全国各类成人高考
专科起点升本科

高教最新版

KAOSHI

高等数学(二) 应试模拟

本书编写组

高等教育出版社
HIGHER
EDUCATION
PRESS

全国各类成人高考专科起点升本科

高等数学(二)应试模拟

本书编写组

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

全国各类成人高考（专科起点升本科）高等数学（二）应试模拟 / 《全国各类成人高考（专科起点升本科）高等数学（2）应试模拟》编写组编. —北京：高等教育出版社，2002.8
ISBN 7－04－011295－7

Ⅰ.全...　Ⅱ.全...　Ⅲ.高等数学—成人教育：高等教育－入学考试—试题　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 042778 号

全国各类成人高考专科起点升本科
高等数学(二)应试模拟
本书编写组

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100009	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010－64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	国防工业出版社印刷厂		
开　　本	850×1168　1/16	**版　　次**	2002 年 8 月第 1 版
印　　张	7.25	**印　　次**	2002 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	170 000	**定　　价**	11.10 元

出版 前言

2002年，教育部高校学生司和教育部考试中心重新修订颁布了《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》，其中专科起点升本科的复习考试大纲将全国统考科目调整为政治、英语、教育理论、大学语文、艺术概论、民法、高等数学(一)、高等数学(二)、生态学基础、医学综合等十科。

为了满足广大考生复习备考的需求，我们组织长期从事成人高考复习辅导的专家、教授，前大纲编写修订和考试命题研究人员，编写了上述十门课程的复习考试辅导教材。

本套书是与辅导教材配套的复习备考强化冲刺阶段用书。书中的模拟试卷严格按照考试大纲中规定的试卷内容比例、试卷题型比例、试卷难易比例编制，按考试科目独立编写成册，每册包含10套左右试卷，同时根据不同科目的特点，编写了"解题指导"等内容。

本套书的作者为"专升本"复习辅导教材的原班人马，对成人高考的教学与辅导均有深入研究，对成人高考的命题思路也多有了解。相信本套书的问世，将会对各类成人高考"专升本"考生检验自己的复习效果，进行考前"实战演练"提供更多帮助。

高等教育出版社

2002.6.26

目录

模拟试卷(一)

一、选择题:本大题共 5 个小题,每小题 4 分,共 20 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.把所选项前的字母填在题后的括号内.

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2(x-1)}{x-1} & x<1\\ 2 & x=1\\ x^2-1 & x>1,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 等于

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 不存在　　(　　)

2. 设函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y'=f'(x)$ 的图像如图 1-1 所示,则下列结论肯定正确的是

A. $x=-1$ 是驻点,但不是极值点

B. $x=-1$ 不是驻点

C. $x=-1$ 为极小值点

D. $x=-1$ 为极大值点　　(　　)

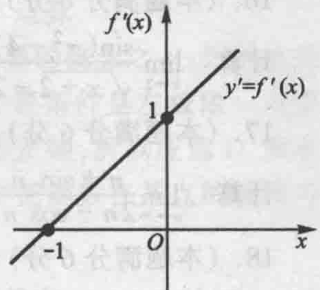

图 1-1

3. 设函数 $f(x)=\sin(x^2)+(\sin x)^2$,则 $f'(x)$ 等于

A. $\cos(x^2)+2\sin x$　　B. $2x\cos x^2+2\sin x\cos x$

C. $-2x\cos x^2-2\sin x\cos x$　D. $2x\cos x^2+2\cos x$.　　(　　)

4. 设 $f(x)$ 为连续函数,则 $\int_0^1 f'\left(\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$ 等于

A. $f(1)-f(0)$　　B. $2[f(1)-f(0)]$

C. $2[f(2)-f(0)]$　　D. $2\left[f\left(\dfrac{1}{2}\right)-f(0)\right]$　　(　　)

5. 设 $z=\ln(\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y})$,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 等于

A. $\dfrac{1}{n}$　　B. $\dfrac{2}{n}$　　C. 1　　D. 2　　(　　)

二、填空题:本大题共 10 个小题,共 10 个空,每空 4 分,共 40 分.把答案填在题中横线上.

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin(2\cos x)}{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}=$ ________.

7. 设 $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$,则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2-h)-f(2)}{h}=$ ________.

8. 设函数 $y=\dfrac{2}{\sqrt{-x}}+2\cdot 3^{\frac{x}{2}}+\ln 2$,则 $y'=$ ________.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\mathrm{d}\,\mathrm{e}^t}{x}=$ ________.

10．函数 $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$，则 $y'\Big|_{x=\sqrt{\frac{1}{2}}}=$ ________.

11．设函数 $f(x)=\ln x$，则 $\dfrac{\mathrm{d}f(\sin x)}{\mathrm{d}f(x)}=$ ________.

12．已知广义积分 $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln^k x}$ 是收敛的，则 k 的取值范围是________.

13．设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-\arcsin x}$，则 $\int\cos x f'(\sin x)\mathrm{d}x=$ ________.

14．设函数 $z=\operatorname{arccot}\sqrt{\dfrac{y}{x}}$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________.

15．交换二次积分次序：$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{2x-1}^{\mathrm{e}^x}f(x,y)\mathrm{d}y=$ ________.

三、解答题：本大题共 13 个小题，共 90 分.

16．(本题满分 6 分)

计算 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x^2-4)}{\sqrt{x+2}-2}$.

17．(本题满分 6 分)

计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\sin n}{2n-\cos n}$.

18．(本题满分 6 分)

计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{1}{x}\cdot\ln(1+x)$.

19．(本题满分 6 分)

设函数 $y=\dfrac{2^{\arctan x}}{\sin x}$，求 y'.

20．(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 的二阶导数存在，求 $y=f(\ln x)$ 的二阶导数.

21．(本题满分 6 分)

计算 $\int\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

22．(本题满分 6 分)

计算 $\int x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

23．(本题满分 6 分)

计算 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{4+x^4}\mathrm{d}x$.

24．(本题满分 6 分)

设 $y=y(x)$ 由方程 $x^3+\sin y-x^2\mathrm{e}^y=0$ 确定，求 $\mathrm{d}y$.

25．(本题满分 6 分)

设 $z=f(\cot x,\mathrm{e}^{-xy})$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

26.（本题满分 10 分）

求 $y=x^2e^{-x}$ 的极值及凹凸区间和拐点.

27.（本题满分 10 分）

计算 $\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为曲线 $y=x^2$，及直线 $x\geqslant0,y=1$ 围成的平面区域.

28.（本题满分 10 分）

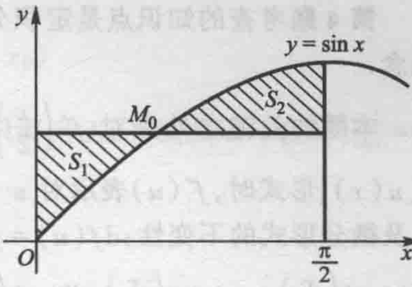

图 1－2

在曲线 $y=\sin x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$上求一点 M_0，使得图 1－2 中阴影部分的面积 S_1 与 S_2 之和 $S=S_1+S_2$ 为最小.

模拟试卷(一)解题指导与分析

一、选择题：主要是考查高等数学中的基本概念、基础知识以及基本运算.

第 1 题主要是考查极限概念(由于极限概念是高等数学中的十分重要的概念之一，因此也是重要的考点之一，这点还希望读者引起足够的注意). 极限存在的充分必要条件是左极限＝右极限，所以只要分别计算 $x\to1$ 时的左、右极限，立即可知选项 A,B,C 都不正确，所以应选 D. 读者需要注意的是：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 与 $f(x_0)$存在与否是没有关系的. 千万不要把函数在某点的极限与函数在该点的连续混为一谈.

第 2 题主要是考查极值的充分条件及驻点的概念. 由于 $f'(x)$的图像在 $x=-1$ 时 $f'(-1)=0$，所以 $x=-1$ 为驻点，排除 B. 而当 $x<-1$ 时 $f'(x)<0$；$x>-1$ 时 $f'(x)>0$. 根据导数符号由负变正，可知 $x=-1$ 为函数的极小值点. 所以选 C.

本题也可以由 $y'(x)$的图像而得 $y'=x+1$，则原函数为 $y=\frac{x^2}{2}+x+C$. 从而很容易得知选项 C 是正确的.

对于这种由导数函数的图像来分析和研究函数特性的方法建议读者多做练习，熟练掌握. 如果本题换一种提法则可以得到另外两个选择题.

(i) 设函数 $y=f(x)$的导函数 $y'=f'(x)$的图像如图 1－1 所示，则函数 $y=f(x)$的单调递增区间为

A. $(-\infty,1)$　　B. $(-\infty,+\infty)$　　C. $(-1,+\infty)$　　D. $(0,+\infty)$　　(C)

(ii) 设函数 $y=f(x)$的导函数 $y'=f'(x)$的图像如图 1－1 所示，则下列结论肯定正确的是

A. 在$(-\infty,-1)$内，曲线 $y=f(x)$是凸的

B. 在$(-\infty,+\infty)$内，曲线 $y=f(x)$是凹的

C. 在$(-\infty,+\infty)$内，曲线 $y=f(x)$是凸的

D. 在$(-\infty,+\infty)$内，曲线 $y=f(x)$是直线　　(B)

由于 $y'=x+1$，则有 $y''=1>0$，从而可以判定曲线 $y=f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内是凹的，所以选 B.

第 3 题主要考查求复合函数的导数.

求复合函数导数的关键是其复合过程. 弄清楚 $f(x)$中的每一项是由哪些基本初等函数复

合而成的，就可以知道选项 B 是正确的.

第 4 题考查的知识点是定积分中的积分变量的概念和换元积分的计算方法及函数微分的概念.

本题的关键之处是对 $f'\left(\frac{x}{2}\right)$ 的正确理解，函数 $f(x)$ 对 x 求导时为 $f'(x)$，而当函数为 $f[u(x)]$ 形式时，$f'(u)$ 表示对 u 的导数而不是对 x 的导数，而根据微分式 $\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$ 以及微分形式的不变性：$\mathrm{d}f(u)=f'(u)\mathrm{d}u$，其中 u 可以是自变量 x，也可以是 x 的函数 $u(x)$. 所以 $f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\neq \mathrm{d}f\left(\frac{x}{2}\right)$，将 $f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$ 写成 $\mathrm{d}f\left(\frac{x}{2}\right)$ 是最常见的错误. 根据前面的分析，有 $f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}\,\frac{x}{2}=\mathrm{d}f'\left(\frac{x}{2}\right)$，原式亦为 $\int_0^1 f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2\int_0^1 f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}\,\frac{x}{2}=2\int_0^1\mathrm{d}f\left(\frac{x}{2}\right)=2f\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1=2\left[f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)\right]$. 所以选 D.

如果用换元法，令 $\frac{x}{2}=t$，则 $f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2f'(t)\mathrm{d}t=2\mathrm{d}f(t)$，注意到积分的上、下限应跟着一起换，则有

$$\int_0^1 f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{1}{2}}f'(t)\mathrm{d}t=2f(t)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=2\left[f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)\right].$$

所以选 D.

请读者注意：由于这种题型考查的都是基本概念和基本方法，所以是历年“专升本”考试中常见的典型题型. 熟练地掌握这类题型的解法是十分重要的.

第 5 题考查的知识点是偏导数的概念及计算.

本题常犯的错误是：

$$z=\ln(\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y})=\ln\sqrt[n]{x}+\ln\sqrt[n]{y}=\frac{1}{n}\ln x+\frac{1}{n}\ln y,$$

最终导致 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{2}{n}$. 本题应选 A.

二、填空题：主要考查的知识点是基本概念、基本运算及基本方法.

第 6 题考查的知识点是“$\frac{0}{0}$”型不定式极限的求法.

“$\frac{0}{0}$”型不定式极限的首选解法是等价无穷小代换，然后再用洛必达法则或其他方法(如重要极限等)求解.

由于当 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时 $\cos x\to 0$，所以 $\sin(2\cos x)\sim 2\cos x$，则 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2\cos x)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2\sin x}{1}=-2$. 本题也可以直接用洛必达法则求解.

第 7 题考查的知识点是导数概念、复合函数导数的求法及函数在某点导数值的求法.

本题的关键之处是函数在某点的导数定义，由于导数的定义是高等数学中最基本、最重要的概念之一，所以也是历年试题中的重点之一，正确掌握导数定义的结构式是非常必要的，函数 y

$=f(x)$在点 x_0 处导数定义的结构式为

$$\lim_{\square\to 0}\frac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}=f'(x_0)$$

式中的"□"可以是 Δx(或 h),也可以是 Δx(或 h)的函数式,只要当 $\Delta x\to 0$(或 $h\to 0$)时,$\square\to 0$,上式恒为 $f'(x_0)$

例如:$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}=f'(x_0)$,

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+3\sin h)-f(2)}{3\sin h}=f'(2)$,

所以只要类似于导数在某点的定义的结构式,一定优先考虑化成导数的结构式,再进行求解,本题亦为

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}(-1)=-f'(2),$$

再计算 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$,所以 $-f'(2)=\dfrac{-1}{4}e^{-\frac{1}{2}}$.

如果直接将 $2-h$ 代入 $f(x)$ 得 $f(2-h)=e^{-\frac{1}{2-h}}$,代入极限式再用洛必达法则求其极限也可得到同一结果.

这里最容易犯的错误是将$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2-h)-f(2)}{h}$写成$f'(2)$.其错误的原因是对导数定义的结构式理解错误.

第 8 题考查的知识点是导数四则运算法则及复合函数的求导方法.

本题最容易出错的是未将$\sqrt{-x}$看成是$\sqrt{u}$和 $u=-x$ 的复合函数,另一个常见的错误是 $(\ln 2)'=\dfrac{1}{2}$.

第 9 题考查的知识点是定积分的性质以及变上限定积分的求导法.

由于被积表达式是微分的形式,所以利用定积分的性质可得

$$\int_0^{\sin x}\mathrm{d}\,e^t=e^t\Big|_0^{\sin x}=e^{\sin x}-1,$$

再利用等价无穷小代换:$e^{\sin x}-1=e^x-1=x\,(x\to 0)$,

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\mathrm{d}\,e^t}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$

本题最容易犯的错误是:直接利用变上限的求导公式得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\mathrm{d}\,e^t}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\cdot\cos x}{1}=1.$$

答案虽然正确(这是偶然的巧合),但是方法是错的.一般情况下 $\left[\int_a^{u(x)}\mathrm{d}f(t)\right]'=\left[\int_a^{u(x)}f'(t)\mathrm{d}t\right]'=f'[u(x)]\cdot u'(x)$,

而 $$\left[\int_a^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]' = f[u(x)]\cdot u'(x) \neq f'[u(x)]\cdot u'(x),$$

所以只有当 $f'(t)=f(t)$ 时，其错误的解法才会得到正确的答案. 本题正好是一个特例，因为 $(\mathrm{e}^t)'=\mathrm{e}^t$.

第 11 题考查的知识点是复合函数微分的概念及其计算方法.

本题的关键是正确理解 $\dfrac{\mathrm{d}f(\sin x)}{\mathrm{d}f(x)}$ 的含义是两个函数微分的商，因此正确地求出 $f(\sin x)$ 与 $f(x)$ 的微分表达式是至关重要的. 由于 $f(\sin x)=\ln\sin x$，所以 $\mathrm{d}f(\sin x)=\mathrm{d}(\ln\sin x)=\dfrac{1}{\sin x}\cdot\cos x\mathrm{d}x$，而分母 $\mathrm{d}f(x)=\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$，代入式中亦可得到正确的结果.

本题的另一个思路是将所给的表达式写成两个函数导数之比，即

$$\frac{\mathrm{d}f(\sin x)}{\mathrm{d}(\ln x)} = \frac{\mathrm{d}f(\sin x)}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}(\ln x)}{\mathrm{d}x}} = \frac{[f(\sin x)]'_x}{(\ln x)'_x}.$$

第 12 题考查的知识点是广义积分收敛的概念.

先计算广义积分，再由其收敛的概念来确定式中 k 的取值范围，由于

$$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^k x} = \lim_{b\to+\infty}\int_{\mathrm{e}}^{b}\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{(\ln x)^k} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-k}(\ln x)^{1-k}\Big|_{\mathrm{e}}^{b}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-k}[(\ln b)^{1-k}-1].$$

要使其积分存在只有当 $1-k<0$ 即 $k>1$.

第 13 题考查的知识点是导数 $f'(\sin x)$ 的意义及微分概念与不定积分的性质.

本题中的 $f'(\sin x)$ 是表示 $\dfrac{\mathrm{d}f(\sin x)}{\mathrm{d}\sin x}$，所以 $f'(\sin x)\mathrm{d}x\neq\mathrm{d}f(\sin x)$，

只有 $$f'(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)=\mathrm{d}f(\sin x).$$

注意到 $$\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin x),$$ 则有

$$\int\cos x f'(\sin x)\mathrm{d}x = \int f'(\sin x)\mathrm{d}(\sin x) = \int\mathrm{d}f(\sin x) = f(\sin x)+C.$$

读者最后需要注意的是

$$f(\sin x)=\mathrm{e}^{-\arcsin(\sin x)}=\mathrm{e}^{-x}.$$

第 14 题考查的知识点是二阶混合偏导数的计算.

首先求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，然后进行化简，再求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{1}{1+\dfrac{y}{x}}\cdot\sqrt{y}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}(x+y)}$

因此 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{y}}{x+y}\right)'_y = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\left[\frac{1}{x+y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{(x+y)^2}\right]$$

$$=\frac{x-y}{4\sqrt{xy}(x+y)^2}.$$

第 15 题考查的知识点是由二次积分画出二重积分区区域 D，再由积分区域 D 写出交换积

分次序后的二次定积分.

交换二次积分次序的题目一定要根据已知条件画出二重积分的积分区域 D,本题相应的二重积分区域 D 是由曲线 $y=e^x$,直线 $y=2x-1$,$x=0$,$x=1$ 围成的(如图 1-3).先对 x 积分,利用定积分的可加性得到

$$\int_{-1}^{1}dy\int_{0}^{\frac{y+1}{2}}f(x,y)dx+\int_{1}^{e}dy\int_{\ln y}^{1}f(x,y)dx$$

请读者注意的是:先对 x 积分时,其第二个积分的下限应由 $y=e^x$ 解出 $x=\ln y$,这一点很容易被疏忽而导致错误.

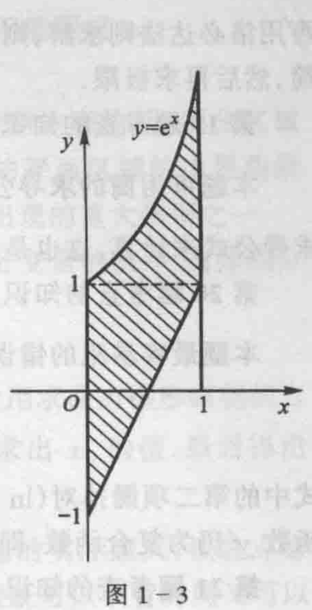

图 1-3

三、解答题:主要是考查学生的基本运算方法及运算能力.即考查的是高等数学中的三大运算(极限运算、微分运算与积分运算)以及学生运用这些运算解题的能力和水平.

第 16 题考查的知识点是"$\frac{0}{0}$"型不定式极限的求法.

求"$\frac{0}{0}$"型不定式极限的方法很多,我们建议读者要熟练掌握的首选方法是等价无穷小量代换.但一定要注意:等价无穷小量代换能在乘除法中使用,由于知识面的限制,希望读者千万不要在加减法中使用等价无穷小量代换.然后再用洛必达法则及其他方法求解.如果极限式中含有根式,通常都乘以共轭根式进行化简.

第 17 题考查的是离散型的"$\frac{\infty}{\infty}$"型不定式极限的求法.

由于极限式中的分子、分母都不是连续函数,所以不能用洛必达法则求解,而应该用消去无穷大因子的方法并利用有界函数($|\sin n|\leqslant 1$,$|\cos n|\leqslant 1$)与无穷小量 $\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$ 的乘积为无穷小量的性质即可得到正确的答案.

读者一定要注意:如果将题目换成 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{2x-\cos x}$,也不能用洛必达法则求解.这是因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 都不存在,不满足洛必达法则的条件.

第 18 题考查的知识点是怎样将"$0\cdot\infty$"型的不定式极限化为"$\frac{0}{0}$"或"$\frac{\infty}{\infty}$"型不定式再求极限的方法.

本题的关键是将"$0\cdot\infty$"型化为"$\frac{0}{0}$"型或"$\frac{\infty}{\infty}$"型.这也是读者需要认真思考的地方.

读者如果注意到:当 $x\to+\infty$ 时,$\sin\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}$,

则有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}$,即原式化为"$\frac{\infty}{\infty}$"型不定式,再用洛必达法则求解,如果直接将原式写成"$\frac{\infty}{\infty}$"型为:

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{\dfrac{1}{\sin\frac{1}{x}}},$$

再用洛必达法则求解，则比较复杂，所以在极限运算中尽可能地先用等价无穷小量代换进行化简，然后再求极限.

第 19 题考查的知识点是商的导数计算及复合函数的导数的求法.

本题可用商的求导公式直接进行计算，如果注意到$\frac{u}{v}=u\cdot v^{-1}$，则商的求导计算亦可用积的求导公式来计算，这也是常用的一种方法.

第 20 题考查的知识点是复合函数的二阶导数计算.

本题最容易犯的错误是：对 $y'=\frac{1}{x}\cdot f'(\ln x)$求二阶导数 y''时，很容易漏项而写成

$$y''=-\frac{1}{x^2}f'(\ln x)+\frac{1}{x}f''(\ln x),$$

式中的第二项漏掉对$(\ln x)$求导，读者一定要注意：导数函数 $f'(\ln x)$中的变量仍为 $\ln x$，即导函数 y'仍为复合函数. 即 $f'(u)$，而 $u=\ln x$.

第 21 题考查的知识点是不定积分中的换元积分法或用凑微分法计算不定积分的方法.

如果注意到 $e^{2x}=e^x\cdot e^x$ 及 $e^x dx=d(e^x+1)$，利用这一特点很容易地联想起用凑微分法进行积分.

第 22 题考查的知识点是用分部积分法计算不定积分的方法.

由于被积函数是幂函数与三角函数的乘积，所以应先用倍角公式将 $\cos^2 x$ 降次，再用分部积分法求解.

第 23 题考查的知识点是广义积分的计算方法.

注意到 $x\,dx=\frac{1}{2}dx^2$，则将分母写成 x^2 的函数即 $4+x^4=4\left[1+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2\right]$，再用公式法积分之.

在本题的解答中最容易犯这样的错误：

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{4+x^4}dx=\frac{1}{4}\arctan\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{4}\arctan\frac{\infty^2}{2}-0$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}.$$

由于“$+\infty$”是一个记号，它不能参加运算，所以写成$\frac{1}{4}\arctan\frac{\infty^2}{2}$是错误的. 应该直接写成$\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}$.

第 24 题主要考查的知识点是隐函数的求导方法及其计算.

隐函数求导的常用方法是直接求导法或公式法. 用直接求导法时一定要注意：此时式中的 y 应看成是 x 的函数. 即$(\sin y)'_x=\cos y\cdot y'$，$(e^y)'_x=e^y\cdot y'$.

隐函数求导的另一种方法是“微分法”. 即对等式两边求微分，最后解出 dy 即可，这种方法还是比较简捷的！

第 26 题考查的知识点是函数极值的求法，函数曲线凹凸区间的求法及拐点的求法.

本题的关键之处是 y'和 y''一定要计算正确，否则所有的结论全错！

另外提醒读者注意的是：在求出驻点和可能的拐点的坐标后，最好用列表法来进行分析，最后根据表中的分析写出需要回答的内容，列表法简捷、明了且不易混淆所需回答的内容. 再有一

点需要注意,拐点是曲线上的点,所以拐点的坐标应写成$[x_0,f(x_0)]$,而不能写成 x_0.

第 27 题考查的知识点是二重积分的计算.

本题的关键是由已知条件画出二重积分的积分区域 D,这里需要特别注意的是:积分区域 D 应是封闭的平面区域,如果封闭的平面区域多于两个,则应检查围成的平面区域的边界曲线是否是题目条件中所给的几条曲线.将积分区域弄错是二重积分中经常出现的重大错误之一.

二重积分计算的难点是化为二次定积分,这里的关键是正确选择积分变量的次序.选择积分变量次序的原则是:使得先积分的原函数能比较容易地求得.

第 28 题考查的知识点是曲边梯形面积的求法及极值的求法.

本题的关键是设点 M_0 的横坐标为 x_0,则纵坐标为 $y_0=\sin x_0$,然后用求曲边梯形面积的方法分别求出 S_1 和 S_2 再利用 $S=S_1+S_2$ 取极小值时必有 $S'=0$,从而求出 x_0 的值.最后得出 M_0 的坐标.

这里特别需要提出的是:当求出 $S'=0$ 的驻点只有一个时,根据问题的实际意义,该驻点必为所求,即 $S(x_0)$取极小值,读者无需再验证 $S''(x_0)>0$(或<0).这样做既可以节省时间又可以避免不必要的计算错误!但是如果有两个以上的驻点,则必须验证 $S''(x_0)$与 $S''(x_1)$的值而决定取舍.

模拟试卷(一)参考答案

一、选择题:

1. D　　2. C　　3. B　　4. D　　5. A

二、填空题:

6. -2　　7. $-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}}$　　8. $(-x)^{-\frac{3}{2}}+3^{\frac{x}{2}}\ln 3$　　9. 1

10. $\sqrt{2}$　　11. $\frac{x\cos x}{\sin x}$　　12. $k>1$　　13. $e^{-x}+C$

14. $\frac{x-y}{4\sqrt{xy}(x+y)^2}$　　15. $\int_{-1}^{1}dy\int_{0}^{\frac{y+1}{2}}f(x,y)dx+\int_{1}^{e}dy\int_{\ln y}^{1}f(x,y)dx$

三、解答题:

16. **解法 1**　先用等价无穷小量代换,然后再求极限得

$$\lim_{x\to2}\frac{\sin(x^2-4)}{\sqrt{x+2}-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)}{(x+2)-4}$$
$$=\lim_{x\to2}(x+2)(\sqrt{x+2}+2)$$
$$=16.$$

解法 2　直接用洛必达法则求极限.

$$\lim_{x\to2}\frac{\sin(x^2-4)}{\sqrt{x+2}-2}=\lim_{x\to2}\frac{\cos(x^2-4)\cdot 2x}{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}$$
$$=16.$$

17. **解** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\sin n}{2n-\cos n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(1+\dfrac{\sin n}{n}\right)}{n\left(2-\dfrac{\cos n}{n}\right)}$

$$=\frac{1}{2}.$$

18. **解** 先用等价无穷小量代换,再用洛必达法则求极限得

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{1+x}}{1}$$

$$=0.$$

19. **解法 1** $y'=\dfrac{(2^{\arctan x})'\sin x-2^{\arctan x}\cdot(\sin x)'}{(\sin x)^2}$

$$=\frac{2^{\arctan x}\cdot\ln 2\cdot\dfrac{1}{1+x^2}\cdot\sin x-2^{\arctan x}\cos x}{\sin^2 x}.$$

解法 2 $y=\dfrac{2^{\arctan x}}{\sin x}=2^{\arctan x}\cdot(\sin x)^{-1}$

则 $y'=2^{\arctan x}\cdot\ln 2\cdot\dfrac{1}{1+x^2}(\sin x)^{-1}+2^{\arctan x}(-1)(\sin x)^{-2}\cdot\cos x.$

20. **解** $y'=f'(\ln x)\cdot(\ln x)'=\dfrac{1}{x}f'(\ln x)$

$$y''=-\frac{1}{x^2}f'(\ln x)+\frac{1}{x}f''(\ln x)\cdot(\ln x)'$$

$$=-\frac{1}{x^2}f'(\ln x)+\frac{1}{x^2}f''(\ln x).$$

21. **解法 1** 用凑微分法求不定积分得

$$\int\frac{e^{2x}}{1+e^x}dx=\int\frac{e^x}{1+e^x}de^x=\int\frac{1+e^x-1}{1+e^x}d(e^x+1)$$

$$=\int\left(1-\frac{1}{1+e^x}\right)d(e^x+1)$$

$$=e^x+1-\ln(e^x+1)+C.$$

解法 2 用换元积分法求不定积分得

设 $1+e^x=t$,则 $e^x dx=dt$,

所以

$$\int\frac{e^{2x}}{1+e^x}dx=\int\frac{t-1}{t}dt$$

$$=t-\ln t+C$$

$$=e^x+1-\ln(e^x+1)+C.$$

22. **解** $\displaystyle\int x\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int x(1+\cos 2x)dx$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}\int x \mathrm{d}\sin 2x$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{4}\int \sin 2x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C.$$

23. **解法 1** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{4+x^4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x^2}{4+(x^2)^2}$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\frac{x^2}{2}}{1+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\arctan \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

解法 2 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{4+x^4}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{x^4\left(\frac{4}{x^4}+1\right)} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3\left(\frac{4}{x^4}+1\right)}$

$$= -\int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{x}\mathrm{d}\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{2}{x^2}\right)^2} = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{2}{x^2}\right)^2}$$

$$= -\frac{1}{4}\arctan \frac{2}{x^2}\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(0-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

24. **解法 1** 等式两边对 x 求导得

$$3x^2 + \cos y \cdot y' - 2x\mathrm{e}^y - x^2\mathrm{e}^y \cdot y' = 0,$$

解得
$$y' = \frac{2x\mathrm{e}^y - 3x^2}{\cos y - x^2\mathrm{e}^y},$$

所以
$$\mathrm{d}y = \frac{2x\mathrm{e}^y - 3x^2}{\cos y - x^2\mathrm{e}^y}\mathrm{d}x.$$

解法 2 对等式两边求微分得

$$3x^2\mathrm{d}x + \cos y\mathrm{d}y - 2x\mathrm{e}^y\mathrm{d}x - x^2\mathrm{e}^y\mathrm{d}y = 0,$$

$$(\cos y - x^2\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y = (2x\mathrm{e}^y - 3x^2)\mathrm{d}x,$$

所以
$$\mathrm{d}y = \frac{2x\mathrm{e}^y - 3x^2}{\cos y - x^2\mathrm{e}^y}\mathrm{d}x.$$

解法 3 用隐函数的求导公式.

设 $F(x,y) = x^3 + \sin y - x^2\mathrm{e}^y$,

则
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 2x\mathrm{e}^y,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \cos y - x^2 e^y,$$

所以
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{3x^2 - 2xe^y}{\cos y - x^2 e^y},$$

则
$$dy = \frac{2xe^y - 3x^2}{\cos y - x^2 e^y} dx.$$

25. **解** 设 $u = \cot x, v = e^{-xy}$,则 $z = f(u, v)$,

则
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot e^{-xy}(-y).$$

26. **解** (1) $y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2 - x)$,

$y'' = 2e^{-x} - 4xe^{-x} + x^2 e^{-x} = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$,

(2) 令 $y' = 0$,得 $x_1 = 0, x_2 = 2$.

令 $y'' = 0$,得 $x_3 = 2 - \sqrt{2}, x_4 = 2 + \sqrt{2}$.

(3) 列表如下:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2-\sqrt{2})$	$2-\sqrt{2}$	$(2-\sqrt{2}, 2)$	2	$(2, 2+\sqrt{2})$	$2+\sqrt{2}$	$(2+\sqrt{2}, +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

由表中 y' 和 y'' 在各个区间的符号则有:

函数 $y = x^2 e^{-x}$ 的极小值为 $y(0) = 0$,极大值为 $y(2) = 4e^{-2}$;

函数 $y = x^2 e^{-x}$ 的凹区间为 $(-\infty, 2-\sqrt{2})$ 与 $(2+\sqrt{2}, +\infty)$;

函数 $y = x^2 e^{-x}$ 的凸区间为 $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$;

函数 $y = x^2 e^{-x}$ 的拐点为 $(2-\sqrt{2}, (2-\sqrt{2})^2 e^{\sqrt{2}-2})$ 与 $(2+\sqrt{2}, (2+\sqrt{2})^2 e^{-(2+\sqrt{2})})$.

27. **解** 画出积分区域 D 如图 1-4 所示的阴影区域,则有

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy$$
$$= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3\right) \Big|_{x^2}^1 dx$$
$$= \int_0^1 \left[x^2 - x^4 + \frac{1}{3}(1 - x^6)\right] dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{7}x^7\right)\right]\Big|_0^1$$
$$= \frac{44}{105}.$$

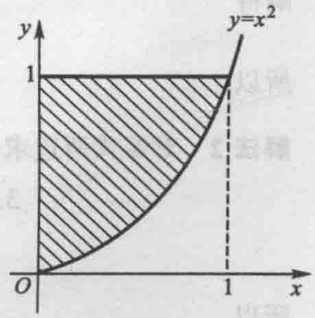

图 1-4

28. **解** 如图 1-5,设点 M_0 的横坐标为 x_0,