



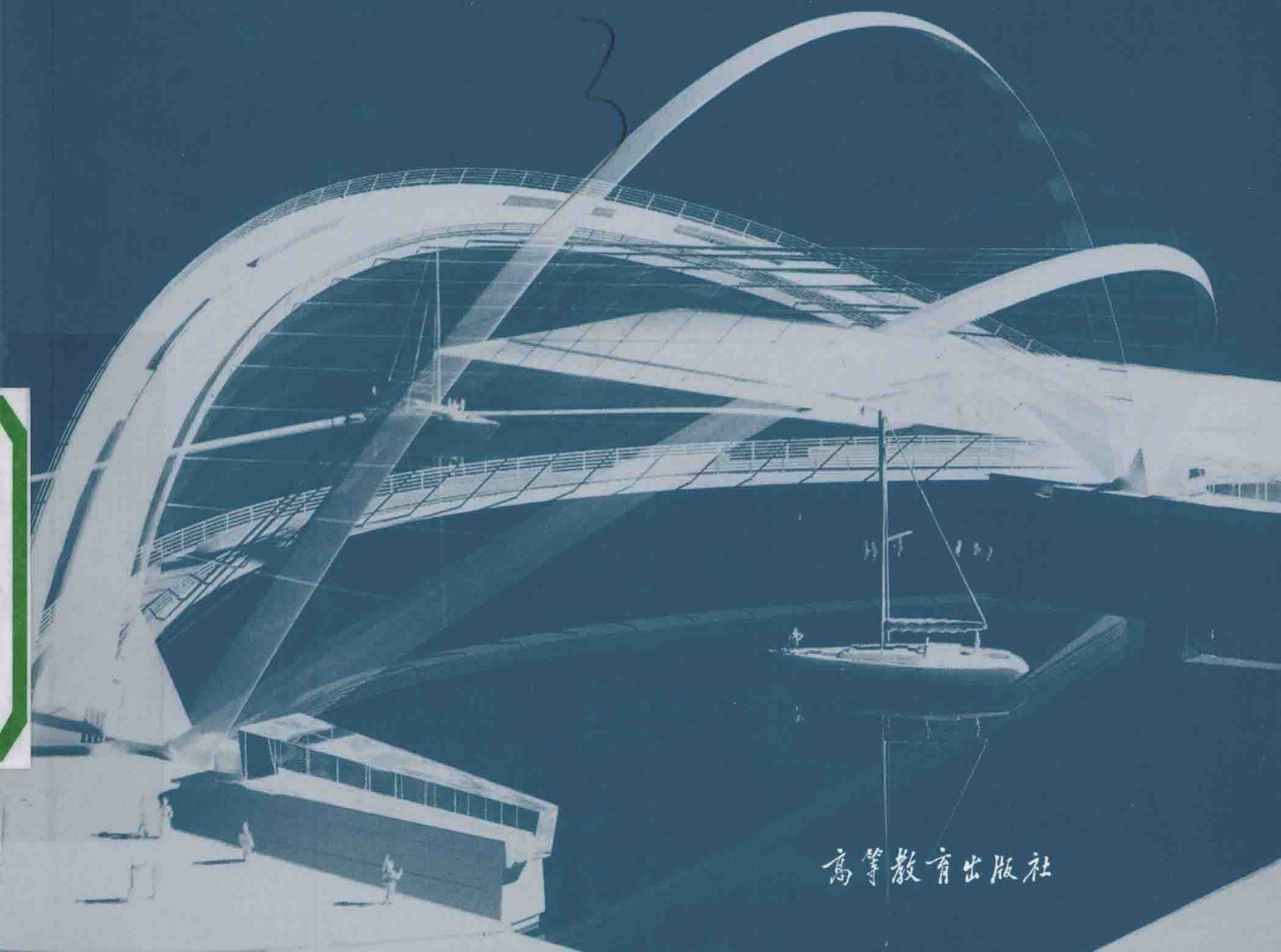
iCourse · 教材

# 结构力学

第3版

(下 册)

朱慈勉 张伟平 主编



高等教育出版社



iCourse · 教材

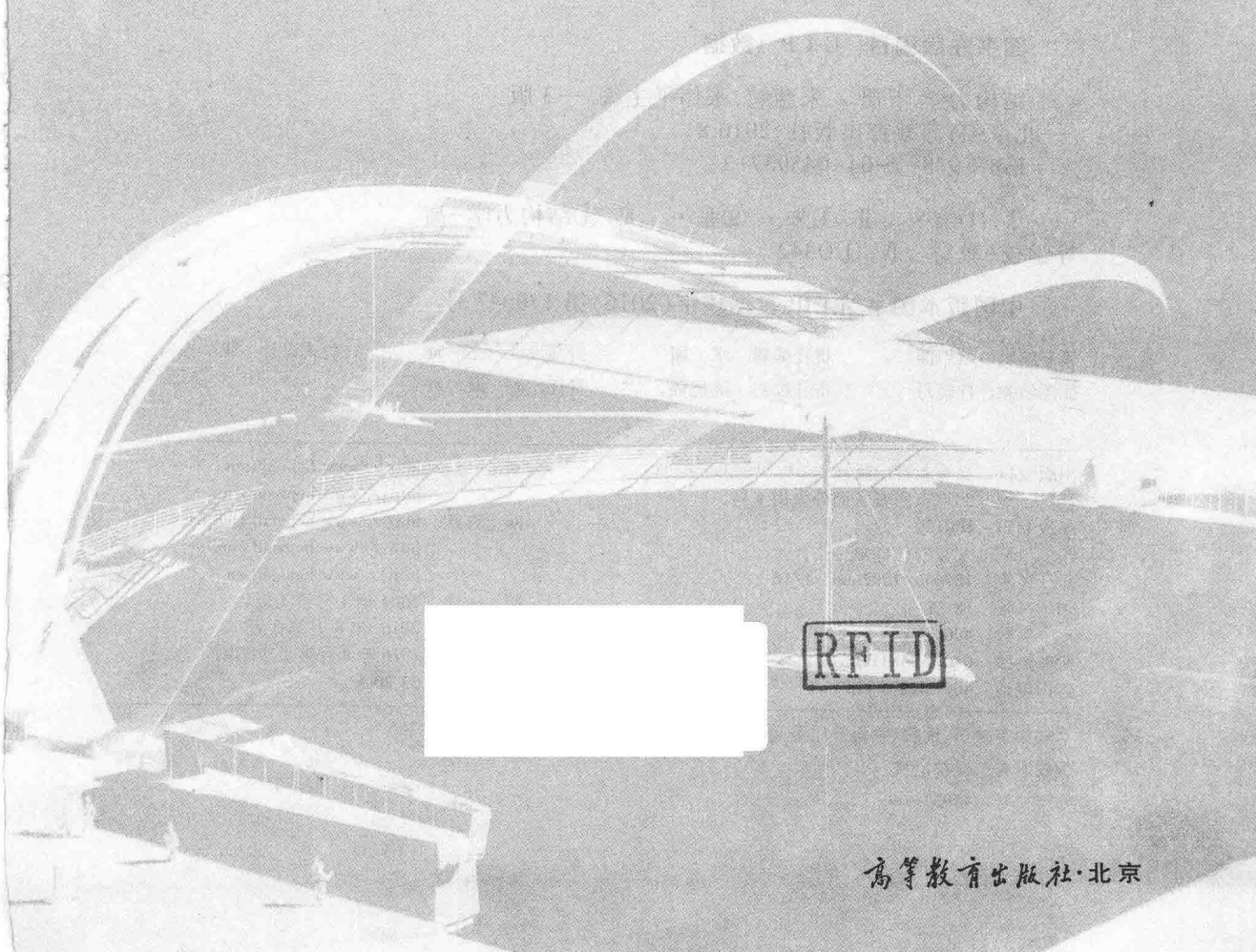


# 结构力学

JIEGOU LIXUE

第3版  
(下 册)

朱慈勉 张伟平 主编



RFID

高等教育出版社·北京

## 内容提要

本书是在第2版(普通高等教育“十一五”国家级规划教材)的基础上,按照教育部高等学校力学教学指导委员会力学基础课程教学指导分委员会最新制订的“结构力学课程教学基本要求(A类)”,结合结构力学课程教学、课程建设和教学改革的实践及成果修订而成的。

进入21世纪以来,为适应科学技术和工程实践飞速发展和卓越工程师培养的时代需求,结构力学课程的教学更加强调基本概念的正确树立与科学运用,更加注重遵循认知规律、联系工程实际和提升教学对象的素质与能力。本书进一步贯彻和加强了上述有关概念结构力学的学科发展思想和教学理念。结合国家级精品课程、国家级精品资源共享课和MOOC(慕课)建设中的相关成果,书中通过二维码引入了结构力学数字化教学资源数十则,作为教材立体化建设的一种尝试。

全书分为上、下册。上册共7章,内容包括静定结构部分和力法、位移法;下册共5章,内容包括矩阵位移法、超静定结构的实用计算方法与概念分析、结构动力学、结构的稳定性和极限荷载,并附有平面刚架静力分析的源程序及说明。

本书可作为高等学校土建、水利、机械和力学等专业的结构力学课程教材,也可作为相关专业工程技术人员等的参考书。

本书配有教学辅助软件,通过动画演示生动地体现相关的教学内容及引发课堂讨论,可供采用本书为教材的教师方便地实现多媒体教学。

## 图书在版编目(CIP)数据

结构力学.下册 / 朱慈勉,张伟平主编.--3版  
.--北京:高等教育出版社,2016.8  
ISBN 978-7-04-045937-1

I. ①结… II. ①朱… ②张… III. ①结构力学-高等学校-教材 IV. ①O342

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第170647号

策划编辑 水渊 责任编辑 水渊 封面设计 王琰 版式设计 张杰  
插图绘制 杜晓丹 责任校对 陈旭颖 责任印制 耿轩

出版发行	高等教育出版社	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
社 址	北京市西城区德外大街4号		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
邮政编码	100120	网上订购	<a href="http://www.hepmall.com.cn">http://www.hepmall.com.cn</a>
印 刷	北京宏信印刷厂		<a href="http://www.hepmall.com">http://www.hepmall.com</a>
开 本	787mm×1092mm 1/16		<a href="http://www.hepmall.cn">http://www.hepmall.cn</a>
印 张	18.75	版 次	2004年1月第1版
字 数	400千字		2016年8月第3版
购书热线	010-58581118	印 次	2016年8月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	33.20元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 45937-00

# 与本书配套的数字课程资源使用说明

---

与本书配套的数字课程资源发布在高等教育出版社易课程网站,请登录网站后开始课程学习。

## 一、网站登录

1. 访问 <http://abook.hep.com.cn/1237382>, 点击“注册”。在注册页面输入用户名、密码及常用的邮箱进行注册。已注册的用户直接输入用户名和密码登录即可进入“我的课程”界面。

2. 点击“我的课程”页面右上方“绑定课程”,按网站提示输入教材封底防伪标签上的数字,点击“确定”完成课程绑定。

3. 在“正在学习”列表中选择已绑定的课程,点击“进入课程”即可浏览或下载与本书配套的课程资源。刚绑定的课程请在“申请学习”列表中选择相应课程并点击“进入课程”。

账号自登录之日起一年内有效,过期作废。

## 二、资源使用

本书配套了结构力学课程教学的数字资源。数字资源分为两个部分:第一部分主要是体现教材的拓展、思考的引导和问题的讨论等;第二部分主要是教学软件资料,涵盖了本书 12 章内容,可供教师上课和学生学习之用。这些资源以二维码的形式在书中出现,扫描后即可观看。

## 第 3 版 序

本书是在第 2 版(普通高等教育“十一五”国家级规划教材)的基础之上,按照教育部高等学校力学教学指导委员会力学基础课程教学指导分委员会最新制订的“结构力学课程教学基本要求(A类)”,结合结构力学课程教学、课程建设和教学改革的实践及成果修订而成的。

进入 21 世纪以来,为适应科学技术和工程实践飞速发展和卓越工程师培养的时代需求,同济大学结构力学课程的教学更加强调基本概念的正确树立与科学运用,更加注重遵循认知规律、联系工程实际和提升教学对象的素质与能力。特别是在国家级精品课程、国家级精品资源共享课和 MOOC(慕课)建设过程中,以及在各种相关会议、课题合作和竞赛等活动中,与兄弟院校师生的联系日趋广泛,使得同济大学结构力学课程在不断发展与进步的同时也汲取了丰富的营养。以上这些在本书第 3 版中均有所体现。

本次修订工作的内容主要有以下两个方面。

1. 增加了对于结构力学基本概念及其科学运用而言十分有益的内容。遵循认知规律,这些内容许多是以问题的形式出现。问题大多视角新颖、颇具概念性、综合性强且具有实际工程意义。相信在思考、分析和解决这些问题的过程中所获得的不仅是知识,而更多的是素质与能力的跃升。在此要感谢同济大学王国砚教授在这方面所作出的贡献。

2. 通过二维码引入了结构力学课程教学的数字资源。数字资源分为两个部分:第一部分主要是体现教材的拓展、思考的引导和问题的讨论等,主要来源于一项目课题研究,参与该项目课题研究的除同济大学相关教师外还包括新疆大学等两所兄弟院校的教师严跃成、高公略;第二部分主要是教学软件资料,涵盖了本书 12 章内容,可供教师上课和学生学习之用,由华侨大学周克民教授研制。在此一并表示感谢。

参加本书修订工作的包括原书作者和以上提及的各校教师。本书仍由北京建筑工程学院刘世奎教授审阅,刘教授提出了不少宝贵且十分具体的修改意见,谨此表示诚挚的感谢。

同济大学结构力学的授课视频在“爱课程”网([www.icourses.cn](http://www.icourses.cn))上线,受到兄弟院校师生的广泛关注,欢迎大家与我们联系,共同研讨。恳请批评指正。

作者

2016 年 5 月

## 第 2 版序

---

本书第 2 版是在第 1 版《结构力学》(上、下册)“十五”国家级规划教材的基础上,按照教育部力学基础课程教学指导分委员会最新制订的“结构力学课程教学基本要求”修订而成的。该书第 1 版曾因提出了概念结构力学的理念,遵循认知规律启发思考,密切联系工程实际以及注重素质与能力的培养而受到师生和工程人员的广泛欢迎,并于 2007 年获上海市高等学校优秀教材一等奖。本次修订的主要内容如下。

首先是顺应科学技术的发展和工程领域中的迫切需要,进一步强调了结构的概念分析,丰富了结构概念分析的理论与方法,增加了相应的问题和案例;二是加强了对力学基本概念的介绍,综合运用和分析讨论方面的内容,注重工程背景的映衬和工程概念的培养;三是对各章增加了相当数量的习题及思考题,以便于教学使用。此外,在文字叙述方面也做了一些改善工作。

本书第 1 版的作者参加了第 2 版的修订工作,第 2 版由朱慈勉、张伟平主编,各章、节的分工基本照旧。继第 1 版之后,第 2 版书稿又得到北京建筑工程学院刘世奎教授的审阅和指点,不少兄弟院校的教师也对本书的修订提出了许多有益的建议,对于第 2 版的定稿起了重要作用,郭志刚等精心制作了本书的电子文稿,在此一并致以诚挚的谢意。

读者在使用本书时,在力学基本概念的理解和运用方面,需养成独立、深入和广泛联想的思维习惯,在提高大脑左半球(理性半球)为主的逻辑思维能力的同时,更注意开发大脑右半球(感性半球)的形象思维能力,增加对力学基本概念和结构受力性态的感悟能力,以使在日后的学习和工作中在结构力学和结构分析方面达到如鱼得水的境界。

恳请批评指正。

作者

2009 年于同济大学

# 第 1 版序

现代工程技术的日益进步和电子计算机的飞速发展对结构力学学科产生了深远的影响。一方面,大型工程结构在各种复杂因素作用下的分析,要求强化结构力学基本概念的综合运用和概念设计的理念;另一方面,运算能力的剧增又要求发展与之相适应的结构分析理论与方法。这就促使传统结构力学向“概念结构力学”和“计算结构力学”两个方向的纵深发展。高等学校工程类专业的结构力学课程教学需要与之相适应,以利于培养出满足现时代需要的专业人才。

本书的编写力求改变以往课程教学中常以介绍传统的结构力学计算方法为主的状况,而是致力于结构力学基本概念的培养及其运用能力的提高。结构计算电子化后,许多传统的计算方法本身可能已逐步失去实际应用价值,但其相应的基本概念和基本原理在结构分析中仍具有重要地位和价值。实际上,力学基本概念和基本原理在工程中的综合运用能力,则正是当代结构工程领域科技人员所应具备的最重要的素质。

本书的特点是:以结构力学的基本概念、基本原理及其科学运用为主线;以认知规律为出发点;以工程实践为背景;以素质与能力的提高为目标。本书注意概念清晰、内容简明、深入浅出和联系实际。在介绍解题方法的同时更注重“就事论道”和“由技入道”,力求使学生深刻领会客观规律并掌握事物的本质。

本书是同济大学有关教师在长期从事结构力学教学、科研以及工程实践的基础上写成的,体现了作者有关“概念结构力学”的基本思想。全书分上册(共7章)、下册(共5章),由朱慈勉主编并编写第1、9、10章。参加本书编写工作的还有吕凤梧、江利仁(第3、5章)、张伟平(第6章部分内容、第12章),李建新(第6章部分内容、第11章及附录),龙仲芬(第4、7章)和王琳鸽(第2、8章)。书中强调了有关线弹性体系的基本假设,以及各种基本理论、基本方法以及公式的适用前提;突出了静定和超静定结构受力状态的概念分析,并纳入了对于概念分析有重要作用的剪力分配法的基本原理;提出了诸如利用瞬时中心求解带斜杆的超静定刚架、运用联合法绘制影响线和利用电模拟分析杆件并联、串联关系等行之有效的分析方法;编写了相当数量的有关概念分析和与工程实践密切相关的例题和习题,其中不少是近年来的期终试题或研究生入学考试试题。

本书承蒙北京建筑工程学院刘世奎教授审阅,并提出了宝贵的修改意见。哈尔滨工业大学王焕定教授、同济大学朱伯钦教授也对本书提出了许多有益的建议。在此,谨向他们表示衷心的感谢。此外,同济大学教务处对本书的出版高度重视并给予大力支持,冷金荣、顾绍义、罗文钊等精心制作了本书的电子文稿,一并表示感谢。

欢迎批评和指正。

朱慈勉

2003年11月于同济大学

# 主要符号表

$A$	面积、振幅(多自由度)
$A$	位移幅值向量、主振型向量、主振型矩阵
$a$	振幅(单自由度)
$B$	应变矩阵
$c$	支座广义位移、黏滞阻尼系数
$C$	弯矩传递系数
$C$	阻尼矩阵
$c_{cr}$	临界阻尼系数
$d$	结间距离
$E$	弹性模量
$E_p$	势能
$f$	矢高、工程频率
$F$	简谐荷载幅值
$F_p$	集中荷载
$F$	结点荷载向量
$F_H$	水平推力
$F_x, F_y$	水平( $x$ )、垂直( $y$ )方向的分力
$F_N$	轴力
$F_Q$	剪力
$F_Q^L, F_Q^R$	截面左、右的剪力
$F_Q^F$	固端剪力
$F_{pe}$	欧拉临界荷载
$F_{per}$	临界荷载
$F_{pu}$	极限荷载
$F_p^+$	可破坏荷载
$F_p^-$	可接受荷载
$F_s$	弹性力
$F_I$	惯性力
$F_D$	阻尼力
$F_R$	广义反力、反力合力
$\bar{F}^e$	局部坐标系下单元杆端力向量
$F^e$	整体坐标系下单元杆端力向量



$G$	切变模量
$i$	弯曲线刚度、截面回转半径
$I$	截面惯性矩
$I$	单位矩阵
$k$	刚度系数、切应力分布不均匀系数
$k_{\theta}$	弹簧的转动刚度系数
$\bar{k}^e$	局部坐标系下单元刚度矩阵
$k^e$	整体坐标系下单元刚度矩阵
$K$	结构刚度矩阵
$m$	质量
$m$	单元质量矩阵
$\bar{m}$	单位杆长的质量
$M$	力矩、力偶矩、弯矩
$M$	结构质量矩阵
$M^L, M^R$	截面左、右的弯矩
$M^F$	固端弯矩
$M_u$	极限弯矩
$M_s$	弹性极限弯矩
$N$	形函数矩阵
$q$	均布荷载集度
$R$	半径
$r$	半径、反力影响系数
$S$	转动刚度、影响线量值
$t$	时间
$T$	周期、动能
$T$	坐标转换矩阵
$V_s$	应变能
$u$	$x$ 方向位移
$v$	$y$ 方向位移、挠度、速度
$W$	功、计算自由度、重量、弯曲截面系数
$W_u$	截面塑性抵抗矩
$w$	单元位移向量
$X$	广义多余约束力、广义多余未知力
$Y$	振型函数
$y$	位移
$Z$	广义未知位移
$Z$	广义未知位移向量
$\alpha$	线膨胀系数、初相角

$\beta$	弦转角、动力系数
$\gamma$	剪力分配系数
$\gamma_0$	平均切应变
$\Delta$	广义未知位移
$\bar{\Delta}$	位移向量
$\bar{\Delta}^e$	局部坐标系下单元杆端位移向量
$\Delta^e$	整体坐标系下单元杆端位移向量
$\delta$	柔度系数、位移影响系数
$\delta$	柔度矩阵
$\varepsilon$	线应变
$\varepsilon_s$	屈服应变
$\mu$	弯矩分配系数
$\kappa$	曲率
$\varphi$	转角
$\theta$	截面转角、干扰力频率
$\xi$	阻尼比
$\rho$	材料密度
$\sigma_b$	强度极限
$\sigma_s$	屈服应力
$\sigma_u$	极限应力
$\omega$	自振频率(角频率)

## 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

### 短信防伪说明

本图书采用出版物短信防伪系统，用户购书后刮开封底防伪密码涂层，将16位防伪密码发送短信至106695881280，免费查询所购图书真伪。

### 反盗版短信举报

编辑短信“JB,图书名称,出版社,购买地点”发送至10669588128

### 短信防伪客服电话

(010)58582300

# 目 录

主要符号表 .....	( I )	振动 .....	( 128 )
<b>第 8 章 矩阵位移法</b> .....	( 1 )	§ 10-9 无限自由度体系的自由 振动 .....	( 138 )
§ 8-1 概述 .....	( 1 )	§ 10-10 近似法求自振频率 .....	( 140 )
§ 8-2 矩阵位移法的基本原理 .....	( 1 )	§ 10-11 有限单元法求自振 频率 .....	( 145 )
§ 8-3 单元刚度矩阵 .....	( 4 )	习题 .....	( 153 )
§ 8-4 直接刚度法 .....	( 13 )	<b>第 11 章 结构的弹性稳定</b> .....	( 160 )
§ 8-5 直接刚度法的另一种形式 ——先处理法 .....	( 24 )	§ 11-1 概述 .....	( 160 )
§ 8-6 等效结点荷载 .....	( 33 )	§ 11-2 有限自由度体系的稳定 .....	( 163 )
习题 .....	( 37 )	§ 11-3 用静力法确定弹性压杆 的临界荷载 .....	( 168 )
<b>第 9 章 超静定结构的实用计算方法 与概念分析</b> .....	( 40 )	§ 11-4 用能量法确定弹性压杆 的临界荷载 .....	( 174 )
§ 9-1 概述 .....	( 40 )	§ 11-5 组合压杆的稳定 .....	( 180 )
§ 9-2 弯矩分配法 .....	( 41 )	§ 11-6 刚架的稳定 .....	( 187 )
§ 9-3 剪力分配法 .....	( 51 )	§ 11-7 拱和窄梁的稳定 .....	( 195 )
§ 9-4 超静定结构受力状态的 概念分析 .....	( 57 )	习题 .....	( 201 )
§ 9-5 超静定结构的影响线及其 应用 .....	( 65 )	<b>第 12 章 结构的塑性分析和极限 荷载</b> .....	( 205 )
习题 .....	( 72 )	§ 12-1 概述 .....	( 205 )
<b>第 10 章 结构动力学</b> .....	( 78 )	§ 12-2 纯弯曲梁的极限弯矩和 塑性铰 .....	( 207 )
§ 10-1 概述 .....	( 78 )	§ 12-3 梁的极限荷载 .....	( 211 )
§ 10-2 体系振动的自由度 .....	( 79 )	§ 12-4 比例加载时判定极限 荷载的一般定理 .....	( 217 )
§ 10-3 单自由度体系运动方程 的建立 .....	( 83 )	§ 12-5 平面刚架的极限荷载 .....	( 221 )
§ 10-4 单自由度体系的自由振动 ..	( 87 )	习题 .....	( 231 )
§ 10-5 单自由度体系的受迫振动 ..	( 94 )	<b>附录 A 平面刚架静力分析程序及其 应用</b> .....	( 234 )
§ 10-6 多自由度体系的自由振动 ..	( 107 )		
§ 10-7 主振型的正交性 .....	( 126 )		
§ 10-8 多自由度体系的受迫			

附录 B 习题答案 .....	(268)	Synopsis .....	(280)
附录 C 索引 .....	(275)	Contents .....	(281)
主要参考文献 .....	(279)		

## 第8章 矩阵位移法

### § 8-1 概 述

随着经济建设的发展和科学技术的进步,工程实践中所提出的结构分析问题愈来愈向大型化和复杂化的方向发展,这就使得传统的结构力学分析方法与手段难以相适应,而其中主要的障碍是令人生畏的庞大的计算工作量。于是,高效率的计算工具的使用就成为解决上述问题的关键。在另一方面,电子计算机技术在近几十年来取得了突飞猛进的发展,为结构分析方法与手段取得根本性的进步创造了条件。

在用力法或位移法分析结构时,一个力学问题最终是演化为一组线性代数方程的求解问题。这样,在利用电子计算机进行结构分析时,就需要有一个统一的途径和步骤,让计算机自动建立起这样的方程组。这一过程可以这样来实现,首先可将结构离散为各个单元,建立单元受力性态的控制方程,然后再将各单元按在结构中的实际状况组装成原结构,得到关于结构受力性态的一组控制方程。求解这一方程组就可以得到关键未知量,并进而完成结构受力分析的全部工作。上述分析和运算过程可以用矩阵的形式既简洁而又非常规一化地表达,这就是结构的矩阵分析方法。有了这样一种高度统一和规一化的分析方法,就可以编制出相应的对于一类问题具有普遍适用性的计算机程序,从而达到由计算机来完成结构受力分析的目的。由此可见,结构的矩阵分析方法可视利用计算机进行结构受力分析的桥梁。

结构的矩阵分析方法需要建立在一定的力学理论基础之上。这就提出了选择何种理论基础的问题。当用力法分析超静定结构时,对于同一个结构可以采用不同形式的基本结构,这样就容易使分析过程与基本结构的选取联系在一起;而用位移法分析时,对应一定的结构,基本结构的形式是相同的。此外,位移法对于超静定结构和静定结构实际上是同样适用的,求解过程也是完全一致的。由此可见,位移法的分析过程比力法更容易规一化,也就更适宜于利用电子计算机来实现其分析过程。因此,矩阵位移法就成为最为重要的一种结构矩阵分析方法。这一方法无论对于杆件结构还是连续体结构的受力分析,都具有最为广泛的应用价值。

### § 8-2 矩阵位移法的基本原理

矩阵位移法是以位移法作为基础的结构矩阵分析方法,或者说,它是以矩阵形式表达的位移法分析过程。在矩阵位移法中也是以结构的结点位移作为基本未知量。这样,杆端的变形协调条件在设取基本未知量时已经满足。与位移法稍有不同的是,在采用矩阵位移法利用计算机进行结构分析时,一般都计及刚架杆件轴向变形的影响,而且将构

成刚架的所有杆件,包括静定杆件在内,均归结为两端固定杆件。因此,在矩阵位移法中可以只定义一类两端固定的基本杆件。这样,就可以很容易地确定矩阵位移法基本未知量的数目,分析和计算过程也更加趋于规一化。

当采用矩阵位移法进行结构分析时,为了分析的方便,首先需对结点和杆件进行编号。例如,在分析图 8-1a 所示的平面桁架时,可以如图 8-1b 那样对该桁架的每一个结点和杆件进行编号。对于图 8-2a 所示的平面刚架的结点和杆件编号可以如图 8-2b 所示。结点和杆件的编号顺序原则上是任意的,对于同一个结构可以有不同的编号方法。在矩阵位移法中,将每一个编号的杆件称为一个单元,并将原结构看成是由这些单元按照实际的联结条件组装而成的。这一过程常被称作为结构的离散化。为了表示位移和力的方向,需为结构设定一个坐标系,这个坐标系称为结构的整体坐标系,以下简称为结构坐标系。

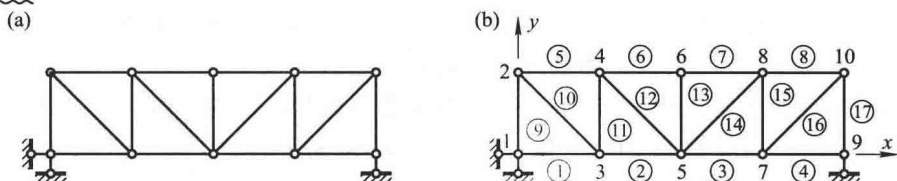


图 8-1

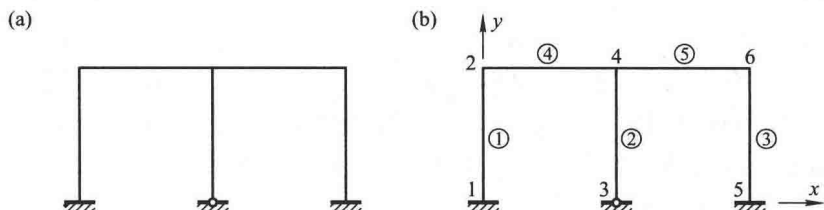


图 8-2

对于图 8-1a 所示的平面桁架,在考虑支座约束之前每个结点有 2 个独立的未知位移,即沿  $x$ 、 $y$  方向的线位移;对于图 8-2a 所示的平面刚架,在考虑支座约束之前每个结点有 3 个独立的未知位移,即沿  $x$ 、 $y$  方向的线位移和结点的角位移。这样的分析是考虑了刚架杆件的轴向变形。在矩阵位移法中,可以先将结构的所有结点位移都看作基本未知量。因此,如果一个平面桁架共有  $n$  个铰结点,则该桁架基本未知量的总数为  $2n$  个;如果一个平面刚架共有  $n$  个刚结点,则该刚架基本未知量的总数为  $3n$  个。显然,一旦所有这些结点位移的值被求解确定,就可以求得结构中各单元的内力。

在线弹性范围内,结构的位移与荷载之间具有唯一确定的关系。反映这种关系的是结构的刚度,它取决于其组成单元的刚度和结构的构成方式。在矩阵位移法中,单元和结构的刚度性质都采用矩阵的形式表达,分别称为单元刚度矩阵和结构刚度矩阵。单元刚度矩阵是单元的杆端力与杆端位移之间的关系矩阵。表达这种关系的数学式称为单元刚度方程。采用矩阵形式表达的单元刚度方程为

$$F^e = k^e \Delta^e$$



8.1

式中  $k^e$  即为单元刚度矩阵,可以利用静力法或能量原理导出; $\Delta^e$  为单元两端的结点位移向量; $F^e$  为单元两端的杆端力向量。以上上标“e”表示是对单元而言的。同样,对于一个结构,在未考虑支座约束前,结点力与结点位移之间的关系可表达为

$$K^0 \Delta^0 = F^0$$

上式称为结构的总刚度方程。式中  $K^0$  称为总刚度矩阵; $\Delta^0$  可称为总的结点位移向量; $F^0$  可称为总的结点力向量。以上上标“0”表示还未引入支座位移条件。应当注意的是, $\Delta^0$  和  $F^0$  中包括了所有结点(含支座结点)的结点位移和结点力在内。对于结构的线性分析来说,单元刚度矩阵和总刚度矩阵的元素均为常数。根据各单元刚度矩阵,以及由单元构成结构的几何形式,可以按一定的规则集生成总刚度矩阵。

结构总是在一定的支座条件之下承受荷载的,因此结构的某些结点位移实际上是已知的。例如,图 8-2a 所示的平面刚架,支座结点 1、3、5 的水平 and 竖向位移均为零,结点 1、5 的角位移也为零。结构的求解只有在考虑了它的支座位移条件之后才有可能,这样就需要将原结构的这些支座位移条件引入总刚度方程,从而得到对应于实际结构的刚度方程

$$K\Delta = F$$

上式称为结构刚度方程,其中  $K$  称为结构刚度矩阵; $\Delta$  中仅包括结构全部未知的结点位移; $F$  中仅包括与未知结点位移相应的各已知的结点荷载。 $\Delta$  和  $F$  分别称为结构的结点位移向量和结点荷载向量。结点荷载已知时,求解结构刚度方程便可得到所有未知的结点位移,此后就可以通过单元刚度方程求得每一个单元的杆端力并进而求得支座反力。

由上述可见,用矩阵位移法进行结构分析的大体步骤如下:

- (1) 结构标识。其中包括结点、单元编号和坐标系的设定;
- (2) 计算各单元刚度矩阵  $k^e$ ;
- (3) 生成总刚度矩阵  $K^0$  和总刚度方程  $K^0 \Delta^0 = F^0$ ;
- (4) 引入位移边界条件,形成结构刚度矩阵  $K$  和结构刚度方程  $K\Delta = F$ ;
- (5) 求解结构刚度方程,得未知的结点位移  $\Delta$ ;
- (6) 计算各单元杆端力和支座反力。

一般来说,单元刚度矩阵的通式是在单元为等截面直杆的条件下导得的。如果结构的某一个杆件是分段等截面的,在用矩阵位移法分析时,可以将该杆件的每一等截面段作为一个单元。例如,图 8-3 的刚架柱是分段等截面的,在结点和单元编号时每一根柱被作为两个单元。对于一般的变截面杆件或曲杆,可以近似地将其看作是由若干个分段等截面直杆构成的。当分段数足够多时,这种近似处理方法的计算精度可以得到保证。图 8-4 示出了对一横梁为曲杆的刚架,单元的划分以及结点和单元的编号方法。

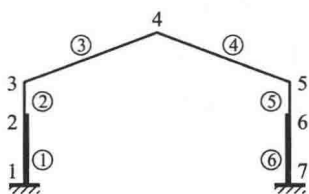


图 8-3

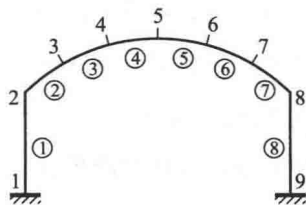


图 8-4





在采用矩阵位移法进行结构分析时,结构刚度方程的右端为结点荷载向量。因此,所有荷载均应化为等效结点荷载。如果仅有少数的集中荷载作用于杆件上时,也可以将集中荷载作用点作为一个结点来处理。这样,这些集中荷载也就成了结点荷载。例如,对于图 8-5a 所示的刚架,可以采用图 8-5b 所示的单元划分和结点、单元编号方法。

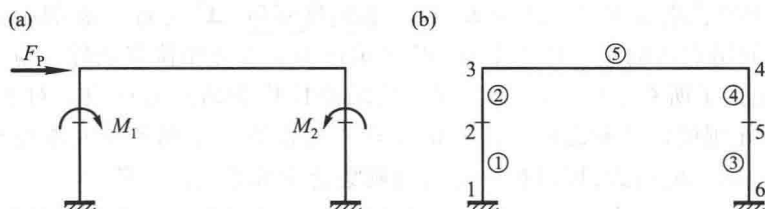


图 8-5

前面介绍了矩阵位移法的基本思路与大体步骤,其中结构的支座位移边界条件是在总刚度方程形成之后引入的,这种方法常称为矩阵位移法的后处理法。另外还有一种做法是,在生成单元刚度矩阵时就将实际的位移边界条件以及位移相关关系考虑进去,如此形成的总刚度方程也就是结构刚度方程。这种分析方法称为矩阵位移法的先处理法。

### § 8-3 单元刚度矩阵

单元刚度矩阵是反映单元两端的杆端位移与杆端力之间关系的矩阵。对于杆件单元来说,这种关系可以通过两种途径导得。一种途径是采用静力法推导,这就是本节中要介绍的方法;另一种途径是采用能量原理或虚功原理推导,将在第 10 章中介绍。

在上一节中提到,采用矩阵位移法分析结构时需设定一个结构坐标系,一般可采用右手坐标系,记为  $Oxy$ 。此时,结点位移和结点力均取与结构坐标的方向一致为正,其中结点的角位移和结点力矩按右手法则均取逆时针方向为正。以下用  $u$ 、 $v$  和  $\theta$  分别表示结点沿结构坐标系  $x$ 、 $y$  轴的线位移和沿逆时针方向的角位移,用  $F_x$ 、 $F_y$  和  $M$  分别表示沿上述方向的结点力。若仅有一个单元,结点力也就是单元的杆端力;对于一个由若干单元组成的结构,根据结点的平衡条件可知,结点力应等于与该结点相联结的各单元杆端力之和。

为了单元刚度矩阵推导的方便,可给每个单元设定一个单元的局部坐标系(单元坐标系)  $i\bar{x}\bar{y}$ 。局部坐标系也采用右手系,原点设在单元的一个端点,并且使它的  $\bar{x}$  轴与杆件的轴线相重合。局部坐标系相对于结构坐标系的方位角用  $\alpha$  表示,如图 8-6 所示。 $\alpha$  角定义为由结构坐标系的  $x$  轴沿逆时针方向转至局部坐标系的  $\bar{x}$  轴方向所转过的角度。为了便于区分,将字母上加一短划表示关于局部坐标系的量。局部坐标系中的杆端位移和杆端力分别用  $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 、 $\bar{\theta}$  和  $\bar{F}_x$ 、 $\bar{F}_y$ 、 $\bar{M}$  表示,它们均以与该单元的局部坐标方向一致为正。这样, $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$  和  $\bar{\theta}$  即表示杆端沿单元轴向、横向的位移和转角; $\bar{F}_x$ 、 $\bar{F}_y$  和  $\bar{M}$  也就是单元杆端的轴力、剪力和弯矩。

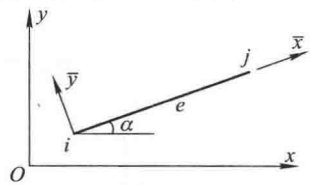


图 8-6

在学习矩阵位移法时应特别注意有关物理量的正负号规定,尤其是它们与在位移法中相