_1)=f''(\xi_2)=0$,且在ξ_1的左边近旁$f'(x)$单调增加,所以$f''(x)>0$;在ξ_1的右边近旁$f'(x)$单调减小,故$f''(x)<0$.因此$(\xi_1,f(\xi_1))$为曲线的一个拐点.同理,$(\xi_2,f(\xi_2))$是曲线的另一个拐点.应选[C].

27. [A]

导函数图形与x轴有三个交点,故有三个驻点.由第一充分条件知函数在三个驻点处从左至右依次取极大、极小、极大值.

由于$f''(x)$有一个零点和一个不存在的点($x=0$),根据已知图形中$f'(x)$的单调性知在这两个点的左、右$f''(x)$异号,而$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,所以函数图形有两个拐点.应选[A].

28. [C]

① 当$x\in(-\infty,+\infty)$时均有$f(x)<g(x)$,所以$f(-x)<g(-x)$成立,排除[A].

② 取$f(x)=0$,$g(x)=2$,显然它们满足题设条件,但$f'(x)=g'(x)=0$.排除[B].

③$f(x)$及$g(x)$同②,但$\int_0^{-1}f(x)dx=-1$,$\int_0^{-1}g(x)dx=-2<-1$,排除[D].应选[C].

29. [A]