普通高等教育**创新型**规划教材

武兰河 主编

结构动力学

JIEGOU DONGLIXUE

人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co.,Ltd.

Jiegou Donglixue

结构动力学

主　编　武兰河

人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co.,Ltd.

内 容 提 要

本书系统地介绍了结构动力学的基本概念和基本方法,内容包括绪论、单自由度系统的振动、多自由度系统的振动、大型特征问题的实用近似计算方法、连续系统的振动、连续系统的离散化方法及近似解;本书强调结构动力学与静力学之间的差别和联系,内容通俗易懂、深入浅出,是高等工科学校土木工程、水利工程类专业学生学完结构力学课程后,为进一步拓宽和加深结构动力学知识而编写的教材。

本书可作为相关专业高年级本科生的教材和教学参考书,也可供相关专业研究生或有关工程技术人员和科学技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

结构动力学 / 武兰河主编. — 北京 : 人民交通出版社股份有限公司, 2016.4

ISBN 978-7-114-12991-9

Ⅰ. ①结… Ⅱ. ①武… Ⅲ. ①结构动力学 Ⅳ. ①O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 096791 号

书　　名:结构动力学
著 作 者:武兰河
责任编辑:王　霞　王景景
出版发行:人民交通出版社股份有限公司
地　　址:(100011)北京市朝阳区安定门外外馆斜街 3 号
网　　址:http://www.ccpress.com.cn
销售电话:(010)59757973
总 经 销:人民交通出版社股份有限公司发行部
经　　销:各地新华书店
印　　刷:北京盈盛恒通印刷有限公司
开　　本:787×1092　1/16
印　　张:14.75
字　　数:360 千
版　　次:2016 年 8 月　第 1 版
印　　次:2016 年 8 月　第 1 次印刷
书　　号:ISBN 978-7-114-12991-9
定　　价:38.00 元
(有印刷、装订质量问题的图书由本公司负责调换)

前言

结构动力学是一门工程背景很强的专业技术基础课程，它的主要研究内容是结构体系在受到各种形式的激励后所表现出的动力学行为，其根本目的是为保证和改善工程结构在服役期间所处的动力环境下的安全性和可靠性提供坚实的理论基础。由于课程内容的深度和难度，目前，这门课程在我国多数大学的相关本科专业都未独立开设，与之相关的内容仅在结构力学课程的某些章节当中有所提及，都是在研究生阶段才广泛开设这门课程。随着我国高等教育的发展和土木工程专业教学改革的需要，这门课程对本科学生的重要性越来越明显，一些学校的土木工程专业和水利工程专业开始对本科生独立开设结构动力学课程。然而，时至目前，在我国并没有一本深入浅出、通俗易懂、适合于本科生教学的结构动力学教材，多数结构动力学教材都是面向研究生的，其教学内容过于专业化，研究的色彩过浓，使很多基础相对缺乏的本科学生学习起来有较大的难度。本书正是出于这种考虑而编写的，其主要目的是为本科学生的结构动力学课程学习提供一个基础性的教学参考书，其教学内容不涉及非线性振动、随机性振动等专业性很强而又繁难的部分，主要偏重于结构动力学的基本概念、基本理论和基本方法。

本书共由六章组成。第 1 章重点介绍结构动力学计算的特点、振动问题的分类、振动问题的提法以及与力学计算有关的动力自由度概念、运动微分方程的建立方法等基本问题。第 2 章主要探讨单自由度结构的自由振动、受迫振动的机理，重点阐述结构振动系统的固有频率以及其在各种外部激励作用下的动力响应计算。首先详细介绍建立运动微分方程的几种方法及其适用对象，然后介绍系统的等效质量和等效刚度等概念，讨论它们对固有频率的影响，并分别在时间域和频率域中讨论结构系统在外部激励作用下的动力响应计算方法。第 3 章分析多自由度系统的自由振动和受迫振动，建立运动微分方程组之后，通过讨论其固有振动的频率和主振型等动力学固有特性，给出了求解多自由度系统的动力响应的直接解法和振型叠加法。第 4 章对实际工程中遇到的大型特征值问题介绍了一些实用的近似方法，以方便读者在处理具体工程问题时应用和参考。第 5 章对连续的无限自由度系统的振动给予了一定的阐述，对几种典型的连续系统如弦、杆、梁、薄膜、薄板等的振动问题给出了解析解，并讨论了其振动的机理和特征。第 6 章主要介绍连续系统的离散化方法和近似解，介绍了集中质量法、Dunkerly 法、Rayleigh 法、Ritz 法、加权残值法和动力有限元法的基本思想和具体实施方法，这些近似方法是解决实际工程问题必不可少且行之有效的方法。

作者从事结构动力学和振动力学课程的教学工作已有二十多年，深感这类课程对本科学生的重要性和学习难度，因此在编写本书的过程中，不追求高大上和高大全，比较注重结构动力学的基本概念和基本方法，强调结构动力学与静力学之间的差别和联系，突显这门课程的基

础性，将研究对象较多地集中到结构类振动系统上，力求对结构动力学的基本概念交代清楚，使学生能够以结构力学课程为基础，顺利地解决结构系统在承受动力荷载时的动位移、动内力计算等土木工程类专业学生较关心的问题，而对那些力学模型较复杂的机械振动系统则较少采用，只是在阐述有关振动理论时才偶有涉及。在建立系统运动微分方程的方法时，重点介绍以达朗伯原理为基础的刚度法和柔度法等力学概念较强、与结构力学联系较密切的方法，而对以分析力学为基础、对数学知识要求较高的 Lagrange 方程方法和以 Hamilton 原理为基础的变分法则只作简单介绍。另外，对阻尼这种动力系统中必不可少的因素也作了扼要介绍，不去深究阻尼的机理，只求满足工程应用，因为阻尼的机理本身就不是很清楚，多数情况下它们对工程应用的影响并不大，而严格地考虑阻尼只会给数学分析带来较大的困难。

本书是高等工科学校土木工程、水利工程类专业学生学完结构力学课程后，为进一步拓宽和加深结构动力学知识而编写的教材，其内容与结构力学的教学内容紧密相连，较全面、系统地介绍了结构动力分析的基本理论和基本方法，可作为相关专业高年级本科生的教材或教学参考书，也可供有关工程技术人员和科学技术人员参考。

本书在编写过程中参考和汲取了国内外有关结构动力学和振动力学方面的经典教材的相关内容，如 William T Thomson 的《Theory of Vibration with Applications》，盛宏玉的《结构动力学》，刘晶波的《结构动力学》，张子明的《结构动力学》，刘延柱的《振动力学》，倪振华的《振动力学》，谢官模的《振动力学》，张相庭的《结构振动力学》等，同时还得到了许多专家的支持和帮助，作者谨对他们一并表示衷心的感谢。由于作者水平所限，书中难免会有各种缺点、错误和不当之处，希望广大师生和同行专家不吝指正。

作　者

2016 年 4 月

目录

第1章 绪　论

作为本书的第一章,将简要阐述结构动力学分析的主要目的及基本内容,结构振动的基本特点、动力问题的提法、动力分析的力学模型和数学模型的建立方法,以便帮助读者打开结构动力学这个学科的大门。本章的主要内容有:结构动力学的任务和研究内容,结构的动力自由度及结构离散化方法,并简要介绍建立结构运动方程的几种常用方法。

1.1 结构动力学的任务和研究内容

1.1.1 结构动力学的任务

在自然界、工程技术和日常生活中,普遍存在着物体的往复运动或状态的循环变化现象,这类现象被称为振荡。如大海的波涛起伏、花朵的日开夜闭、心脏的跳动、钟摆的摆动、经济的发展和萧条等现象,都具有明显的振荡特性。振动是一种特殊的振荡,即平衡位置附近微小或有限的振荡。工程技术领域所涉及的机械和结构的振动常被称为机械振动,例如大型桥梁和高层建筑物在受到风荷载、冲击波、地震、波浪等作用时的振动,车辆运行中由于路面不平顺而引起的车辆振动及车辆引起的路面振动,飞行器在航行时受到气流作用而产生的振动,机床的刀具在行进过程中由于电机的质量偏心导致的振动等,都属于机械振动。

振动现象通常被认为是有害的。例如,振动会影响精密仪器设备的功能,降低构件的加工精度,加剧构件的疲劳,从而缩短机器和结构物的使用寿命。振动还可能引起结构物的大变形破坏,典型的案例是 1940 年美国华盛顿州 Tacoma 峡谷上一座跨度为 853m 的悬索桥因风载引起剧烈扭转振动而发生的坍塌事故。最近几十年,全球处于地震频发期,如 1960 年的智利地震,1976 年的中国唐山地震,1995 年的日本阪神地震,1999 年的中国台湾地震,2001 年的印度地震和 2008 年的中国汶川地震等,都对人民群众的生命财产和国家经济建设造成了巨大的

损失。即使不引起灾难性的破坏,但车辆和飞机等运载工具的振动会劣化乘载条件,电机的振动会影响电机运转的稳定性,导弹的振动会使得控制其飞行轨迹比较困难,房屋的大幅振动会影响居住的舒适性甚至房屋的破坏,强烈的振动噪声会形成严重的社会公害。

然而,振动也有其积极和可利用的一面,人们日常生活中的音乐就是利用了振动发声的基本原理,手机、电视等现代文明的通信基础也是电磁振荡。近年来工程技术领域出现了许多利用振动现象的生产装备和工艺,例如振动筛选、振动传输、振动抛光、振动沉桩等,这些工艺极大地改善了人们的劳动条件,提高了生产效率。可以预计,随着科学研究的深入和生产实践的普及,人们对振动机理的认识会越来越深化,对振动的利用会与日俱增。

结构动力学的主要任务就是研究工程结构在受到动力荷载作用下的运动规律,探讨振动现象的机理,以便充分利用结构振动的有利因素,设计出新颖合理的结构形式,减弱或者避免结构振动带来的不利影响,为工程结构的设计、保证结构的经济与安全提供科学的依据。

1.1.2 振动的分类及结构动力学的研究内容

结构振动问题所涉及的内容可用系统、激励和响应来描述。机械部件、工程结构等研究对象称为振动系统,构成振动系统的基本要素是惯性元件和弹性元件,即质量和弹簧。对实际工程问题而言,振动系统中还有阻尼元件。惯性元件存储的动能和弹性元件存储的势能在振动过程中相互转化,阻尼则消耗系统的能量。初始干扰、强迫力等外界对于系统的作用统称为激励。系统在激励作用下产生的运动称为系统的响应。系统、激励和响应之间的关系可用图 1-1来说明,结构动力学就是要探究这三者之间的关系。按照振动问题的这种提法,振动问题通常分为三大类:振动分析,即已知系统的特性和激励的大小,求系统的响应,为结构强度和刚度设计提供依据;系统识别,即已知激励和响应,求系统的物理特性参数,也称为系统设计;振动环境预测,即已知系统特性和响应,求输入的激励情况,判别系统的环境特性。

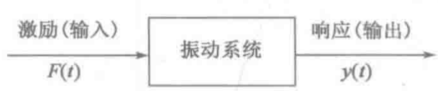


图 1-1 系统、激励与响应的关系

在这三类问题中,振动分析为正问题,相对来说较为容易;系统识别和振动环境预测则属于反问题,实际振动问题往往错综复杂,可能同时包含着分析、识别和设计等几个方面的问题。作为基础性的结构动力学,本书仅限于讨论振动分析问题。振动分析的主要工作就是求解一个已知物理参数的振动系统在已知激励作用下所产生的动力响应,包括此系统的位移、速度、加速度和结构内力等。同时,由于结构的动力响应与结构系统本身的物理参数之间有着密切的关系,因此,求解系统自身的振动特性也是结构动力学一个重要的研究内容。

振动分析问题根据研究的侧重点,可以从不同的角度进行分类。

按照振动系统的物理特点和基本假设,振动可以分为线性振动和非线性振动。所谓线性振动,是指结构振动的幅度不是很大时,系统的质量可以认为是不变的,系统的弹性力和阻尼力可以近似看作与运动参数(位移和速度)呈线性关系;在这种假设下,振动问题的数学描述为线性微分方程,正因为如此,才称其为线性振动。非线性振动是指那些数学模型为非线性微分方程的振动,它是由不能简化为线性系统的振动系统产生的振动。由于非线性微分方程的求解非常困难,所以本书只讨论线性振动问题。

如果按照激励的类型,振动可以分为以下几类:自由振动、受迫振动、自激振动和参数振

动。自由振动是指系统仅由初始激励激发的振动，在振动的过程中不再受任何激励。受迫振动是指系统在振动的过程中不断受到由外界控制的激励作用。自激振动是指系统在振动的过程中不断受到由自身控制的激励作用，如机械钟摆之所以持续下去，就是因为在特定的时刻受到了发条的冲击作用，这个冲击的时刻不是任意的，而是受系统自身控制。参数振动是指由系统自身参数的变化而激发的振动，例如人在荡秋千时一会儿蹲下去，一会儿站起来，由于摆长的变化使得振动幅度愈来愈大。

按照响应的情况，振动可以分为以下几类：简谐振动、周期振动、准周期振动、混沌振动和随机振动。简谐振动是指系统的响应为时间的简谐函数（正弦或余弦）。周期振动是指系统的响应为时间的周期函数，可用谱分析法将其展开为一系列周期可通约的简谐振动的叠加。准周期振动是指系统的响应为一系列周期不可通约的简谐振动的叠加。混沌振动是指系统的响应为时间的始终有界非周期函数。随机振动是指系统的响应为时间的随机函数，只能用概率统计的方法来描述。

1.1.3 动力荷载的类型及动力计算的基本特点

结构物之所以会产生振动，主要是因为受到了某种动力荷载的作用。动力荷载是相对静力荷载而言的，它是指大小、方向和作用位置随时间不断变化的荷载。严格来讲，工程上所有的荷载都应属于动力荷载，因为它们都是随时间变化的。但是，如果荷载随时间变化很慢，荷载对结构产生的影响与静荷载相比差别很小，这种荷载作用下的结构计算问题便可以简化为静力荷载作用下的结构计算问题。如果荷载不仅随时间变化，而且变化较快，荷载对结构产生的影响与静力荷载产生的影响相比差别很大，那么这种荷载就必须被当作是动力荷载来考虑。荷载变化的快与慢是相对于结构系统自身的固有振动周期而言的，确定一种随时间变化的荷载是否为动力荷载，须将其本身的特征和结构的动力特性结合起来考虑才能确定。

根据荷载是否预先确定，动力荷载可以分为两类：确定性荷载和随机性荷载。预先的含义是指在进行结构动力分析之前。确定性荷载是指荷载随时间的变化规律是预先知道的，是完全已知的时间过程；而随机性荷载则是指荷载随时间的变化规律是无法预先确定的，是一种随机过程，比如地震荷载、风荷载等都属于随机性荷载。需要说明的是，随机的含义是指不确定的而不是指复杂的，简单的荷载可以是随机性的，复杂的荷载也可以是确定性的。

确定性荷载按时域特性不同，可分为周期荷载和非周期荷载两大类。周期荷载是时间的周期函数：$F(t)=F(t+T)$，其中 T 为周期。周期荷载是重复的荷载，在多次循环中这些荷载相继出现相同的随时间变化过程。按正弦或余弦规律变化的荷载是最简单的周期荷载，如旋转机械由于质量偏心产生的离心力在竖直或者水平方向的投影就是 $F(t)=F_0\sin\theta t$ 或 $F(t)=F_0\cos\theta t$，这种周期荷载也称为简谐荷载。简谐荷载作用下结构的动力反应分析是非常重要的，因为这种荷载不仅在工程中确实存在，而且由傅里叶级数理论可知，任何周期荷载都可以分解为一系列简谐荷载的叠加，如此，一般周期荷载作用下结构的动力反应问题可以转化为一系列简谐荷载作用下的反应问题。非周期荷载可以是短时间内的冲击荷载，也可以是长时间的一般形式的荷载。锻造、冲压和爆破是最典型的冲击荷载，而风荷载和地面脉动荷载则属于长时间的任意荷载。图 1-2 给出了工程中常见的几种动力荷载。

在动力荷载作用下，结构物会产生振动，其各种响应都将是时间的函数，在运动的过程中结构会产生不容忽视的加速度，其惯性力会反过来对结构的变形产生影响。因此，动力分析与

静力分析的根本区别在于建立结构的平衡方程时是否考虑惯性力的影响。在进行动力分析时,结构的动力平衡方程中除了动力荷载和弹簧的弹性力之外,还要引入因其质量而产生的惯性力和耗散能量的阻尼力。

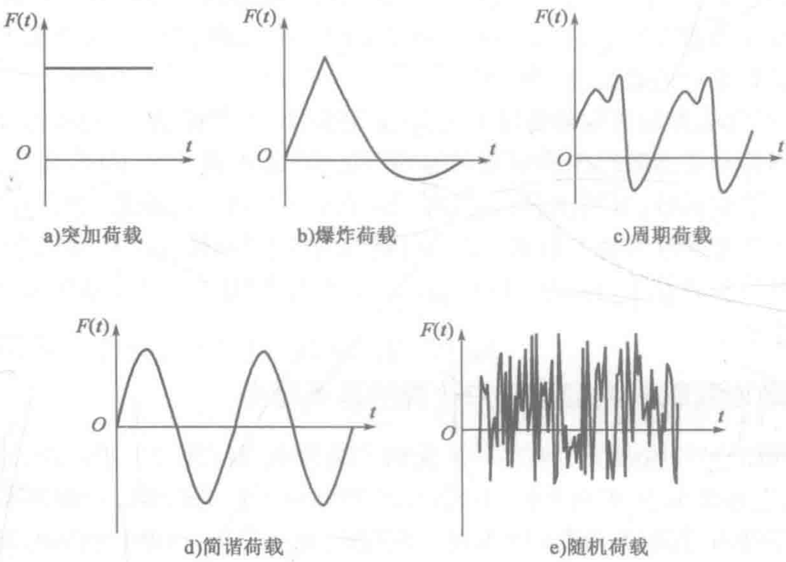


图 1-2 工程中常见的几种动力荷载

1.2 ➤ 结构的动力自由度及结构离散化方法

由于惯性力是导致结构在动力荷载作用下响应不同于静力荷载作用下响应的根本原因,因此弄清楚结构的质量分布情况并分析质量可能产生的位移,对动力分析来说是非常关键的。在结构运动过程中的某一时刻,确定其全部质量位置所需要的独立几何参数的个数,称为系统的动力自由度或振动自由度。

实际结构的质量都是分布的,因而惯性力也是连续分布的,如果要准确考虑和确定全部惯性力,就必须确定结构上每一点的运动,这时,结构上各点的位置都是独立的变量,导致结构有无限多个动力自由度。对于无限自由度系统的动力计算,只有一些很简单的问题能给出解答,而且计算十分复杂。实践证明,如果所有结构均按无限自由度系统来处理,不仅十分困难,而且确无必要。因此,通常会对计算模型加以简化,采用某种近似方法使连续系统变成有限自由度系统,这个过程一般称为离散化。结构离散化方法如下所述。

1.2.1 集中质量法

集中质量法是结构动力分析最常用的离散化处理方法,它是根据结构上质量分布和刚度分布情况,将连续分布的质量集中到结构在某些几何位置的有限个质点或者刚体(质体)上,如此将一个原本是无限自由度的问题简化为有限自由度问题。

图 1-3a) 所示为一质量连续分布的简支梁,按照其在振动时的变形特征和计算精度的要

求,可以将梁的质量集中到图1-3b)所示的几个点上。当然,结构的质量集中为几个质体以及集中到哪些点上,取决于结构中的质量和刚度分布情况,要具体问题具体考虑。如图1-3c)所示,同样是简支梁,但当梁上有一个具有一定尺寸并且质量相对较大的固定的设备时,该设备可以当作是一个刚体,梁的质量便可以忽略不计或者将梁的质量等效到质量较大的设备处,从而得到图1-3d)所示形式的计算简图,如果只考虑设备在平面内的振动,并且不考虑梁的轴向变形,则其动力自由度为2。如果刚体的尺寸相对梁来说很小,也可以忽略刚体的尺寸而将其简化为一个质点,从而简化为一个单自由度系统。

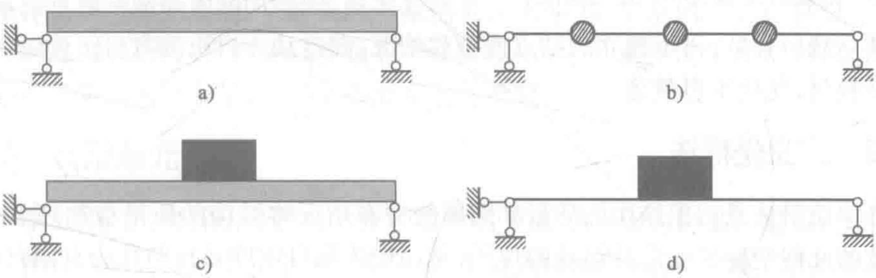


图1-3 简支梁的简化

又如图1-4a)所示的建于1997年高280m的石家庄电视塔,若采用粗略的计算模型,可以将塔身看作固定在地基上的一根悬臂梁,将塔身的质量集中到上下塔楼两处,从而得到一个两自由度动力模型。

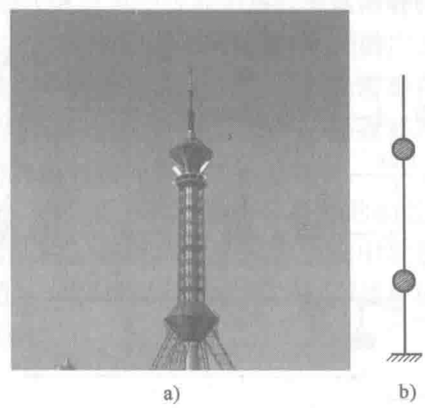


图1-4 石家庄电视塔的简化

需要指出,结构的动力自由度数目并不是固定不变的,会随着结构分析的假设而变化,采用不同的假设必然会得到不同的简化模型。一般来说,计算假定越少,自由度数目就越多,模型就越能反映实际结构的动力性能,计算精度也就越高,但计算的工作量也会加大。反之,计算假定越多,自由度数目就越少,计算工作就越简便,但计算精度也就越低。对于一个实际问题,应同时兼顾计算精度与计算效率,在不改变结构主要动力特点并保证足够计算精度的前提下,做出合理的假设,尽量减少动力自由度的个数以简化计算。对杆件结构而言,我们通常忽略掉杆件的分布质量,在考虑结构的变形时依然采用结构力学中的假设,对受弯杆件都忽略掉杆件的轴向变形,并且假设杆件的弯曲变形也是微小的。在这种假设下,一个受弯杆件上任意两点之间的距离在杆件变形前后都不发生改变。如图1-5a)所示的刚架结构体系,在振动过程中水平杆和竖直杆均可发生弯曲变形但没有轴向变形,因此质点 m 在水平方向和竖直方向均有位移发生,故其动力自由度为2。而图1-5b)所示的系统,振动过程中两个质点处均没有竖向位移,且它们的水平位移相等,故其动力自由度为1。

由以上两个例子不难发现,结构的动力自由度数目与该结构是静定还是超静定,以及其超静定次数的多少没有直接关系,与质点的个数也没有绝对的对应关系。动力自由度的多少只取决于所采用的假设,如果考虑轴向变形,则图1-5b)所示系统中的两个质点就会都有竖直和

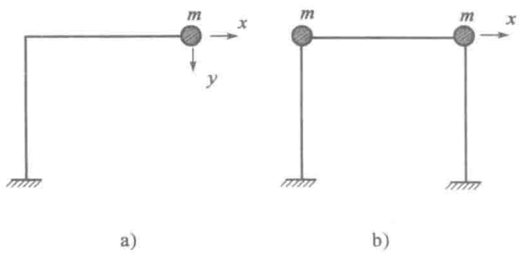


图 1-5 刚架结构系统的动力自由度确定

水平位移,而且它们的水平位移不再相等,因此,其动力自由度数目就变成了 4。

对于比较复杂的刚架类振动系统,还可以用结构力学位移法中添加附加链杆的方法来确定其动力自由度,即将结构中所有的刚结点(包括固定支座)都改为铰结点;然后对此几何可变的铰结链杆体系添加附加链杆,使之刚好成为几何不变体系,则添加的附加链杆数目就是原刚架系统的结点独立线位移数;再由独立的结点线位移情况,确定动力自由度数目。读者可参考有关的结构力学教材,此处不再赘述。

1.2.2 广义坐标法

上述集中质量法是根据结构的质量和刚度的分布情况将结构的质量在物理上进行离散,然后用质点的几何坐标来确定其运动的位置,从而使无限自由度系统简化为有限自由度系统。与此不同,我们还可以换一种思路,对一个连续系统,不从物理的角度去分析它的质量分布情况,而是对其振动时的位置从数学的角度进行近似模拟,假设系统的位移是某些满足一定条件的已知函数(基函数)的线性组合,此即所谓广义坐标法,那些线性组合的系数称为广义坐标。如图 1-6 所示的具有分布质量的简支梁,设在 t 时刻梁的位移为 $w(x,t)$,其挠曲线可用三角级数的和来表示,即

$$w(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}q_i(t)\sin\frac{i\pi x}{l} \tag{1-1}$$

式中:l——梁的跨度;

$\sin\dfrac{i\pi x}{l}$——满足边界条件的位移函数(基函数);

q_i——广义坐标,是一组待定参数,对动力问题而言它们是时间的函数。

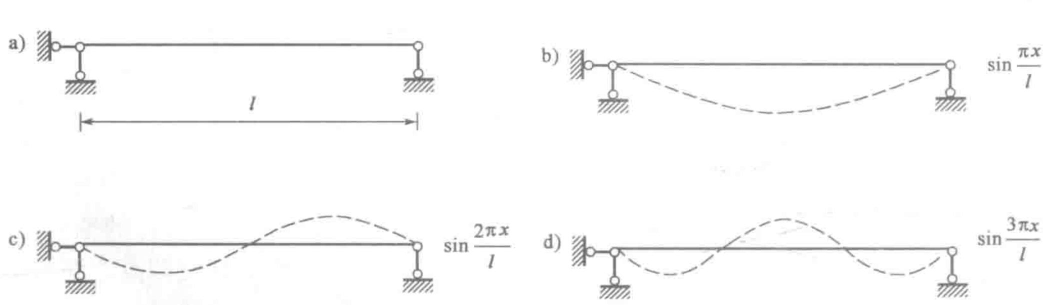


图 1-6 简支梁的基函数

由于基函数是事先给定的确定函数,梁的变形就可以由无限多个广义坐标 q_i($i=1,2,\cdots,\infty$)来表示,也就是说,结构的无限多个动力自由度可以用无限多个广义坐标来表示。实际分析中,不可能也没必要取级数的无穷多项,一般仅取级数的前几项就有足够的计算精度。例如取 3 项,则有

$$w(x,t)=\sum_{i=1}^{3}q_i(t)\sin\frac{i\pi x}{l} \tag{1-2}$$

这样就将无限自由度系统简化为三个自由度的系统。当然,随着级数项数的增加,计算的精度会越来越高。

一般地,结构的位移可表示为

$$w(x,t)=\sum_{i=1}^{n}q_i(t)\phi_i(x) \tag{1-3}$$

式中:q_i——广义坐标,它可以理解为基函数的幅值;

$\phi_i(x)$——基函数,它一般为连续函数并满足几何边界条件,这点在第6章会详细讨论。

广义坐标是基函数的系数,它们表示了基函数的大小,如果基函数是位移量,则广义坐标不具有位移的量纲,只有当它们乘以基函数并叠加以后,才是真实的位移物理量,因而广义坐标实际上并不是真实的物理量,仅是某些形式上的参数。

1.2.3 有限单元法

集中质量法和广义坐标法分别从物理和数学的角度对结构的振动问题进行了离散化,它们有各自的优点和缺点。集中质量法简便易行,物理概念清楚,但由于其质量集中的方式具有随意性,缺乏严密的数学基础,计算精度有时无法估计;广义坐标法则完全采用数学的方法,有严密的理论基础作保证,计算精度较容易估计,但是广义坐标的物理意义不甚明确,而且有时要选择满足特定条件的基函数非常困难。有限单元法将两种方法结合起来,兼有集中质量法和广义坐标法的特点,它是将实际结构划分成若干个子域(单元),认为各单元只在有限个结点处相互连接,而在每个单元内构造位移函数,将位移函数假设为一些基函数的线性组合。在有限单元法中,这些基函数又称为插值函数或形函数。与广义坐标法不同的是,此处的广义坐标有明确的物理意义,它们就是单元在结点处的位移或其导数。而且由于基函数只需要在单元内构造,并且不需要满足边界条件,这比在整个结构域上构造满足边界条件的函数要容易得多。

上述三种方法以集中质量法较为简便实用,广义坐标法需要选择满足边界条件的函数族,这在有些情况下是比较困难的,故只适用于比较简单的结构。有限单元法综合了集中质量法和广义坐标法的优点,可适用于各种复杂的结构,因而在求解工程结构的实际问题时被广泛采用。关于有限元法的有关知识,可参阅第6章的有关章节。

1.3 ➤ 建立结构运动方程的方法简介

研究结构振动问题的关键,是求得各惯性元件的位移随时间变化的历程,而要求得结构的这些位移,就必须首先由问题的力学模型建立数学模型,即运动方程。建立结构的运动方程是一项重要的基础性工作,它为求解运动方程和分析结构的响应奠定了基础。

建立结构的运动方程有很多种方法,这些方法大致可以分为两大类:一是基于牛顿第二定律或达朗贝尔原理的动静法,二是基于能量原理与变分法的拉格朗日方程和哈密顿原理方法。第一类方法以力的平衡为基础,其力学概念比较清楚;第二类方法以能量原理和数学上的变分法为基础,主要是进行数学推导和变换,故又称为分析力学方法。关于达朗贝尔原理、拉格朗日方程和哈密顿原理的详细论述,请读者参阅理论力学和分析力学的有关书籍,这里只作扼要介绍。

1.3.1 动静法

以一个简单的单自由度系统为例，如图 1-7a）所示的结构系统，设梁的弯曲刚度为 EI，长度为 l，质量忽略不计，端部的集中质量大小为 m，受激励力 $F(t)$ 作用。现将某时刻的质点取出来研究其受力平衡，根据牛顿第二定律有

$$F_{\mathrm{E}}(t)+F(t)=ma \tag{1-4}$$

式中：$F_{\mathrm{E}}(t)$——梁对质点的弹性力；

a——质点的加速度。

将式(1-4)右边的 ma 移到左边，并引入惯性力，得

$$F_{\mathrm{I}}(t)=-ma \tag{1-5}$$

式(1-5)中的负号表示惯性力的方向与加速度方向相反，于是有

$$F_{\mathrm{I}}(t)+F_{\mathrm{E}}(t)+F(t)=0 \tag{1-6}$$

式(1-6)即达朗贝尔原理，它可以理解为，在加上惯性力之后，质点在其所受到的激励力 $F(t)$、弹性力 $F_{\mathrm{E}}(t)$ 和惯性力 $F_{\mathrm{I}}(t)$ 共同作用下处于平衡状态，即所谓动平衡，如图 1-7b）所示。

如果用 $x(t)$ 表示质点在 t 时刻的位移，则有 $a=\ddot{x}$，惯性力和弹性力可写为

$$F_{\mathrm{I}}(t)=-m\ddot{x} \tag{1-7}$$

$$F_{\mathrm{E}}(t)=-k_{11}x \tag{1-8}$$

式(1-8)中的负号表示弹性力方向与质点位移的方向相反，k_{11} 可理解为梁对质点的弹簧刚度，可用结构力学方法求得，即 $k_{11}=3EI/l^3$，见图 1-7c）。于是式(1-6)可写成

$$m\ddot{x}+k_{11}x=F(t) \tag{1-9}$$

对于多自由度系统，可分别取每个惯性元件为隔离体，利用达朗贝尔原理建立其动平衡方程，从而得到多自由度系统动力平衡的方程组。

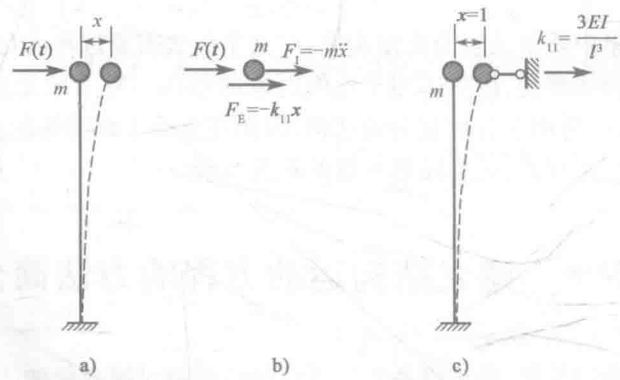


图 1-7 悬臂梁集中质量系统的动力平衡

1.3.2 拉格朗日方程

设有一个多自由度系统，现将系统所有质点的位移用广义坐标 $q_i(i=1,2,\cdots,n)$ 来表示，振动过程中系统的动能和势能显然都跟系统位形和运动状态有关，动能是广义速度的函数，而势能是广义位移的函数。将系统的动能 T 和势能 U 分别用广义速度和广义位移表示后，便可

以由拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i(t) \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{1-10}$$

用求导数的办法得到系统的动力平衡方程组,其中

$$L = T - U \tag{1-11}$$

称为拉格朗日函数, $F_i(t)$ 为与广义坐标 q_i 相对应的非保守力。

如前面的悬臂梁的例子,其动能和势能表达式分别为

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{1-12}$$

$$U = \frac{1}{2}k_{11}x^2 \tag{1-13}$$

将式(1-12)和式(1-13)代入式(1-10),同样可以得到式(1-9)的动力学方程。

1.3.3 哈密顿原理

哈密顿原理是分析力学中的一个基本的变分原理,它给出了一条系统从一切可能的运动状态中判断真实运动状态的准则。它是这样描述的:对于任意时间段,例如从 t_1 到 t_2 时段,在一切可能的运动中,只有真实的运动使得某一物理量 H 取得极值。哈密顿于19 世纪提出了这个物理量 H 的表达式,即

$$H = \int_{t_1}^{t_2}(T - U + W_{\mathrm{F}})\,\mathrm{d}t \tag{1-14}$$

式中:T——系统的动能;

U——系统的势能;

W_{F}——非保守力所做的功。

这个物理量也称为哈密顿作用量。

根据变分原理, H 取极值的条件为,其一阶变分等于零,即

$$\delta H = 0 \tag{1-15}$$

将系统的动能和势能以及外力做的功等物理量用广义位移表示,然后代入式(1-15),经过数学上的变分运算,便可得到系统的运动方程。仍以前面的悬臂梁为例,其哈密顿作用量为

$$H = \int_{t_1}^{t_2}(T - U + W_{\mathrm{F}})\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k_{11}x^2 + \int_0^y F(t)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t \tag{1-16}$$

现对式(1-16)进行变分运算,注意变分可与积分交换顺序,得

$$\begin{aligned}\delta H &= \delta\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k_{11}x^2 + \int_0^y F(t)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\delta\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k_{11}x^2 + \int_0^y F(t)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left[m\dot{x}\delta\dot{x} - k_{11}x\delta x + F(t)\delta x\right]\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{1-17}$$

对式(1-17)第一项,交换变分与微分的顺序,然后利用分部积分,并注意到有变分 δx 在积分上下限的值为零,得到

$$\int_{t_1}^{t_2}m\dot{x}\delta\dot{x}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}m\dot{x}\,\mathrm{d}\delta x = m\dot{x}\delta x\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\delta x\,\mathrm{d}(m\dot{x}) = -\int_{t_1}^{t_2}m\ddot{x}\delta x\,\mathrm{d}t \tag{1-18}$$

再代入式(1-17)并令其等于零,注意到变分 δx 的任意性,得

$$m\ddot{x} + k_{11}x = F(t) \tag{1-19}$$

以上三种方法各具特点,可分别适用于不同形式的动力系统。动静法是借助于惯性力的概念,立足于力的平衡这样一个最基本的事实,直接建立系统动力学平衡方程的方法,具体应用时会涉及惯性力、弹性力和阻尼力与加速度、位移和速度之间的关系,尤其是弹性力与系统位移之间的关系。而对工程结构这样的系统,这种关系相对来说比较容易求得,故动静法常用于建立工程结构这类系统的动力学方程。基于分析力学的拉格朗日方程和哈密顿原理,需要将系统的动能和势能用广义坐标来表示,对于由弹簧和刚体质量组成的机械系统,这种表达式比较容易得到,故这些分析力学的方法通常用于建立机械系统的动力学方程。但是对土木工程结构而言,要将系统的能量用系统的位形来表达是比较困难的,因而在建立工程结构类系统的动力学方程时通常不用这种方法。

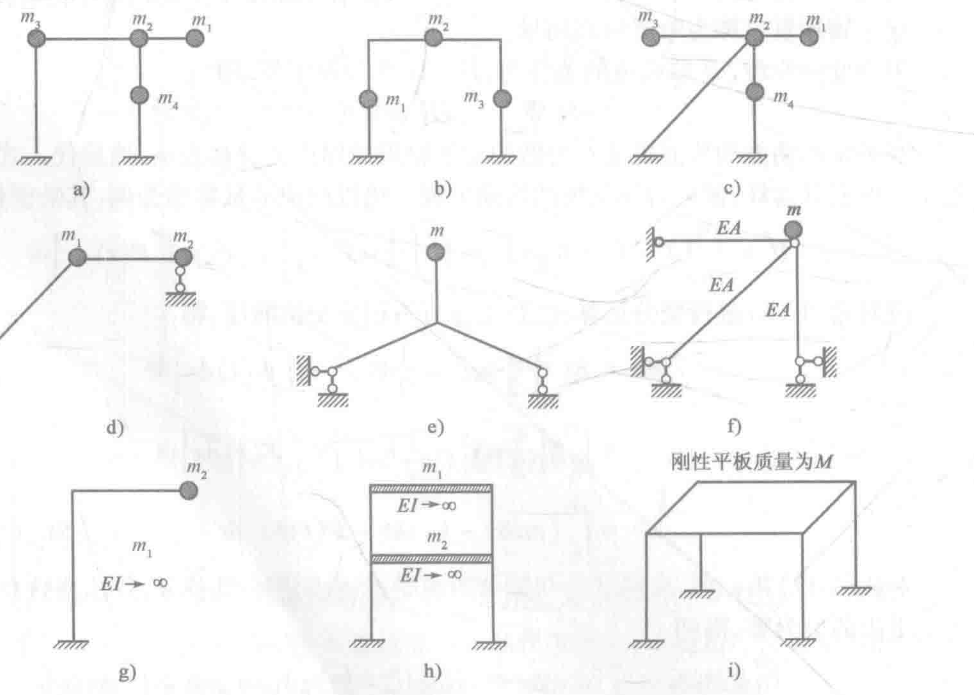
习题

1.1 结构动力计算与静力计算的主要区别是什么?

1.2 什么是体系的振动自由度?它与几何组成分析中体系的自由度有何区别?如何确定体系的振动自由度?

1.3 采用集中质量法、广义坐标法和有限单元法都可以使无限自由度体系简化为有限自由度体系,它们所采用的手段有什么不同?

1.4 判断题1.4图中各振动系统的动力自由度。如无特殊说明,各受弯杆件的弯曲刚度 EI 均为常数,质量忽略不计,且不考虑轴向变形。



题1.4图