

SHUZHUA JINGZHUN ZHONGYIXUE

# 数字化精准中医学

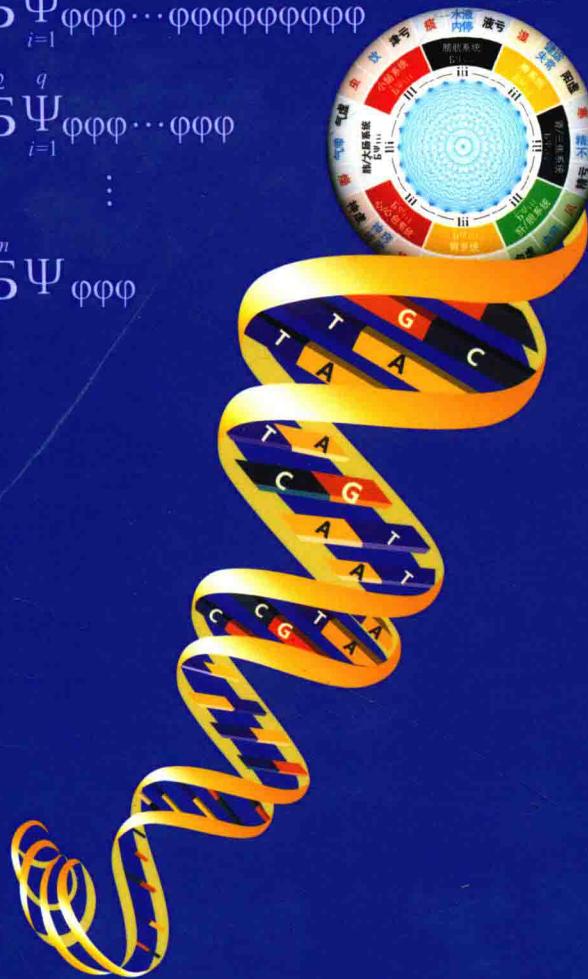
$$\S = \Psi_{i=1}^n \begin{matrix} & C A A & A C C & A C A \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ & i i i & l i i & l i i & l i i & l i i & l i i & l i i & l i i & l i i \end{matrix} \begin{matrix} & T C A & C A G & A C G \\ 6 & 1 & 3 & 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 4 \end{matrix}$$

$$1 \quad p \\ \Sigma \Psi_{i=1} \varphi \varphi \varphi \cdots \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi \varphi$$

$$2 \quad q \\ \Sigma \Psi_{i=1} \varphi \varphi \varphi \cdots \varphi \varphi \varphi$$

:

$$m \quad \Sigma \Psi_{\varphi \varphi \varphi}$$



王根喜 王瀚海 著



中国科学技术出版社  
CHINA SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

# 数字化精准中医学

王根喜 王瀚海 著

中国科学技术出版社

. 北京.

## 图书在版编目（CIP）数据

数字化精准中医学/王根喜，王瀚海著.—北京：  
中国科学技术出版社，2015.10

ISBN 978-7-5046-7000-7

I .①数… II .①王…②王… III .①中医学 IV .①R2

中国版本图书馆（CIP）数据核字（2015）第 245919 号

---

**责任编辑** 鲍黎钧

**封面设计** 鲍萌

**责任印制** 张建农

---

**出 版** 中国科学技术出版社

**发 行** 科学普及出版社发行部

**地 址** 北京市海淀区中关村南大街 16 号

**邮政编码** 100081

**电 话** 010-62103123 62173865

**传 真** 010-62173081

**网 址** <http://www.cspbooks.com.cn>

**印 刷** 北京长宁印刷有限公司

---

**开 本** 889mm×1194mm 1/16

**印 张** 71.5

**字 数** 2133 千字

**印 数** 1—1000 册

**版 次** 2016 年 1 月第 1 版

**印 次** 2016 年 1 月第 1 次印刷

---

**书 号** ISBN 978-7-5046-7000-7/R·1859

**定 价** 398.00 元

---

(凡购买本社图书，如有缺页、倒页、脱页者，本社发行部负责调换)

# 目 录

<b>第一章 三联数字与联数字.....</b>	( 1 )
1.1 三联数字的定义 .....	( 1 )
1.2 联数字的定义 .....	( 1 )
1.3 联数字的类型 .....	( 1 )
<b>第二章 联和数字.....</b>	( 2 )
2.1 联和数字的定义 .....	( 2 )
2.2 三联数字纳入联和数字的方向性.....	( 2 )
2.3 $n$ 个三联数字链 .....	( 3 )
2.4 互三联数字 .....	( 3 )
2.5 $n$ 位联和数字链 .....	( 4 )
2.6 $n$ 位联和数字链的 8 种逐级收敛 .....	( 7 )
2.7 $n$ 位联和数字链逐级收敛的路径.....	( 38 )
<b>第三章 联混合数字.....</b>	( 44 )
3.1 联混合数字的定义.....	( 44 )
3.2 三联数字纳入联混合数字的方向性.....	( 45 )
3.3 $n$ 位联混合数字链.....	( 46 )
3.4 $n$ 位联混合数字链的 8 种逐级收敛 .....	( 47 )
3.5 $n$ 位联混合数字链逐级收敛的路径.....	( 76 )
<b>第四章 联遗传数字与联变异数字.....</b>	( 82 )
4.1 联遗传数字 .....	( 82 )
4.2 联变异数字 .....	( 87 )
4.3 三联遗传数字 .....	( 88 )
4.4 三联变异数字 .....	( 88 )
4.5 $n$ 个三联遗传数字链.....	( 89 )
4.6 $n$ 个三联变异数字链.....	( 89 )
4.7 $n$ 个三联遗传数字链的方向性.....	( 89 )
4.8 $n$ 个三联变异数字链的方向性.....	( 89 )
4.9 三联遗传数字与三联变异数字位置的不可变性.....	( 90 )
4.10 $n$ 个三联遗传数字链的 6 种逐级收敛 .....	( 90 )
4.11 $n$ 个三联遗传数字链逐级收敛的路径.....	( 111 )
<b>第五章 联积数字.....</b>	( 116 )
5.1 联积数字的定义 .....	( 116 )
5.2 三联数字纳入联积数字的方向性.....	( 116 )
5.3 $n$ 位联积数字链 .....	( 117 )
5.4 $n$ 位联积数字链的 8 种逐级收敛 .....	( 120 )
5.5 $n$ 位联积数字链逐级收敛的路径.....	( 149 )

<b>第六章 三联数字与遗传密码.....</b>	( 155 )
6.1 遗传密码的起源 .....	( 155 )
6.2 64 种遗传密码为什么只编码 20 种氨基酸.....	( 214 )
6.3 第 21、第 22 种氨基酸真的是新的天然氨基酸吗.....	( 216 )
6.4 遗传密码子的基本特点.....	( 218 )
6.5 密码子结构与氨基酸侧链极性之间有一定关系.....	( 220 )
6.6 遗传密码的简并性.....	( 220 )
6.7 原始 DNA 可能通过自发组装形成.....	( 224 )
6.8 DNA 变异的根源.....	( 225 )
6.9 人造联遗传数字 .....	( 226 )
<b>第七章 三联数字与 DNA 计算机编码.....</b>	( 228 )
7.1 DNA 的数字结构.....	( 228 )
7.2 DNA 数字结构的 YBH 收敛 .....	( 228 )
7.3 DNA 计算机操作系统的必备条件 .....	( 229 )
7.4 DNA 计算机的编码 .....	( 232 )
7.5 同余式 DNA 码的算术运算 .....	( 238 )
7.6 二进制式 DNA 码的算术运算 .....	( 245 )
7.7 DNA 码的逻辑运算 .....	( 247 )
7.8 DNA 计算机编码与哈密尔顿路径 .....	( 253 )
7.9 DNA 计算机文件的加密问题 .....	( 256 )
7.10 DNA 几何学 .....	( 256 )
<b>第八章 数字化基因组健康诊疗系统.....</b>	( 259 )
8.1 三联数字与十二脏腑系统及中药的对应关系 .....	( 259 )
8.2 基因组数字结构与人体脏腑系统的生理功能 .....	( 259 )
8.3 致病基因组与人体的病位 .....	( 283 )
8.4 致病基因组与人体的病因 .....	( 289 )
8.5 致病基因组与人体的正气紊乱 .....	( 302 )
8.6 致病基因与人体的正气虚 .....	( 312 )
8.7 数字化基因组健康诊疗系统 .....	( 322 )
<b>第九章 数字化蛋白质组健康诊疗系统.....</b>	( 390 )
9.1 蛋白质及蛋白质组 .....	( 390 )
9.2 蛋白质组数字结构与人体的脏腑系统 .....	( 399 )
9.3 致病蛋白质组与人体的病位 .....	( 405 )
9.4 致病蛋白质组与人体的病因 .....	( 411 )
9.5 致病蛋白质组与正气紊乱 .....	( 418 )
9.6 致病蛋白质组与人体的正气虚 .....	( 424 )
9.7 数字化蛋白质组健康诊疗系统 .....	( 431 )
<b>第十章 数字化糖原组健康诊疗系统.....</b>	( 455 )
10.1 糖类物质的组成及化学分类 .....	( 455 )
10.2 糖链 .....	( 455 )
10.3 糖基转移酶 .....	( 469 )
10.4 糖蛋白 .....	( 474 )

10.5 糖原组的数字结构与人体的脏腑系统.....	( 476 )
10.6 致病糖原组与人体的病位.....	( 484 )
10.7 致病糖原组与与人体的病因.....	( 492 )
10.8 致病糖原组与人体的正气紊乱.....	( 500 )
10.9 致病糖原组与与人体的正气虚.....	( 508 )
10.10 数字化糖原组健康诊疗系统.....	( 516 )
<b>第十一章 数字化人体元素健康诊疗系统.....</b>	<b>( 537 )</b>
11.1 人体的常量元素与基因.....	( 537 )
11.2 人体的微量元素与基因.....	( 567 )
<b>第十二章 数字化症状体征组健康诊疗系统.....</b>	<b>( 657 )</b>
12.1 用四诊及现代医学检测方法收集症状体征群.....	( 657 )
12.2 症状群 .....	( 676 )
12.3 数字化症状体征组健康诊疗系统.....	( 686 )
12.4 常见的数字证型 .....	( 701 )
<b>第十三章 数字化人体疾病诊疗系统.....</b>	<b>( 745 )</b>
13.1 传染性疾病 .....	( 745 )
13.2 非传染性疾病 .....	( 756 )
<b>第十四章 数字化营养基因组健康诊疗系统.....</b>	<b>( 794 )</b>
14.1 营养素 .....	( 794 )
14.2 食物 .....	( 829 )
<b>第十五章 数字化经络能量组健康诊疗系统.....</b>	<b>( 839 )</b>
15.1 三联数字与经络 .....	( 839 )
15.2 数字化经络能量组健康诊疗系统.....	( 846 )
<b>第十六章 数字化红外热成像健康诊疗系统.....</b>	<b>( 859 )</b>
16.1 人体红外热成像概述.....	( 859 )
16.2 人体数字化红外热成像健康诊疗系统.....	( 860 )
<b>第十七章 数字化中药基因组检测系统.....</b>	<b>( 871 )</b>
17.1 数字化中药基因组 .....	( 871 )
17.2 数字化中药蛋白组 .....	( 876 )
17.3 数字化中药糖原组 .....	( 878 )
17.4 数字化矿物类中药 .....	( 879 )
17.5 常用的数字化中药 .....	( 881 )
17.6 常用中药 DNA 的数字结构 .....	( 887 )
<b>第十八章 数字化精准医疗云健康管理系統.....</b>	<b>( 1115 )</b>
18.1 云健康 .....	( 1115 )
18.2 影响健康的因素 .....	( 1115 )
18.3 人体健康的标准 .....	( 1124 )
18.4 数字化精准医疗云健康管理系統.....	( 1125 )
<b>参考 资 料 .....</b>	<b>( 1131 )</b>

# 第一章 三联数字与联数字

## 1.1 三联数字的定义

设一集合  $\{i, l\}$ , 如果满足下列条件:

(1) 对于集合  $\{i, l\}$  的元素, 每次取 3 个进行可重复排列。

命  $y \in \{iii, iil, ili, ill, lii, lii, lli, lll\}$ 。则称  $y$  为三联数字。

(2) 设  $i=0, l=1$ , 则  $iii=000, iil=001, ili=010, ill=011, lii=100, lii=101, lli=110, lll=111$ 。

(3) 如果将  $y$  所表示的二进制数翻译成十进制的数, 且  $y \geq 0$ , 则:  $iii=000_{(2)}=0_{(10)}$ ,  $iil=001_{(2)}=1_{(10)}$ ,  $ili=010_{(2)}=2_{(10)}$ ,  $ill=011_{(2)}=3_{(10)}$ ,  $lii=100_{(2)}=4_{(10)}$ ,  $lii=101_{(2)}=5_{(10)}$ ,  $lli=110_{(2)}=6_{(10)}$ ,  $lll=111_{(2)}=7_{(10)}$ 。

(4) 如果将  $y$  所表示的二进制数翻译成十进制的数, 且  $y \leq 0$ , 则:  $iii=000, -iil=-1, -ili=-2, -ill=-3, -lli=-4, -lii=-5, -lli=-6, -lll=-7$ 。

(5) 三联数字  $y$  可以扩展为:

$y \in \{-lll, -lli, -lil, -lii, -ill, -ili, -iil, iii, iil, ili, ill, lli, lli, lll\}$

## 1.2 联数字的定义

设有集合  $x, y$ 。且  $x \in \{a, b, c\}$ ;  $y \in \{-lll, -lli, -lil, -lii, -ill, -ili, -iil, iii, iil, ili, ill, lli, lli, lll\}$ , 如果满足下列条件:

(1) 在集合  $x$  中每次取 3 个元素, 在集合  $y$  中, 每次取一个元素构成可重复排列。

(2) 其排列的形式为  $T \in \{\begin{smallmatrix} a & b & c \\ y & \dots \end{smallmatrix}\}$ , 且  $a, b, c \in \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 。

则称  $a, b, c$  为联数字。

## 1.3 联数字的类型

按联数字之间的运算类型将联数字分为: 联和数字, 联积数字, 联差数字, 联商数字, 联混合数字; 按三联数字所纳入联数字数的类型又分为联正整数数字, 联负整数数字, 联正小数数字, 联负小数数字, 联虚数数字、联复数数字; 按联数字数的规则又分为联遗传数字、联变异数字。

## 第二章 联和数字

### 2.1 联和数字的定义

设有集合  $x, y$ 。且  $x \in \{a, b, c\}$ ,  $y \in \{-\text{ill}, -\text{lli}, -\text{lil}, -\text{lii}, -\text{ill}, -\text{ili}, -\text{iil}, \text{iii}, \text{iil}, \text{ili}, \text{ill}, \text{lil}, \text{lli}, \text{lll}\}$ , 如果满足下列条件:

(1) 在集合  $x$  中每次取 3 个元素, 在集合  $y$  中每次取一个元素, 构成可重复排列。

(2) 其排列的形式为  $T \in \{\begin{smallmatrix} a & b & c \\ y & & \end{smallmatrix} \dots\}$ 。 $a, b, c \in \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 。

(3) 如果联数字  $a, b, c$  之间的运算关系为:  $a+b+c=8s+y$ 。

(4) 若  $a+b+c \leq 7$ , 则  $a+b+c=y$ 。

(5) 若  $a+b+c \geq 8$ , 则  $a+b+c=8s+y$ 。

(6) 若  $a+b+c \geq -7$ , 则  $a+b+c=y$ 。

(7) 若  $a+b+c \leq -8$ , 则  $a+b+c=8s+y$ 。

则称  $a, b, c$  为联和数字, 记作  ${}^sE_y^{abc}$ , 其中  $a+b+c=8s+y$ , 这里的  $s$  称为联和数字的商息数。

$$S = \{(a+b+c)-y\} \div 8$$

下面是任意一个三联数字纳入联和数字的形式:

$${}^sE_{\text{iii}}^{abc}, {}^sE_{\text{ill}}^{abc}, {}^sE_{\text{lli}}^{abc}, {}^sE_{\text{lii}}^{abc}, {}^sE_{\text{iil}}^{abc}, {}^sE_{\text{lii}}^{abc}, {}^sE_{\text{lli}}^{abc}, {}^sE_{\text{ill}}^{abc}, \dots$$

例如: 对于联和数字  ${}^sE_y^{abc}$ , 如果  $a=5, b=0, c=7$

则:  ${}^sE_y^{abc} = {}^1E_{\text{lii}}^{507} \quad 5+0+7=8\times 1+4$

如果  $a=0, b=2, c=4$

则:  ${}^sE_y^{abc} = {}^0E_{\text{lli}}^{024} \quad 0+2+4=8\times 0+6$

### 2.2 三联数字纳入联和数字的方向性

在三联数字集合  $y$  中,  $y \in \{-\text{ill}, -\text{lli}, -\text{lil}, -\text{lii}, -\text{ill}, -\text{ili}, -\text{iil}, \text{iii}, \text{iil}, \text{ili}, \text{ill}, \text{lil}, \text{lli}, \text{lll}\}$  中, 有  $-\text{ill}, -\text{lli}, -\text{lil}, -\text{lii}, \text{iil}, \text{ili}, \text{ill}, \text{lli}$  这 8 个三联数字具有方向性, 方向不同其三联数字所

示的十进制的数值不同。例如：-iil 从左向右看化成二进制为  $-001_{(2)}$ ，它的十进制的数值为 -1，从右向左看化成二进制为  $-100_{(2)}$ ，它的十进制的数值为 -4；-ill 从左向右看化成二进制为  $-011_{(2)}$ ，它的十进制的数值为 -3，-ill 从右向左看化成二进制为  $-110_{(2)}$ ，它的十进制的数值为 -6；iil 从左向右看化成二进制为  $001_{(2)}$ ，它的十进制的数值为 1，从右向左看化成二进制为  $100_{(2)}$ ，它的十进制的数值为 4；ill 从左向右看化成二进制为  $011_{(2)}$ ，它的十进制的数值为 3，ill 从右向左看化成二进制为  $110_{(2)}$ ，它的十进制的数值为 6。一个三联数字因其方向不同而具有不同的十进制的数值，这说明三联数字-ill，-lli，-ill，-lli，iil，lli，ill，lli 本身就具有方向性。一般把三联数字从左向右纳入联和数字的称为正向联和数字；把三联数字从右向左纳入联和数字的称为反向联和数字。

${}^S_E \begin{smallmatrix} abc \\ iiii \end{smallmatrix}$ ,  ${}^S_E \begin{smallmatrix} abc \\ iil \end{smallmatrix}$ ,  ${}^S_E \begin{smallmatrix} abc \\ ill \end{smallmatrix}$ ,  ${}^S_E \begin{smallmatrix} abc \\ ili \end{smallmatrix}$ ,  ${}^S_E \begin{smallmatrix} abc \\ il \end{smallmatrix}$ ,  ${}^S_E \begin{smallmatrix} abc \\ ii \end{smallmatrix}$ ,  ${}^S_E \begin{smallmatrix} abc \\ lli \end{smallmatrix}$  称为正向联和数字。

${}^S_E \begin{smallmatrix} abc \\ iii \end{smallmatrix}$ ,  ${}^S_E \begin{smallmatrix} abc \\ iil \end{smallmatrix}$ ,  ${}^S_E \begin{smallmatrix} abc \\ ill \end{smallmatrix}$ ,  ${}^S_E \begin{smallmatrix} abc \\ ili \end{smallmatrix}$ ,  ${}^S_E \begin{smallmatrix} abc \\ il \end{smallmatrix}$ ,  ${}^S_E \begin{smallmatrix} abc \\ ii \end{smallmatrix}$ ,  ${}^S_E \begin{smallmatrix} abc \\ lli \end{smallmatrix}$  称为反向联和数字。

$$a, b, c \in \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

例如：

${}^0_E \begin{smallmatrix} 024 \\ lli \end{smallmatrix}$  称为正向联和数字

${}^0_E \begin{smallmatrix} 210 \\ lli \end{smallmatrix}$  称为反向联和数字

## 2.3 $n$ 个三联数字链

在集合  $y \in \{-\text{ill}, -\text{lli}, -\text{lil}, -\text{lii}, -\text{ill}, -\text{ili}, -\text{iil}, \text{iii}, \text{iil}, \text{ili}, \text{ill}, \text{lil}, \text{lli}, \text{iii}\}$  中，每次取一个元素，取  $n$  次，并且将  $n$  个元素连接成  $G$ ，使得：

$$G = \underbrace{\text{i} \text{i} \text{i} \cdots \text{l} \text{l} \text{l}}_{n \uparrow} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

则称  $G$  为  $n$  个三联数字链。

## 2.4 互三联数字

设一条由  $n$  个三联数字组成的链  $G$ ，且：

$$G = \underbrace{\text{i} \text{i} \text{i} \text{l} \text{l} \text{l} \cdots}_{n \uparrow} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

在这条由  $n$  个三联数字组成的链  $G$  中，其中一个三联数字的一个元素“i 或 l”与相邻一个三联数字的两个元素“ii 或 ll 或 il 或 li”构成的三联数字，或者一个三联数字的两个元素“i 或 ll 或 il 或 li”与相邻一个三联数字的一个元素“i 或 l”构成的三联数字称为互三联数字，用  $H$  表示，且  $H \in \{-\text{ill}, -\text{lli}, -\text{lil}, -\text{lii}, -\text{ill}, -\text{ili}, -\text{iil}, \text{iii}, \text{iil}, \text{ili}, \text{ill}, \text{lil}, \text{lli}, \text{iii}\}$ 。

为了让读者明白，用画图表示如下：

$$G = l \left( \overbrace{i \text{ } l \text{ } l}^{构成互三联数字 ill} \right) i \cdots$$

构成互  
三联数  
字 ill

## 2.5 $n$ 位联和数字链

设有集合  $x, y$ 。且  $x \in \{a, b, c\}$ ,  $y \in \{-\text{III}, -\text{lli}, -\text{lil}, -\text{lii}, -\text{ill}, -\text{ili}, -\text{iil}, \text{iii}, \text{iil}, \text{ili}, \text{ill}, \text{lil}, \text{lli}, \text{III}\}$ , 如果满足下列条件:

- (1) 在集合  $x$  中每次取 3 个元素, 在集合  $y$  中每次取一个元素, 构成可重复排列。
- (2) 其排列的形式为  $T \in \{\begin{smallmatrix} a & b & c \\ y & \dots \end{smallmatrix}\}$ , 且  $a, b, c \in \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 。
- (3) 在集合  $T \in \{\begin{smallmatrix} a & b & c \\ y & \dots \end{smallmatrix}\}$  中取  $k$  个元素连接成链  $G$ :

$$G = \begin{smallmatrix} a & b & c & a & b & c & a & b & c & a & b & c & a & b & c \\ \text{iii} & \text{iil} & \text{iil} & \text{ill} & \text{lli} \end{smallmatrix} \dots$$

(4)  $a, b, c$  为联和数字, 其运算关系式为  $a+b+c=8s+y$ , 为了标识联和数字  $a, b, c$  在  $n$  位联和数字链所在的位置可以写成:  $\begin{smallmatrix} a & a & b & b & c & c \\ \text{i}_n & \text{i}_{n-1} & \text{i}_n & \text{i}_{n-1} & \text{i}_n & \text{i}_n \end{smallmatrix}$ ,  $n$  为联和数字  $a, b, c$  在  $n$  位联和数字链中的位置序数, 用图表示如下:

$$G = \begin{smallmatrix} a & b & c & \dots & a & b & c & a & b & c & a & b & c & a & b & c & a & b & c \\ \text{i}_n & \text{i}_{n-1} & \text{i}_n & \dots & \text{i}_1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 24 & 23 & 22 & 21 & 20 & 19 & 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}$$

则定义  $G$  为  $n$  位联和数字链, 写成表达式为:

$$G = \sum_{i=1}^{n-2} \begin{smallmatrix} a & b & c & a & b & c & a & b & c & a & b & c & a & b & c & a & b & c \\ \text{iii} & \text{iil} & \text{iil} & \text{illi} & \text{illi} & \text{illi} & \text{lli} \end{smallmatrix} \dots$$

$$i, n=1, 2, 3, \dots$$

$$k = \frac{1}{3}n$$

$$S_i = \{(a+b+c)-y\} \div 8$$

### 2.5.1 互三联数字纳入联和数字的 $n$ 位联和数字链

设  $T \in \{\begin{smallmatrix} a & b & c \\ y & \dots \end{smallmatrix}\}$ ,  $y \in \{-\text{III}, -\text{lli}, -\text{lil}, -\text{lii}, -\text{ill}, -\text{ili}, -\text{iil}, \text{iii}, \text{iil}, \text{ili}, \text{ill}, \text{lil}, \text{lli}, \text{III}\}$ ;  $a, b, c \in \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 。

如果满足下列条件:

- (1) 在集合  $T \in \{\begin{smallmatrix} a & b & c \\ y & \dots \end{smallmatrix}\}$  中取  $k$  个元素连接成链  $G$ :

$$G = \begin{smallmatrix} a & b & c & a & b & c & a & b & c & a & b & c & a & b & c & a & b & c \\ \text{iii} & \text{iil} & \text{iil} & \text{illi} & \text{illi} & \text{illi} & \text{lli} \end{smallmatrix} \dots$$

- (2)  $a, b, c$  为联和数字, 在链  $G$  中的位置可表示为:  $\begin{smallmatrix} a & a & b & b & c & c \\ \text{i}_n & \text{i}_{n-1} & \text{i}_n & \text{i}_{n-1} & \text{i}_n & \text{i}_n \end{smallmatrix}$ 。

(3) 有互三联数字  $H$ , 且  $H \in \{-\text{III}, -\text{lli}, -\text{lil}, -\text{lii}, -\text{ill}, -\text{ili}, -\text{iil}, \text{iii}, \text{iil}, \text{ili}, \text{ill}, \text{lil}, \text{lli}, \text{III}\}$ , 使得互三联数字  $H$  纳入的联数字  $bca$  或  $cab$  为联和数字, 则称  $G$  为互三联数字纳入联和数字的  $n$  位联和数字链, 写成表达式为:

$$G = \sum_{i=1}^{n-2} \begin{matrix} a & b & c \\ i & i & i \end{matrix} \begin{matrix} a & b & c \\ i & i & i \end{matrix} \begin{matrix} a & b & c \\ i & i & i \end{matrix} \begin{matrix} a & b & c \\ i & i & i \end{matrix} \begin{matrix} a & b & c \\ i & i & i \end{matrix} \dots$$

$$i, n=1, 2, 3, \dots$$

$$k = \frac{1}{3}n$$

$$S_i = \{(a+b+c)-y\} \div 8$$

$\langle E \rangle$  表示  $k$  个三联数字链的互三联数字纳入的是联和数字。

例如：已知一个互三联数字纳入联和数字的 6 位联和数字链  $G = \sum_{i=1}^4 \begin{matrix} a & b & c \\ i & i & i \end{matrix} \begin{matrix} a & b & c \\ i & i & i \end{matrix}$ ，且  $i_1 = \frac{2}{1}$ ,  $i_2 = \frac{2}{1}$ ,  $i_3 = \frac{2}{1}$ , 求： $i_6 = ?$

解：按题意列式如下：

$$(1) G = \sum_{i=1}^4 \begin{matrix} a & b & c \\ i & i & i \end{matrix} \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ i & i & i \end{matrix}, i_{11} = \sum_{i=1}^s \begin{matrix} c & 2 & 2 \\ i & i & i \end{matrix}, i_{11} = \sum_{i=1}^s \begin{matrix} b & c & 2 \\ i & i & i \end{matrix}$$

$$(2) \text{ 因为, } i_{11} = \sum_{i=1}^s \begin{matrix} c & 2 & 2 \\ i & i & i \end{matrix}$$

$$\text{ 所以, } 2+2+c=8s+3$$

$$c \in \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$8s+3 \in \{3, 11, 19, 27\}$$

经过运算只有  $8s+3=11$  符合条件，故  $s=1$ 。

$$\text{ 因此, } 2+2+c=11, c=7, \text{ 则 } i_4 = \frac{7}{1}, i_{11} = \sum_{i=1}^1 \begin{matrix} c & 2 & 2 \\ i & i & i \end{matrix}$$

(3) 又因为：

$$i_{11} = \sum_{i=1}^1 \begin{matrix} c & 2 & 2 \\ i & i & i \end{matrix}, \text{ 则 } i_{11} = \sum_{i=1}^s \begin{matrix} b & c & 2 \\ i & i & i \end{matrix}$$

$$\text{ 所以, } b+7+2=8s+1$$

$$b \in \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$8s+1 \in \{1, 9, 17, 25\}$$

经过运算只有  $8s+1=9$  与  $8s+1=17$  符合条件，我们取  $8s+1=9$ ，故  $s=1$ 。

$$\text{ 因此, } b+7+2=9, b=0, \text{ 则 } i_5 = \frac{0}{1}, i_{11} = \sum_{i=1}^1 \begin{matrix} b & c & 2 \\ i & i & i \end{matrix}$$

(4) 又因为：

$$\sum_{i=1}^s \begin{matrix} b & c & 2 \\ i & i & i \end{matrix} = \sum_{i=1}^1 \begin{matrix} a & b & c \\ i & i & i \end{matrix}, i_{11} = i_{11}$$

$$\text{ 所以, } a+7+0=8s+4$$

$$a \in \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$8s+4 \in \{4, 12, 20\}$$

经过运算只有  $8s+4=12$  符合条件，故  $s=1$ 。

因此， $a+7+0=12$ ,  $a=5$ , 则  $\overset{a}{\underset{1}{\text{i}}}_6 = \overset{5}{\underset{1}{\text{i}}}_6$ ,  $\overset{a \ 0 \ 7}{\underset{\text{i} \ \text{i} \ \text{i}}{\text{i}}} = \overset{5 \ 0 \ 7}{\underset{\text{i} \ \text{i} \ \text{i}}{\text{i}}}$

最后，

$$G = \sum_{i=1}^4 \overset{a \ b \ c}{\underset{\text{i} \ \text{i} \ \text{i}}{\text{i}}} \sum_{j=1}^{2 \ 2 \ 2} \overset{5 \ 0 \ 7}{\underset{\text{i} \ \text{i} \ \text{i}}{\text{i}}} \sum_{k=1}^{2 \ 2 \ 2}$$

从而求得：

$$\overset{c}{\underset{\text{i}}{\text{i}}}_4 = \overset{7}{\underset{\text{i}}{\text{i}}}_4, \overset{b}{\underset{\text{i}}{\text{i}}}_5 = \overset{0}{\underset{\text{i}}{\text{i}}}_5, \overset{a}{\underset{\text{i}}{\text{i}}}_6 = \overset{5}{\underset{\text{i}}{\text{i}}}_6$$

## 2.5.2 推论

通过上述例子，对于任一条  $n$  位联和数字链，如果互三联数字纳入的是联和数字，只要知道这条链中任意相邻的两个联和数字，就能推算出这条链的其他联和数字。

## 2.5.3 互三联数字纳入联混合数字的 $n$ 位联和数字链

设  $T \in \{ \overset{a \ b \ c}{\underset{y}{\dots}} \}$ ,  $y \in \{-\text{ill}, -\text{lli}, -\text{lil}, -\text{lii}, -\text{ill}, -\text{ili}, -\text{iil}, \text{iii}, \text{iil}, \text{ili}, \text{ill}, \text{lil}, \text{lli}, \text{lll}\}$ ;  $a, b, c \in \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , 如果满足下列条件：

(1) 在集合  $T \in \{ \overset{a \ b \ c}{\underset{y}{\dots}} \}$  中取  $k$  个元素连接成链  $G$ :

$$G = \overset{a \ b \ c}{\underset{\text{i} \ \text{i} \ \text{i}}{\text{i}}} \overset{a \ b \ c}{\underset{\text{i} \ \text{i} \ \text{i}}{\text{i}}} \overset{a \ b \ c}{\underset{\text{i} \ \text{i} \ \text{i}}{\text{i}}} \overset{a \ b \ c}{\underset{\text{i} \ \text{i} \ \text{i}}{\text{i}}} \overset{a \ b \ c}{\underset{\text{i} \ \text{i} \ \text{i}}{\text{i}}} \overset{a \ b \ c}{\underset{\text{i} \ \text{i} \ \text{i}}{\text{i}}} \overset{a \ b \ c}{\underset{\text{i} \ \text{i} \ \text{i}}{\text{i}}} \overset{a \ b \ c}{\underset{\text{i} \ \text{i} \ \text{i}}{\text{i}}} \dots$$

(2)  $a, b, c$  为联和数字，在链  $G$  中的位置可表示为： $\overset{a}{\underset{\text{i}}{\text{i}}}_n, \overset{a}{\underset{\text{i}}{\text{i}}}_n, \overset{b}{\underset{\text{i}}{\text{i}}}_n, \overset{b}{\underset{\text{i}}{\text{i}}}_n, \overset{c}{\underset{\text{i}}{\text{i}}}_n, \overset{c}{\underset{\text{i}}{\text{i}}}_n$ 。

(3) 有互三联数字  $H$ , 且  $H \in \{-\text{ill}, -\text{lli}, -\text{lil}, -\text{lii}, -\text{ill}, -\text{ili}, -\text{iil}, \text{iii}, \text{iil}, \text{ili}, \text{ill}, \text{lil}, \text{lli}, \text{lll}\}$ , 使得互三联数字  $H$  纳入的联数字  $bca$  或  $cab$  为联混合数字，则称  $G$  为互三联数字纳入联混合数字的  $n$  位联和数字链，写成表达式为：

$$G = \sum_{i=1}^{n-2} \overset{a \ b \ c}{\underset{\text{i} \ \text{i} \ \text{i}}{\text{i}}} \overset{a \ b \ c}{\underset{\text{i} \ \text{i} \ \text{i}}{\text{i}}} \overset{a \ b \ c}{\underset{\text{i} \ \text{i} \ \text{i}}{\text{i}}} \overset{a \ b \ c}{\underset{\text{i} \ \text{i} \ \text{i}}{\text{i}}} \overset{a \ b \ c}{\underset{\text{i} \ \text{i} \ \text{i}}{\text{i}}} \overset{a \ b \ c}{\underset{\text{i} \ \text{i} \ \text{i}}{\text{i}}} \overset{a \ b \ c}{\underset{\text{i} \ \text{i} \ \text{i}}{\text{i}}} \dots$$

$$i, n=1, 2, 3, \dots$$

$$k = \frac{1}{3}n$$

$$S_i \in \{[(c \div b + a) - y] \div 8, [(a \times b - c) - y] \div 8, [(a + b - c) - y] \div 8, \dots\}$$

$\langle \Theta \rangle$  表示  $k$  个三联数字链的互三联数字纳入的是联混合数字。

注：联混合数字记作  $\overset{s}{\underset{\text{y}}{\Theta}} \overset{a \ b \ c}{\dots}$ , 其运算方法为：

$$\begin{aligned} c \times b + a &= 8s + y \\ c - b + a &= 8s + y \\ &\vdots \\ a \div b \times c &= 8s + y \end{aligned}$$

例如：已知一个 6 位联和数字链  $G = \sum_{i=1}^4 \begin{smallmatrix} 4 & 3 & 6 & 1 & 3 & 2 & 6 \\ i & i & i & i & i & i & i \end{smallmatrix}$ ，求它的互三联数字  $\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 2 \\ i & i & i \end{smallmatrix}$  与  $\begin{smallmatrix} 6 & 1 & 3 \\ i & i & i \end{smallmatrix}$  纳入的是什么联数字？

解：互三联数字 $\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 2 \\ i & i & 1 \end{smallmatrix}$ 与 $\begin{smallmatrix} 6 & 1 & 3 \\ l & i & i \end{smallmatrix}$ 纳入的肯定不是联和数字，

因为：在 $\overset{6}{\text{iii}}$ 中， $1+3+2 \neq 8s+1$ ，在 $\overset{6}{\text{iii}}$ 中， $6+1+3 \neq 8s+4$

所以，互三联数字 $\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}$ 与 $\begin{smallmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}$ 只能纳入联混合数字如下：

$$\begin{aligned} \text{互三联数字 } & \stackrel{6+1+3}{\text{lii}} \text{ 纳入联混合数字为 } \stackrel{0}{8} \Theta \stackrel{6+1+3}{\text{lii}} \\ & \quad \downarrow \\ & (6-3+1) = 0 \times 8 + 4 \\ \text{互三联数字 } & \stackrel{1+3+2}{\text{iii}} \text{ 纳入联混合数字为 } \stackrel{0}{8} \Theta \stackrel{1+3+2}{\text{iii}} \\ & \quad \downarrow \\ & (3-1 \times 2) = 0 \times 8 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{最后求得: } G = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 E_i l_j i l l = \sum_{i=1}^4 E_i \otimes l i l l = l i l l$$

## 2.6 $n$ 位联和数字链的 8 种逐级收敛

*n* 位联和数字链的 8 种逐级收敛：

- (1) 包含互三联数字的  $n$  位联和数字链的逐级收敛，简称  $HH$  的逐级收敛。
  - (2) 不包含互三联数字的  $n$  位联和数字链的逐级收敛，简称  $HBH$  的逐级收敛。
  - (3) 包含互三联数字的  $n$  位联和数字链转换成联积数字的逐级收敛，简称  $HHJ$  的逐级收敛。
  - (4) 不包含互三联数字的  $n$  位联和数字链转换成联积数字的逐级收敛，简称  $HBHJ$  的逐级收敛。
  - (5) 包含互三联数字的  $n$  位联和数字链转换成联差数字的逐级收敛，简称  $HHC$  的逐级收敛。
  - (6) 不包含互三联数字的  $n$  位联和数字链转换成联差数字的逐级收敛，简称  $HBHC$  的逐级收敛。
  - (7) 包含互三联数字的  $n$  位联积数字链转换成联遗传数字的逐级收敛，简称  $HY$  的逐级收敛。
  - (8) 不包含互三联数字的  $n$  位联积数字链转换成联遗传数字的逐级收敛，简称  $HBHY$  的逐级收敛。

### 2.6.1 $n$ 位联和数字链 $HH$ 的逐级收敛

设有一条  $n$  位联和数字链  $G$ , 如果互三联数字纳入联和数字, 当  $n=2k+1$  时, 把它的每个三联数字、互三联数字变换为联和数字组成 1 级分立的纳入联和数字的三联数字, 再把这些 1 级分立的三联数字变成联和数字, 组成 2 级分立的纳入联和数字的三联数字, 如此重复运算  $m$  级, 最后这条  $n$  位联和数字链会逐级收敛于一个  $m$  级纳入联和数字的三联数字之中; 当  $n=2k$  时, 用同样的方法将这条  $n$  位联和数字链会逐级收敛于两个  $m$  级的纳入联和数字的三联数字之中, 称为包含互三联数字的  $n$  位联和数字链的逐级收敛, 简称  $HH$  的逐级收敛。

### 2.6.1.1 $n=2k$ 时 $HH$ 的逐级收敛

- $$(1) \text{ 设 } G = \bigcup_{i=1}^{n-2} \{ \underbrace{\text{iii}}_8, \underbrace{\text{iil}}_8, \underbrace{\text{ili}}_8, \underbrace{\text{ill}}_8, \underbrace{\text{iii}}_8, \underbrace{\text{iil}}_8, \underbrace{\text{ili}}_8, \underbrace{\text{ill}}_8, \dots, \underbrace{\text{iii}}_8, \underbrace{\text{iii}}_8, \underbrace{\text{iii}}_8, \underbrace{\text{iii}}_8, \underbrace{\text{iii}}_8, \underbrace{\text{iii}}_8, \underbrace{\text{iii}}_8, \underbrace{\text{iil}}_8, \underbrace{\text{ili}}_8, \underbrace{\text{ill}}_8 \}$$

- (2) 若  $\begin{smallmatrix} s \\ 8 \end{smallmatrix} E_{111}^{a b c} \rightarrow 111 \rightarrow 011_{(2)} = 3_{(10)}$ , 则  $\begin{smallmatrix} s \\ 8 \end{smallmatrix} E_{111}^{a b c} \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ B_1^3 \end{smallmatrix}$

若  $\overset{S}{\underset{8}{E}} \overset{c\ a\ b}{ii1} \rightarrow ii1 \rightarrow 001_{(2)} = 1_{(10)}$ , 则  $\overset{S}{\underset{8}{E}} \overset{c\ a\ b}{ii1} \rightarrow \overset{1}{B} \overset{1}{i_2}$

若  $\frac{S}{8}E^{bca}_{\text{iii}} \rightarrow \text{lii} \rightarrow 100_{(2)} = 4_{(10)}$ , 则  $\frac{S}{8}E^{bca}_{\text{iii}} \rightarrow \overset{1}{E}{}^4_{i_3}$

$$\text{Bi}_3 \text{Bi}_2 \text{Bi}_1 \rightarrow \text{Ba}_8 \text{E}^{413}$$

(3) 其余仿此可得:

(4) 若  $\overset{1}{\mathsf{B}}_8^1 \mathsf{E}^{413} \rightarrow \text{iii} \rightarrow 000_{(2)} = 0_{(10)}$ , 则  $\overset{1}{\mathsf{B}}_8^1 \mathsf{E}^{413} \rightarrow \overset{2}{\mathsf{B}}_1^0$

若  $\overset{1}{\text{B}}_8^0 \text{E}^{241} \rightarrow 111 \rightarrow 111_{(2)} = 7_{(10)}$ , 则  $\overset{1}{\text{B}}_8^0 \text{E}^{241} \rightarrow \overset{2}{\text{B}}_7$

若  $\overset{1}{\text{B}}_8^1 \text{E}^{524}_{\text{ill}} \rightarrow \text{iil} \rightarrow 011_{(2)} = 3_{(10)}$ , 则  $\overset{1}{\text{B}}_8^1 \text{E}^{524}_{\text{ill}} \rightarrow \overset{2}{\text{Bi}}_3$

$$\overset{2}{\text{Bi}}_3 \overset{2}{\text{Bl}}_2 \overset{2}{\text{Bi}}_1 \rightarrow \overset{2}{\text{B}}_8 \text{Eili}^{370}$$

(5) 其余仿此，并用  $HH$  逐级收敛运算  $m$  级可得：

于是，求得  $n$  位联和数字链  $HH$  逐级收敛的表达式如下：

$$G = \sum_{i=1}^8 E^{abc} \underbrace{iii}_{abc} \underbrace{iil}_{abc} \underbrace{ili}_{abc} \underbrace{lli}_{abc} \cdots \underbrace{iii}_{abc} \underbrace{iii}_{abc} \underbrace{iii}_{abc} \underbrace{iii}_{abc} \underbrace{iii}_{abc} \underbrace{iii}_{abc} \rightarrow \overline{E}_8 S^a y^b S^c y^d$$

$$n=2k$$

$$i, n, k, m=1, 2, 3, \dots$$

$$S = \{(a+b+c)-y\} \div 8$$

$$S_i = \{(a+b+c)-y\} \div 8$$

$$a, b, c \in \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$y \in \{-\text{lli}, -\text{lil}, -\text{lii}, -\text{ill}, -\text{ili}, -\text{iil}, \text{iii}, \text{iil}, \text{ili}, \text{ill}, \text{lil}, \text{lli}, \text{lll}\}$$

$\Gamma^m$  称为  $m$  级三联数字的记号,  $m$  表示级别数。

例如：已知  $\sum_{i=1}^{10} \overset{242}{E} \overset{242}{E} \overset{242}{E} \overset{243}{E}$ ，求  $\sum_{i=1}^{10} \overset{242}{E} \overset{242}{E} \overset{242}{E} \overset{243}{E} \rightarrow \overset{5}{B} \overset{a}{E} \overset{b}{y} \overset{c}{B} \overset{5}{E} \overset{a}{y} \overset{b}{c}$  ?

解：(1) 根据已知条件得：

$$\sum_{i=1}^{10} \overset{242}{E} \overset{242}{E} \overset{242}{E} \overset{243}{E}$$

(2) 把它的每位三联数字、互三联数字当成联和数字组成 1 级分立的纳入联和数字的三联数字得：

$$\text{若 } \overset{1}{E} \overset{243}{E} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{l} \rightarrow \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{l} \rightarrow 001_{(2)} = 1_{(10)}, \text{ 则 } \overset{1}{E} \overset{243}{E} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{l} \rightarrow \overset{1}{B} \overset{1}{i}_1$$

$$\text{若 } \overset{1}{E} \overset{224}{E} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \rightarrow \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \rightarrow 000_{(2)} = 0_{(10)}, \text{ 则 } \overset{1}{E} \overset{224}{E} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \rightarrow \overset{1}{B} \overset{0}{i}_2$$

$$\text{若 } \overset{1}{E} \overset{422}{E} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \rightarrow \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \rightarrow 000_{(2)} = 0_{(10)}, \text{ 则 } \overset{1}{E} \overset{422}{E} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \rightarrow \overset{1}{B} \overset{0}{i}_3$$

$$\overset{1}{B} \overset{0}{i}_3 \overset{1}{B} \overset{0}{i}_2 \overset{1}{B} \overset{1}{i}_1 \rightarrow \overset{1}{B} \overset{0}{E} \overset{001}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{l}$$

其余仿此可得：

$$\overset{1}{B} \overset{0}{E} \overset{000}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{l} \overset{1}{E} \overset{001}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{l}$$

(3) 把 1 级分立的三联数字当成联和数字组成 2 级分立的纳入联和数字的三联数字得：

$$\text{若 } \overset{1}{B} \overset{1}{E} \overset{001}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{l} \rightarrow \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{l} \rightarrow 001_{(2)} = 1_{(10)}, \text{ 则 } \overset{1}{B} \overset{1}{E} \overset{001}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{l} \rightarrow \overset{2}{B} \overset{1}{i}_1$$

$$\text{若 } \overset{1}{B} \overset{0}{E} \overset{000}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \rightarrow \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \rightarrow 000_{(2)} = 0_{(10)}, \text{ 则 } \overset{1}{B} \overset{0}{E} \overset{000}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \rightarrow \overset{2}{B} \overset{0}{i}_2$$

$$\text{若 } \overset{1}{B} \overset{0}{E} \overset{000}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \rightarrow \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \rightarrow 000_{(2)} = 0_{(10)}, \text{ 则 } \overset{1}{B} \overset{0}{E} \overset{000}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \rightarrow \overset{2}{B} \overset{0}{i}_3$$

$$\overset{2}{B} \overset{0}{i}_3 \overset{2}{B} \overset{0}{i}_2 \overset{2}{B} \overset{1}{i}_1 \rightarrow \overset{2}{B} \overset{0}{E} \overset{001}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{l}$$

其余仿此可得：

$$\overset{2}{B} \overset{0}{E} \overset{000}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{l} \overset{1}{E} \overset{001}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{l}$$

(4) 于是，把  $\sum_{i=1}^{10} \overset{242}{E} \overset{242}{E} \overset{242}{E} \overset{243}{E}$  通过 HH 的逐级收敛运算 5 级得：

$$\overset{1}{B} \overset{0}{E} \overset{000}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{l} \overset{1}{E} \overset{001}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{l}$$

$$\overset{2}{B} \overset{0}{E} \overset{000}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{l} \overset{1}{E} \overset{001}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{l}$$

$$\overset{3}{B} \overset{0}{E} \overset{000}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{l} \overset{1}{E} \overset{000}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{l} \overset{1}{E} \overset{000}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{l} \overset{1}{E} \overset{001}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{l}$$

$$\overset{4}{B} \overset{0}{E} \overset{000}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{l} \overset{1}{E} \overset{000}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{l} \overset{1}{E} \overset{001}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{l}$$

$$\overset{5}{B} \overset{0}{E} \overset{000}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{i} \overset{1}{l}$$

所以： $\sum_{i=1}^8 E_i^{10} \rightarrow \sum_{i=1}^5 E_i^0 E_i^0 E_i^0 E_i^0$

### 2.6.1.2 $n=2k+1$ 时 $HH$ 的逐级收敛

$$(1) \text{ 设 } G = \prod_{i=1}^{s-2} \langle a, b, c | iiii \rangle$$

(2) 若  $\frac{5}{8}E_{111} \xrightarrow{abc} 111 \rightarrow 011_{(2)} = 3_{(10)}$ , 则  $\frac{5}{8}E_{111} \xrightarrow{abc} \frac{1}{2}B_{11}$

若  $\overset{S}{\underset{8}{E}} \overset{c\ a\ b}{ii1} \rightarrow i1 \rightarrow 001_{(2)} = 1_{(10)}$ , 则  $\overset{S}{\underset{8}{E}} \overset{c\ a\ b}{ii1} \rightarrow \overset{1}{\underset{B}{1}} 1_{(2)}$

若  $\overset{S}{\underset{8}{E}} \text{lii} \rightarrow \text{lii} \rightarrow 100_{(2)} = 4_{(10)}$ , 则  $\overset{S}{\underset{8}{E}} \text{lii} \rightarrow \overset{1}{\underset{4}{B}} \text{i}_3$

$$\overset{1}{\text{Bi}}_3 \overset{1}{\text{Bi}}_2 \overset{1}{\text{Bi}}_1 \rightarrow \overset{1}{\text{B}}_8 \overset{4}{\text{E}}^{13}_{\text{iii}}$$

(3) 其余仿此可得:

$$G = \sum_{i=1}^{n-2} E_{\substack{iii \\ iil \\ ill}} \sum_{j=1}^8 E_{\substack{abc \\ abc \\ abc \\ abc \\ abc \\ abc \\ abc \\ abc}} \sum_{k=1}^8 E_{\substack{abc \\ abc \\ abc \\ abc \\ abc \\ abc \\ abc \\ abc}} \sum_{l=1}^8 E_{\substack{abc \\ abc \\ abc \\ abc \\ abc \\ abc \\ abc \\ abc}} \sum_{m=1}^8 E_{\substack{abc \\ abc \\ abc \\ abc \\ abc \\ abc \\ abc \\ abc}} \sum_{n=1}^8 E_{\substack{abc \\ abc \\ abc \\ abc \\ abc \\ abc \\ abc \\ abc}}$$

(4) 若  $\overset{1}{\mathbf{B}}_8^{-1} \mathbf{E}^{413} \rightarrow \mathbf{i} \mathbf{i} \mathbf{i} \rightarrow 000_{(2)} = 0_{(10)}$ , 则  $\overset{1}{\mathbf{B}}_8^{-1} \mathbf{E}^{413} \rightarrow \overset{2}{\mathbf{B}}_1^0$

若  $\overset{1}{\text{B}} \overset{0}{\text{E}} \overset{2}{\text{E}} \overset{4}{\text{I}} \overset{1}{\text{I}} \overset{1}{\text{I}} \rightarrow 111 \rightarrow 111_{(2)} = 7_{(10)}$ , 则  $\overset{1}{\text{B}} \overset{0}{\text{E}} \overset{2}{\text{E}} \overset{4}{\text{I}} \overset{1}{\text{I}} \rightarrow \overset{2}{\text{B}} \overset{7}{\text{I}}_2$

若  $\overset{1}{\text{B}}_8^1 \text{E}^{524} \rightarrow \text{i11} \rightarrow 011_{(2)} = 3_{(10)}$ , 则  $\overset{1}{\text{B}}_8^1 \text{E}^{524} \rightarrow \overset{2}{\text{B}}_3^3$

$$\overset{2}{\text{Bi}}_3 \overset{2}{\text{Bi}}_2 \overset{2}{\text{Bi}}_1 \rightarrow \overset{2}{\text{B}}_8^1 \text{E}^{370}_{\text{ili}}$$

(5) 其余仿此，并用  $HH$  逐级收敛运算  $m$  级可得：

于是，求得  $n$  位联和数字链  $HH$  逐级收敛的表达式如下：

$$G = \sum_{i=1}^{n-2} \prod_{j=1}^m E_j^{a_j} \rightarrow \prod_{j=1}^m E_j^{a_j}$$

$$n=2k+1$$

$i, n, k, m=1, 2, 3, \dots$

$$S=\{(a+b+c)-y\} \div 8$$

$$S_i=\{(a+b+c)-y\} \div 8$$

$$a, b, c \in \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$y \in \{-\text{III}, -\text{II}, -\text{I}, -\text{II}, -\text{III}, -\text{I}, -\text{II}, \text{I}, \text{II}, \text{III}\}$$

例如：已知  $\sum_{i=1}^7 E^{242} \leftrightarrow iiii \rightarrow iil$ , 求  $\sum_{i=1}^7 E^{242} \leftrightarrow iiiii \rightarrow \bar{B}_8^4 E^{abc} y$  ?

解：(1) 根据已知条件得：

$$\sum_{i=1}^7 E^{242} \leftrightarrow iiii \rightarrow iil$$

(2) 把它的三联数字、互三联数当成联和数字组成 1 级分立的纳入联和数字的三联数字收敛得：

$$\text{若 } \frac{1}{8} E^{243} \rightarrow iil \rightarrow 001_{(2)} = 1_{(10)}, \text{ 则 } \frac{1}{8} E^{243} \rightarrow \bar{B}_1^1$$

$$\text{若 } \frac{1}{8} E^{224} \rightarrow iii \rightarrow 000_{(2)} = 0_{(10)}, \text{ 则 } \frac{1}{8} E^{224} \rightarrow \bar{B}_2^0$$

$$\text{若 } \frac{1}{8} E^{422} \rightarrow iii \rightarrow 000_{(2)} = 0_{(10)}, \text{ 则 } \frac{1}{8} E^{422} \rightarrow \bar{B}_3^0$$

$$\bar{B}_3^0 \bar{B}_2^0 \bar{B}_1^1 \rightarrow \bar{B}_8^0 E^{001}$$

其余仿此可得：

$$\bar{B}_8^0 E^{000} \rightarrow E^{000} \rightarrow E^{000} \rightarrow E^{000} \rightarrow E^{000} \rightarrow E^{001}$$

(3) 把 1 级分立的三联数字当成联和数字组成 2 级分立的纳入联和数字的三联数字收敛得：

$$\text{若 } \bar{B}_8^1 E^{001} \rightarrow iil \rightarrow 001_{(2)} = 1_{(10)}, \text{ 则 } \bar{B}_8^1 E^{001} \rightarrow \bar{B}_1^1$$

$$\text{若 } \bar{B}_8^0 E^{000} \rightarrow iii \rightarrow 000_{(2)} = 0_{(10)}, \text{ 则 } \bar{B}_8^0 E^{000} \rightarrow \bar{B}_2^0$$

$$\text{若 } \bar{B}_8^0 E^{000} \rightarrow iii \rightarrow 000_{(2)} = 0_{(10)}, \text{ 则 } \bar{B}_8^0 E^{000} \rightarrow \bar{B}_3^0$$

$$\bar{B}_3^0 \bar{B}_2^0 \bar{B}_1^1 \rightarrow \bar{B}_8^0 E^{001}$$

其余仿此可得：

$$\bar{B}_8^2 E^{000} \rightarrow E^{000} \rightarrow E^{000} \rightarrow E^{000} \rightarrow E^{001}$$

(4) 于是，把  $\sum_{i=1}^7 E^{242} \leftrightarrow iiii \rightarrow iil$  通过 HH 的逐级收敛运算 4 级得：