建工理國

魔法書

投考各大學理工研究所入學考試、甄試權威用書

工程數學（上）

ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS

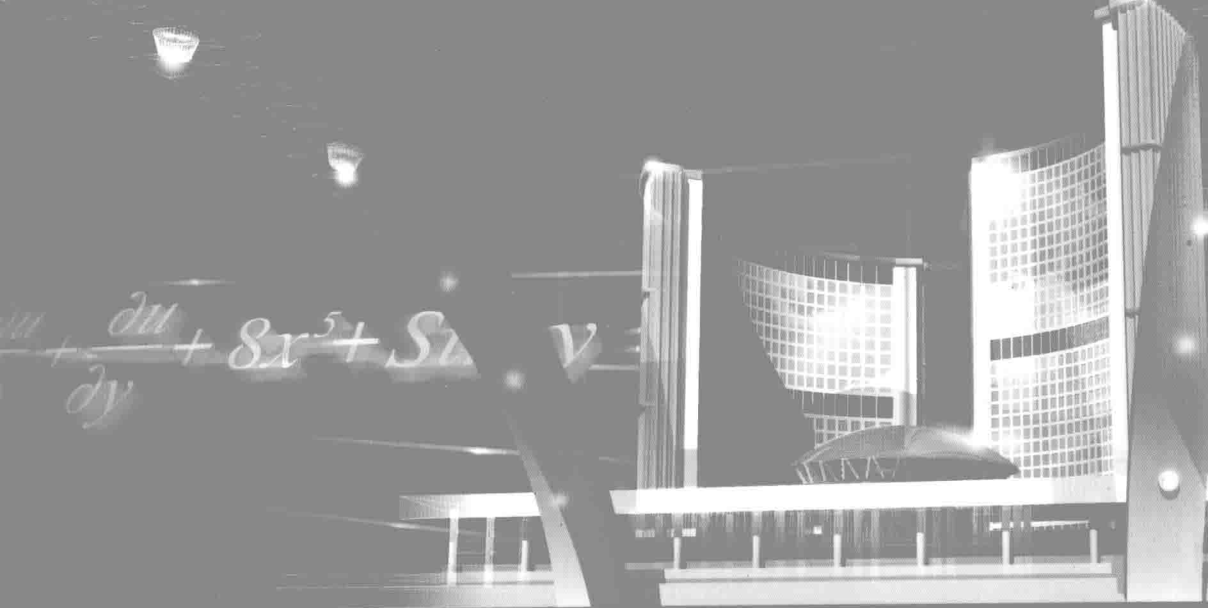
陳立・林易・周成 編著

高點

魔法書

投考各大學理工研究所入學考試、甄試權威用書

工程數學（上）



ADVANCED ENGINEERING
MATHEMATICS

陳立 · 林易 · 周成 編著

高點

《高點致勝叢書系列》

工程數學魔法書(上)

編著者：陳立・林易・周成

出版者：高點文化事業有限公司

建國補習班

郵　撥：15834067高點文化事業有限公司

電　話：(02)2381-5766

傳　眞：(02)2388-0876

E-mail：publish@mail.get.com.tw

行政院新聞局出版事業登記證局版臺業字第4833號

建議售價500元

M641A　　ISBN 957-814-623-X

2005.07

書序

我們鄭重推薦

建國理工研究所　致勝叢書

教科書的內容看到膩、參考書的習題做到煩，您還想藉由其它書籍來掌握考試命題的焦點嗎？本套書是為各位讀者所開設的自修課程，希望能幫助擁有好奇心的讀者們，重新點燃學習的熱誠。

對於面臨競爭激烈的研究所之考生而言，有些人因為求學時受過「學習傷害」，認為這門學科高深莫測，不容易懂，進而心生退卻，非到萬不得已，絕不輕言接觸，也因此錯失了考取理想學校的大好機會。而本套書的出版，就是希望扭轉這種錯誤刻板的印象。它從基礎觀念出發，逐步引導讀者掌握學習之鑰，真實演練相關原理，把以往學習上的困難與盲點一掃而光！

在學校的課堂中，同學常被訓練成在尋找標準答案，對錯誤的想法往往不加以重視；但真正的做學問，卻總是在鑽研為什麼有這樣的錯誤，進而跳脫學習的盲點、解題的陷阱。本套書中的解題觀念、解答過程，可以幫助讀者突破學習與思考的瓶頸，真正享受學習的樂趣。

正所謂「工欲善其事，必先利其器」，相信您一定了解到這套書，正是您應考準備的最佳利器，我們的專業再加上誠意與信念，表現於內容完整的編纂、精華重點的提示、以及每一細節的完善，在您逐頁閱讀後絕對可以感受得到。這樣的信心，除了來自我們本身輔導的實力、追求卓越的心意，也在許多同學、讀者的佳評下得到一致的肯定。選擇這套叢書，您就掌握了致勝關鍵，成為考場上最大的贏家！

序言

教授工程數學十五年來，筆者不斷嘗試將工程數學設計成一門趣味化的哲學，因為所有自然與人文科學的演化，最初都是建立在以關懷『**人生**』(life)為出發點的好奇與想像，是以不同的人寫出不同的日記：作家用筆寫日記；攝影家用 konica 寫日記；而數學家則是用數學符號來寫日記，這些人對哲學思維有著相同的執著與狂熱，他們只是輸出(output)工具不同罷了，套用陳之藩先生之名言，他們都是『哲學家皇帝』。

基於上述理念，我希望我的學生能**避免死背公式**，因為死背公式就像難以消化的食物，終必完完整整地排泄出去，留下來的只有痛苦的回憶罷了！幸而我的學生可以透過老師在課堂上利用**生活化的道具**，產生**趣味化的聯想**，輔以**口訣**來背誦，這樣的數學能從硬梆梆的數字轉而成為哲學思考的靈感，達到無痛苦學習的境界，進而培養出獨立思考的學生。

本系列叢書網羅 90 到 94 年最新國內研究所之所有考題與類型，除去其中艱深難以筆傳，只能在我的課堂上教授的題目之外，全書內容完全依照老師上課內容編排，可同時適合我的學生與遠道的讀者自修，全書並將老師上課口傳的理念，訴諸文字於每章節頭之『**重點整理**』與『**觀念突破**』中，所有考題細分成各個題型，讓讀者能放手大膽解題，以達舉一反三、事半功倍之效。

惟筆者的能力有限，恐千慮一失，書中若有任何錯誤，尚祈學者先進不吝上『陳立經典網站』指正，我們會將勘誤公告於 www.陳立.tw 網站上。

在執教的歲月裡，感謝能有知己林德博士相扶持與鼓勵，讓忙碌的學術生涯，不致空留獨行孤寂身影的遺憾，這應該就是所謂『德不孤，必有鄰(林)』吧!

最後要感謝家人的全力支持，讓忙碌於南北奔波的我，對回家有無限的溫馨期待。

陳立 2005 仲夏于台大醉月湖畔

著作權／不容侵犯

下列文字爲著作權法之部分條文，仁人君子敬請自重，凡侵犯著作權者，必依法究辦。

《著作權法》第六章　權利侵害之救濟

■第八十七條

有下列情形之一者，除本法另有規定外，視爲侵害著作權或製版權：

一　以侵害著作人名譽之方法利用其著作者。

二　明知爲侵害製版權之物而散布或意圖散布而公開陳列或持有者。

三　輸入未經著作財產權人或製版權人授權重製之重製物或製版物者。

四　未經著作財產權人同意而輸入著作原件或其重製物者。

五　以侵害電腦程式著作財產權之重製物作爲營業之使用者。

六　明知爲侵害著作財產權之物而以移轉所有權或出租以外之方式散布者，或明知爲侵害著作財產權之物意圖散布而公開陳列或持有者。

《著作權法》第七章　罰　則

■第九十一條

擅自以重製之方法侵害他人之著作財產權者，處三年以下有期徒刑、拘役，或科或併科新臺幣七十五萬元以下罰金。

意圖銷售或出租而擅自以重製之方法侵害他人之著作財產權者，處六月以上五年以下有期徒刑，得併科新臺幣二十萬元以上二百萬元以下罰金。

以重製於光碟之方法犯前項之罪者，處六月以上五年以下有期徒刑，得併科新臺幣五十萬元以上五百萬元以下罰金。

著作僅供個人參考或合理使用者，不構成著作權侵害。

■第九十二條

擅自以公開口述、公開播送、公開上映、公開演出、公開傳輸、公開展示、改作、編輯、出租之方法侵害他人之著作財產權者，處三年以下有期徒刑、拘役，或科或併科新臺幣七十五萬元以下罰金。

參考書目

1. Dennis G. Zill, Michael R. Gullen, "**Advanced Engineering Mathematics**," Jones and Bartleet.
2. Erwin Kreyszig, "**Advanced Engineering Mathematics**," John Wiley and Sons.
3. C. Ray Wylie, Louis C. Barrett, "**Advanced Engineering Mathematics**," McGraw-Hill.
4. Michael D. Greenberg, "**Advanced Engineering Mathematics**," Prentice Hall.
5. Peter V. O'Neil, "**Advanced Engineering Mathematics**," Brooks/Cole Publishing Company.

目　錄

第一章　微分方程式緒論　／1-1

第二章　一階常微分方程式

§2-1　分離變數法　／2-1

題型 1：直接可分離型　／2-8

題型 2：變換再分離型　／2-17

§2-2　齊次方程式(homogeneous differential equation)　／2-25

題型 1：齊次方程式　／2-26

題型 2：座標平移型　／2-31

§2-3　正合方程式與積分因子　／2-35

題型 1：正合方程式　／2-40

題型 2：積分因子　／2-47

§2-4　合併積分法　／2-55

§2-5　一階線性常微分方程式　／2-65

題型 1：一階線性常微分方程式　／2-66

題型 2：非線性 $\xrightarrow[\text{變數變換}]{}$ 線性　／2-73

題型 3：顛倒型　／2-76

§2-6　白努力(Bernoulli)方程式與李卡迪(Riccati)方程式　／2-79

題型 1：白努力(Bernoulli)常微分方程式　／2-79

題型 2：李卡迪(Riccati)常微分方程式　／2-88

§2-7　參數變更法(Variation of Parameters)　／2-92

§2-8 高次非線性 O.D.E.之奇解與通解 ／2-95
題型 1：導數型 $y'=f(x,y)$ ／2-96
題型 2：因式分解法 ／2-99
§2-9 解之存在性與唯一性 ／2-103
§2-10 皮卡迭代法(Picard's Iteration Method) ／2-107

第三章 二(高)階常係數線性微分方程式

§3-1 線性獨立與 Wronskian 行列式 ／3-1
§3-2 二(高)階常係數 O.D.E.之齊性解 ／3-11
§3-3 二(高)階常係數 O.D.E.之特解 ／3-23
題型 1：待定係數法 ／3-30
題型 2：參數變更法 ／3-62
題型 3：積分公式法 ／3-83

第四章 二(高)階變係數微分方程式

§4-1 尤拉－柯西等維方程式(Euler-Cauchy equation) ／4-1
題型 1：齊性 Euler-Cauchy 等維方程式 ／4-2
題型 2：二階非齊性 Euler-Cauchy 等維方程式 ／4-8
題型 3：三階非齊性 Euler-Cauchy 等維方程式 ／4-21
題型 4：座標平移型 ／4-23
§4-2 觀察齊性解(參數變更法) ／4-25
§4-3 高階正合方程式 ／4-42
§4-4 因變數變更(參數變更) ／4-47
§4-5 自變數變更 ／4-50
§4-6 缺項型微分方程式 ／4-53
題型 1：因變數 y 缺項 ／4-53
題型 2：自變數 x 缺項 ／4-55

第五章　聯立線性 O.D.E.　／5-1

第六章　特殊定義之函數

§6-1　「微積分第一定理」與「萊布尼茲法則」　／6-1
§6-2　Unit Step Function (Heavside function)　／6-6
§6-3　Delta Function(Unit Impluse Function)　／6-9
§6-4　Gamma Function　／6-12
§6-5　Beta Function　／6-19

第七章　拉卜拉斯變換

§7-1　拉卜拉斯變換(Laplace Transform)與其逆變換　／7-1
§7-2　基本運算定理　／7-18
題型 1：尺度變換定理　／7-22
題型 2：s 軸平移定理(第一平移定理)　／7-23
題型 3：t 軸平移定理(第二平移定理)　／7-27
題型 4：微分之 Laplace 變換　／7-35
題型 5：積分之 Laplace 變換　／7-36
題型 6：Laplace 變換之微分　／7-37
題型 7：Laplace 變換之積分　／7-41
題型 8：初值定理與終值定理　／7-43
題型 9：褶積與褶積定理(convolution theorem)　／7-45
題型 10：Delta function 之 Laplace 變換　／7-50
§7-3　週期函數之拉卜拉斯變換　／7-53
§7-4　以 Laplace transform 解 O.D.E.　／7-62
§7-5　以 Laplace transform 解聯立 O.D.E.　／7-92
題型 1：齊性型　／7-92
題型 2：非齊性型　／7-98
§7-6　解無界域且邊界條件 B.C.與距離 x 無關之 P.D.E.　／7-105

§7-7　以 Laplace transform 解積分方程式　／7-113
§7-8　Laplace transform 公式總表　／7-121

第八章　常微分方程式之級數解

§8-1　基本定義　／8-1
§8-2　O.D.E.之冪級數解法(泰勒級數)　／8-7
題型 1：泰勒級數法　／8-12
題型 2：遞迴關係式(recurrence relation)　／8-18
題型 3：座標平移型　／8-25
§8-3　O.D.E.之 Forbenius 級數解法　／8-26
題型 1：$r_1 - r_2 \neq$ 整數　／8-36
題型 2：$r_1 = r_2$(重根)　／8-43
題型 3：$r_1 - r_2 =$ 整數且小根會使得係數a_n不存在　／8-51
題型 4：$r_1 - r_2 =$ 整數但係數a_n存在　／8-56

第九章　Bessel 與 Legendre 函數

§9-1　Bessel 方程式與 Bessel 函數　／9-1
§9-2　Bessel O.D.E.之推廣型 O.D.E.　／9-12
題型 1：廣義型 Bessel O.D.E.　／9-18
題型 2：修正型 Bessel O.D.E.(Modified Bessel O.D.E.)　／9-20
題型 3：因變數變更型　／9-21
題型 4：自變數變更型　／9-23
題型 5：雙效合一型　／9-25
§9-3　Bessel 函數之性質　／9-30
§9-4　Legendre 方程式　／9-41
§9-5　Legendre 多項式(函數)之性質　／9-49

第十章　Sturm-Liouville 邊界值問題(Sturm-Liouville B.V.P.)

§10-1　基礎觀念　／10-1
§10-2　Regular(規則型)Sturm-Liouville B.V.P.　／10-5
題型 1：一般型　／10-5
題型 2：平移型　／10-18
題型 3：Cauchy 等維型　／10-20
§10-3　Periodic(週期型)Sturm-Liouville B.V.P.　／10-29
§10-4　特徵函數的內積與正交性　／10-34
§10-5　廣義之 Fourier 級數　／10-44
§10-6　史特姆－李維爾(Sturm-Liouville)定理　／10-59

第十一章　傅立葉級數與傅立葉積分

§11-1　傅立葉級數(Fourier Series)　／11-1
§11-2　奇、偶函數之 Fourier series　／11-21
題型 1：奇函數之 Fourier sine 級數　／11-25
題型 2：偶函數之 Fourier cosine 級數　／11-30
§11-3　半幅展開與全幅展開　／11-34
§11-4　指數型之傅立葉級數　／11-51
§11-5　傅立葉積分與轉換　／11-55
題型 1：Fourier 變換　／11-58
題型 2：Fourier 三角變換　／11-62
§11-6　Fourier 變換之基本性質　／11-68
§11-7　以 Fourier 分析解微分方程式　／11-89
題型 1：以 Fourier 級數解 D.E.　／11-89
題型 2：Fourier 變換解 D.E.
(由奇異型 forcing term 來判斷基底)　／11-93

第十二章　P.D.E.(I)卡氏座標之熱傳與波動偏微分方程式

§12-0　基礎觀念　／12-1
§12-1　規則型齊性 P.D.E.　／12-3
題型 1：齊性熱傳導 P.D.E.　／12-5
題型 2：齊性波動 P.D.E.　／12-24
題型 3：挫屈 P.D.E.之分離變數法　／12-38
題型 4：二維齊性 P.D.E.　／12-40
§12-2　非齊性 P.D.E.之暫態、穩態解　／12-49
§12-3　非齊性 P.D.E.但 B.C.齊性　／12-59
§12-4　非齊性且與時間 t 有關　／12-67
§12-5　無界域(奇異型)齊性 P.D.E.　／12-73

第十三章　P.D.E.(II)卡氏座標之 Laplace 方程式

§13-1　齊性規則 P.D.E.　／13-2
題型 1：齊性 1 維規則型　／13-2
題型 2：齊性 2 維規則型(疊加法)　／13-13
§13-2　齊性無窮型 P.D.E.　／13-20
§13-3　非齊性 Laplace P.D.E.　／13-27

第十四章　P.D.E.(III)極座標、圓柱座標與球座標

§14-1　極座標之 Laplace P.D.E.　／14-1
題型 1：內部型　／14-2
題型 2：外部型　／14-9
題型 3：圓環型(中間型)　／14-10
題型 4：扇型　／14-16
題型 5：非齊性型　／14-23
§14-2　極座標與圓柱座標之熱傳導、波動 P.D.E.　／14-25
題型 1：齊性一般型　／14-27

題型 2：齊性軸對稱型 ／14-31
題型 3：非齊性型 ／14-41
§14-3 圓柱座標之 Laplace P.D.E. ／14-49
題型 1：一般型 ／14-50
題型 2：軸對稱型 ／14-52
§14-4 球座標之 Laplace P.D.E. ／14-55

第十五章 P.D.E.(IV)一階 Lagrange 方程式與二階偏微分方程式

§15-1 一階 Lagrange 方程式 ／15-1
§15-2 常係數 P.D.E. ／15-8
題型 1：齊性解 ／15-12
題型 2：通解 ／15-15
§15-3 D'Alembert 波動方程式解 ／15-18
§15-4 線性二階 P.D.E.之分類與解法 ／15-26
§15-5 變數結合法
(The method of combination of Variables) ／15-33

第一章 微分方程式緒論

⇨重點整理⇦

1. **函數(function)**：

A,B 為二非空集合，A 中的任何一元素 x，均可透過 f 的關係式，在 B 中找到與之對應之唯一確定元素 y，則稱此種對應關係 f 為由 A 映至 B 的函數。其中 A 為『**定義域**』(**Domain**)，其內任一元素 x 為『**自變數**』；而 B 為『**值域**』(**Range**)，其內任一元素 y 為『**因變數**』，記為 f：$A \rightarrow B$。

2. **微分方程式**（**Differential Equation., D .E .**）

(1) **定義**：
透過微分來描述「**自變數**」與「**因變數**」關係的數學式，稱為『**微分方程式**』。

(2) **微分方程式之類型**：

①**常微分方程式(Ordinary Differential Equation., O .D .E .)**：
定義：只有一個自變數的微分方程式。
例如：$y'' + 2xy' + x^2 y = \sin x$

②**偏微分方程式(Partial Differential Equation., P .D .E .)**：
定義：含有兩各以上自變數的微分方程式。
例如：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

3. **階(order)**：因變數 y 被微分之最高數目。

4. **次(degree)**：將微分方程式化為<u>**最簡有理整式**</u>，其中<u>**最高階導數**</u> $y^{(n)}$ 之次方，即為該微分方程式之次數。

5. **線性(linear)**：所有因變數 y 及其各階導數 $y^{(n)}$ 的次數皆 1 次方，則稱該方程式為『**線性微分方程式**』。

<u>**註 1**</u>：線性方程式一定可以寫成

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots\cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x)$$

<u>**註 2**</u>：線性方程式必無因變數 y 及導數 $y^{(n)}$ 相乘之項。

6. **解(solution)之種類**：（$\forall n$ 階微分方程式）
   (1) **通解 (general solution)**：
   n 階微分方程式之解中，含有 n 個獨立常數，則此解為『**通解**』。
   (2) **特解 (particular solution)**：
   n 階微分方程式求出通解後，設定任意常數，使之滿足邊界條件，則稱此解為『**特解**』。
   (3) **奇解（singular solution）**：
   不能由通解中設定任意常數值而獲得之解，稱之為『**奇解**』，奇解僅在高次非線性微分方程式才有可能發生。

7. **解之幾何意義**：

   (1) **通解**：在座標平面上所有滿足微分方程式之曲線，所成集合之「曲線族」，即為『**通解**』。

   (2) **特解**：在座標平面上所有滿足微分方程式之曲線族(通解)中的「任一條曲線」，均為『**特解**』。

   (3) **奇解**：在座標平面上所有滿足微分方程式之曲線族(通解)所圍成之「包絡線」(envelope curve)，稱之為『**奇解**』。

範例導引，一路領先

範例 1

請寫出一個 n 階初始值問題(initial value problem of nth order)的數學表示式。 (5%)【90 中央環工】

【詳解】 O.D.E. $y^{(n)}+y=0$

I.C. $y(0)=y'(0)=y''(0)=\cdots=y^{(n-1)}(0)=0$

範例 2

說明下列的微分方程式是**線性**或是**非線性**？並指出它的**階數**(order)。

(1) $\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^2+\dfrac{dy}{dx}+y=0$ (5%)

(2) $x^3\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)+\left(e^x+\cos(x^4)\right)\dfrac{dy}{dx}=e^x+x^4+x+1$ (5%) 【元智電機】

【詳解】：(1) **非線性**，3 階 2 次。

(2) **非線性**，3 階 1 次。

範例 3

指出下列常微分方程為線性或非線性，並說明你的理由：

(a) **一階正合(exact)微分方程** $e^x\sin y-2x+\left(e^x\cos y+1\right)y'=0$

(b) **白努力(Bernoulli)方程** $y'+x^{-1}y=3x^2y^3$

(c) **非齊次(non-homogeneous) Euler 方程式** $x^2y''+3xy'-15y=\sin x$

【90 台科化工】

【詳解】：所有因變數 y 及其各階導數 $y^{(n)}$ 的次數皆 1 次方，則稱該方程式為『**線性微分方程式**』，故 (a)非線性；(b)非線性；(c)線性。