华腾教育

高等学校教材经典同步辅导丛书数学专业类(二)

配高教社《实变函数与泛函分析基础》第二版 程其襄等 编

实变函数与泛函分析基础

(程其襄 第二版)

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心

◆紧扣教材 ◆知识精讲 ◆习题全解

◆应试必备 ◆联系考研 ◆网络增值

中国矿业大学出版社

高等学校教材经典同步辅导丛书

实变函数与泛函分析基础

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心

中国矿业大学出版社

内容提要

本书是高等教育出版社出版，程其襄、张奠宙、魏国强、胡善文及王漱石编的《实变函数与泛函分析基础》（第二版）教材的配套辅导书。本书由课程学习指南、学习导引、知识点归纳、答疑解惑、典型例题与解题技巧及课后习题全解等部分组成，旨在帮助读者掌握知识要点，学习分析问题和解决问题的方法技巧，并提高学习能力及应试能力。

本书可供高等院校实变函数课程的同步辅导使用，也可作为研究生入学考试的复习资料，同时可供本专业教师及相关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

实变函数与泛函分析基础同步辅导及习题全解 / 宁波主编. —徐州：中国矿业大学出版社，2008.1(2009.2 重印)

(高等学校教材经典同步辅导丛书)

ISBN 978-7-81107-913-5

Ⅰ. 实… Ⅱ. 宁… Ⅲ. ①实变函数—高等学校—教学参考资料②泛函分析—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 003075 号

书　　名　实变函数与泛函分析基础同步辅导及习题全解

主　　编　宁　波

责任编辑　罗　浩

特约编辑　陈兴来

出版发行　中国矿业大学出版社

印　　刷　北京市昌平百善印刷厂

经　　销　新华书店

开　　本　850×1168　1/32　**本册印张** 6.75　**本册字数** 220 千字

印　　次　2009 年 2 月第 1 版第 1 次印刷

总 定 价　77.80 元

前言

PREFACE

实变函数与泛函分析是数学类专业重要的基础课之一，也是报考该类专业硕士研究生的专业考试课程之一。程其襄等编的《实变函数与泛函分析基础》（第二版）以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材，被全国许多院校采用。

为了帮助读者更好地学习这门课程，掌握更多知识，我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《实变函数与泛函分析基础同步辅导及习题全解》（第二版）。本书旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与解题技巧，进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材，具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑到实变函数与泛函分析这门课程的特点，我们在内容上做了以下安排：

1. 课程学习指南　从该课程的知识体系出发，对各个章节在全书的位置，以及与其他章节的联系作了简明扼要的阐述，使学习更有重点。

2. 学习导引　介绍本章的主要内容及其相互联系，明确学习任务。

3. 知识点归纳　串讲概念，总结性质和定理，使得知识全面系统，便于掌握。

4. 答疑解惑　归纳各章重点、难点，有助于学生把握概念之间本质的区别，解题思路。

5. 典型例题与解题技巧　精选各类题型，涵盖本章所有重要知识点，对题目进行深入、详细的讨论与分析，并引导学生思考问题、能够举一反三，拓展思路。

6. 课后习题全解　本书给出了程其襄等编的《实变函数与泛函分析基础》(第二版)各章课后习题的答案。我们不仅给出了详细的解题过程，而且对有难度或综合性较强的习题做了分析和小结，从而更好地帮助学生理解掌握每一知识点。

本书在编写时参考了大量的优秀教材和权威考题。在此，谨向有关作者和所选考试、考研试题的命题人以及对本书的出版给予帮助和指导的所有老师、同仁表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，本书难免出现不妥之处，恳请广大读者批评指正。

联系我们

华腾教育网：http://www.huatengedu.net

电子邮件：huateng@huatengedu.com

华腾教育教学与研究中心

目 录

CONTENTS

课程学习指南

实变函数与泛函分析基础是数学类及其相关专业重要的一门核心理论基础课，也是以后继续深化系统学习数学理论的基础课程，同时也是数学类各专业硕士研究生入学考试的科目之一。

学习实变函数与泛函分析基础课程的目的是掌握实变函数与泛函分析基础的基本理论，进而提高自己解决实际问题的能力。在社会经济高速发展的今天，实变函数与泛函分析基础在工程方面的应用越来越普遍。

实变函数与泛函分析基础课程具有很强的理论性和系统性，需要一定的理论分析能力与逻辑思维能力，因此在学习本课程之前最好有计划地进行适当的预习，并了解一下相关理论的发展历程，对所学的课程有一个体系性的把握。同时本课程又是一门指导性的学科，对它的掌握直接关系到数学专业的其他后续课程。

高等代数 数学分析 概率论 解析几何 常微分方程	⇒	实变函数与 泛函分析基础

本书包含十一章内容，可分为两个部分。第一部分为前六章，属于实变函数部分，重点在建立勒贝格测度、积分理论等内容，第二部分为后五章，主要介绍度量空间、巴拿赫空间、希尔伯特空间、线性泛函数和线性算子的重要定理等内容。

实变函数与泛函分析基础是一门逻辑性很强的课程，因此学习这门课程

有一定难度。为了学好这门课程，建议在学习过程中应按以下方法学习：

1. **理解掌握基本概念与定理，掌握基本方法。**

2. **注意理论前后发展的系统性与关联性，做到融会贯通。**

3. **要注意应用所学的理论分析实际问题，做到理论与实际相结合。**

4. **要养成综合分析，认真思考的良好学习习惯。**

此外，为了帮助学生在考研、期末等考试中取得好成绩，我们提出以下建议：

1. **勤动脑、爱思考。**将课程中所学的理论知识与实际问题相结合，认识到知识的力量在应用实践。

2. **多阅读、善分析。**要重点阅读一些实变函数与泛函分析基础方面的书籍，提高自己的分析能力及综合理论素质，并归纳总结解题的思维方法，做到学为所用，举一反三。

第一章

集　　合

学习导引

集合这个概念是数学中的原始概念之一，于 19 世纪 70 年代由康托尔首先提出，而后集合的观点和方法迅速渗透到数学的各个分支，对现代数学的发展起了巨大的推动作用，集合论不仅是实变函数与泛函分析的基础，同时也是其他数学分支的基本工具.

本章介绍了一些集合理论，把集合的并与交运算推广到了无限多个的情形，并引入了集合列的上限集与下限集的运算，集合对等与集合基数的概念，并对集合运算规则作了仔细的讨论，这些内容也可以为读者学习其他近代数学理论作一些准备.

知识点归纳

一、集合

1. 集合概念

在一定范围内的个体事物的全体，当将它们看作一个整体时，我们把这个整体称为一个集合，其中每个个体事物叫做该集合的元素. 我们用符号属于“$\in$”和不属于“$\notin$”表示集合和它的元素间的关系.

集合可用列举法或描述法表示，如：

$$A=\{1,2,3,4,5\}\text{或}A=\{x\mid x<6,x\in\mathbf{N}\}.$$

(1)对于两个集合 A 与 B，若 $x\in A$ 必有 $x\in B$，则称 A 包含于 B 或 B 包含 A，记做 $A\subset B$，或 $B\supset A$，若 $A\subset B$，且 B 中含有不属于 A 的元素，则称 A 是 B 的

真子集，记做 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$.

(2)设 A,B 是两个集合，若 $A\subset B$ 且 $B\supset A$，则称集合 A 与 B 相等，记做 $A=B$.

(3)设 Λ 是任给的一个集合，对于每一个 $\alpha\in\Lambda$，我们指定一个集合 A_α，这样得到的集合的总体称为集合族，记为 $\{A_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}$. Λ 称为指标集，当 $\Lambda=\mathbf{N}$ 时，$\{A_\alpha\}$ 也称集合列，记做 $\{A_k\}$.

集合可分为空集、有限集与无限集.

2. 集合的运算

(1)集合的并和交运算

设 A,B 是两个集合，则称集合 $\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 为 A 与 B 的并集或和集，记做 $A\cup B$.

设 A,B 是两个集合，则称集合 $\{x\mid x\in A,x\in B\}$ 为 A 与 B 的交集或通集，记做 $A\cap B$，若 $A\cap B=\varnothing$，称 A 与 B 不相交.

运算性质

①交换律　$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$；

②结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

③分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),A\cap(\bigcup\limits_{\alpha\in A}B_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in A}(A\cap B)$；

④$A\cup A=A,A\cap A=A$；

⑤$(A\cap B)\subset A\subset(A\cup B)$；

⑥若 $A_\alpha\subset B_\alpha,\alpha\in\Lambda$，则 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\subset\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha$.

(2)集合的差和余运算

设 A,B 是两个集合，则称集合 $\{x\mid x\in A,x\overline{\in}B\}$ 为 A 与 B 的差集，记做 $A\backslash B$（读做 A 减 B）.

当 A 是 S 的子集时，称 $S\backslash A$ 是集合 A 关于 S 的补集或余集，记做 $\complement_S A=S\backslash A$.

$A\backslash B$ 运算有以下性质：

①$A\cup\complement_S A=S$(全集)，$A\cap\complement_S A=\varnothing$，$\complement_S(\complement_S A)=A$，$\complement_S S=\varnothing$，$\complement_S\varnothing=S$；

②$A\backslash B=A\cap\complement_S B$；

③若 $A\supset B$，则 $\complement_S A\subset\complement_S B$；若 $A\cap B=\varnothing$，则 $A\subset\complement_S B$；

④德·摩根(De Morgan)律：$\complement_S(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}\complement_S A_\alpha$；

⑤$\complement_S(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\complement_S A_\alpha$.

(3)集合列的上极限和下极限

设$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是任意一列集，由属于上述集列中无限多个集的那种元素的全体所组成的集称为这一集列的上限集或上极限，记为$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$或$\lim\limits_{n\to\infty}\sup A_n$；对集列$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$那种除有限个下标外，属于集列中每个集的元素全体所组成的集称为这一集列的下限集或下极限，记为$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$或$\lim\limits_{n\to\infty}\inf A_n$.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{x\mid 存在无穷多个A_n，使x\in A_n\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m；$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{x\mid 当n充分大以后都有x\in A_n\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m.$$

一般地，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$；如果$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，则称集列$\{A_n\}$收敛，将这一集称为$\{A_n\}$的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

(4)集合的直积

设X、Y是两个集合，称一切有序“元素对”(x,y)(其中$x\in X,y\in Y$)构成的集合为X与Y的直积集，记做$X\times Y$，即

$$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}.$$

二、对等与基数

1. 映射

(1)映射的定义：设X,Y为两个非空集合，若对每个$x\in X$，都有惟一的$y\in Y$与之对应，则称这个对应为映射(变换或函数)，记做$f: x\to Y$，并称f是从X到Y的一个映射. $x\in X$在Y中对应的y称为x在映射f下的(映)像，x称为y的一个原像，记做$y=f(x)$.

若对每一个$y\in Y$，均有$x\in X$，使得$y=f(x)$，则称此f为从X到Y的满射(也定义为：如果映射f满足$f(X)=Y$，称f是X到Y的满射).

设$f: X\to Y$. 当$x_1,x_2\in X$，且$x_1\neq x_2$时，有$f(x_1)\neq f(x_2)$，则称f是从X到Y的一个单射.

若f既是单射又是满射，则称f是X到Y上的一一映射. 在一一映射下，映射$\psi: Y\to X$称为φ的逆映射，记做φ^{-1}，其中x由关系$y=\varphi(x)$确定. 一一映射

又称双射.

设 $f: X \to Y$, $g: Y \to W$,则由 $h(x)=g[f(x)]$, $x\in[x]$定义的 $h: X\to W$ 称为 g 与 f 的复合映射.

(2)映射的性质

对于 $f: X\to Y$ 以及 $A\subset X$,记

$$f(A)=\{y\in Y \mid x\in A, y=f(x)\},$$

称 $f(A)$为集合 A 在映射 f 下的映像集($f(\varnothing)=\varnothing$). 有

$$f(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f(A_\alpha),\ f(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)\subset\bigcap_{\alpha\in\Lambda}f(A_\alpha).$$

对于 $f: X\to Y$ 以及 $B\subset Y$,记

$$f^{-1}(B)=\{x\in X: f(x)\in B\},$$

称 $f^{-1}(B)$为集合 B 关于 f 的原像集,有:若 $B\subset A$,则

$$f^{-1}(B)\subset f^{-1}(A);\ f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(B_\alpha);$$

$$f^{-1}(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(B_\alpha);\ f^{-1}(B^C)=\complement_S(f^{-1}(B)).$$

2. 集合的对等

(1)对等的定义

设 A、B 是两个非空集合,如果存在某 $\varphi: A\xrightarrow{1-1}B$,则称 A 和 B 对等,记为 $A\sim B$,此外规定$\varnothing\sim\varnothing$.

(2)对等关系的性质

①自反性　$A\sim A$;

②对称性　若 $A\sim B$,则 $B\sim A$;

③传递性　若 $A\sim B$, $B\sim C$,则 $A\sim C$.

设$\{A_n\}$和$\{B_n\}$为两集列. 集列$\{A_n\}$中任何两个集不相交,集列$\{B_n\}$中的集亦两两不相交,即 $A_{n'}\cap A_{n''}=\varnothing$, $B_{n'}\cap B_{n''}=\varnothing$(当 $n'\neq n''$),如果 $A_n\sim B_n$($n=1,2,3,\cdots$),则$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\sim\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$.

(3)两个集合对等的判定方法

(伯恩斯坦定理)设 A、B 是两个非空集合. 如果 A 对等于 B 的一个子集,B 又对等于 A 的一个子集,那么 A 对等于 B.

基本方法主要有以下三种:

一是根据对等的定义来进行论证,即构造两个集合之间的 1-1 对应关系;

二是利用伯恩斯坦定理来论证，即欲证 $A \sim B$，只需证明 A、B 各与对方的一个子集对等即可；三是利用对等的传递性来进行证明.

3. 集合的基数

设 $M_n=\{1,2,\cdots,n\}$，A 是一个集合. 如果 A 是一个空集或与某个 M_n 对等，则称 A 为有限集，并称 n 为 A 的基数. 空集的基数规定为零，不是有限集的集称为无限集.

M_n 不能与它的真子集对等.

集合 A 为有限集的充要条件是 A 决不与其真子集对等，集合 A 为无限集的充要条件是 A 必能与其某些真子集对等.

有限集的基数是唯一的.

在对一切集合进行分类时，规定彼此对等的集归为一类，不对等的集属于不同的类. 我们赋予每一个这样的类一个记号，称之为这类集合中任一集合的基数(或势)，用 $\overline{\overline{A}}$ 来表示.

三、可数集合

凡和全体正整数所成之集合 $\mathbf{N}$ 对等的集合都称为可数集合或可列集合.

从定义出发，可得到一个集合 A 是可数集合的充要条件为：A 可以排成一个无穷序列：$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$.

任一无限集必含一可数可集.

同时，若 $A_n(n=1,2,\cdots,n)$ 为可数集，则并集 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 或 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{m}A_n$ 都是可数集.

如果集 A 是由有限个指标决定的元素 $a_{x_1,x_2\cdots x_n}$ 的全体，其中每个指标 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$ 在有限集或可数集上独立变化，则 A 必为有限集或可数集.

可数集合的任何无限子集必为可数集合，从而可数集合的任何子集或者是有限集或者是可数集.

有理数全体和代数数的全体各成一可数集.

四、不可数集合

1. 不可数集合的定义

不是可数集合的无限集合称为不可数集合，如全体实数所成集合 $\mathbf{R}$.

2. 连续基数与可数基数

连续基数指全体实数所成集合 $\mathbf{R}$ 的基数，用 c 表示；

可数基数指全体正整数所成集合 $\mathbf{N}$ 的基数,用 a 表示.其中 $a<c$.

3. 无最大基数定理

若 A 是非空集合,则 A 与其幂集(由 A 的一切子集所构成的集合族)不对等.

答疑解惑

1. 证明一个集合是可数集常用的方法

求得一可数集 B,使得所判定的集合 A 与 B 对等,通常取 B 为有理数集或有理端点区间所构成的集合;分解集合 A 为可数个可数集之并或有限个可数集之并,此时分解集的技巧是最重要的;利用教材中定理 6 判断集合是否可数.

2. 对等概念的数学意义

利用映射概念给两个集合的对等下的定义是:如果 A,B 是非空集合,存在一个从 A 到 B 的一一对应(双射),则称 A 和 B 对等,对等意味着两个集合有同样多的元素.

对于有限集,它的元素一定不能与其真子集有同样多的元素是显然的,所以有限集必不与其真子集对等.对于无限集,则必与其某些真子集对等,即无限集与其真子集有相同多的元素,这似乎不好理解,但却是可以证明的事实.

3. 正确理解集合族的概念

集合族也称集族,即若有任意集合 Λ(有限集或无限集).如果对 Λ 中每个元素 α,都有一个集合 A_α 与之对应,则所有的 A_α 组成一个集合(此时集合 A_α 作为一个元素)称为以 Λ 为指标集的集族,记做 $\{A_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}$ 或 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.

集族即以集合为元素的集合.

若 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是任意集族,则 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 是 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的并集,$\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 是 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的交集.

4. $\in$ 和 $\subset$ 的区别

“$\in$”表示集合与其元素之间的从属关系,而“$\subset$”表示集合与集合之间的包含关系.$a\in A$ 不能写成 $a\subset A$,但可以写做 $\{a\}\subset A$,此时 $\{a\}$ 表示只含元素 a 的“单元素集”.

5. 上极限与下极限的概念

设 $A_1,A_2\cdots,A_k,\cdots$ 是任意一列集合,则由属于上述集列中无限多个集的那