非线性随机延迟微分方程数值解的稳定性

FEIXIANXING SUIJI YANCHI WEIFENFANGCHENG SHUZHIJIE DE WENDINGXING

陈琳 著

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

非线性随机延迟微分方程数值解的稳定性

陈琳　著

华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 简 介

本书介绍了随机延迟微分方程及其数值解，深入分析了方程及其算法的稳定性质.书中涉及的算法包括BEM算法和随机θ算法，研究中借助构造的"衰减因子"使得结果可以涵盖带无界变动延迟的系统，这是本书的一大特色.全书结论都是建立在高度非线性的假设条件下的，而非使用传统的线性增长条件，这是本书的另一大特色.

本书可作为数学专业高年级本科生及概率论与数理统计专业研究生的选修课程的教材，也可供科技工作者和教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

非线性随机延迟微分方程数值解的稳定性/陈琳著.—武汉：华中科技大学出版社，2016.11
ISBN 978-7-5680-2261-3

Ⅰ.①非…　Ⅱ.①陈…　Ⅲ.①随机微分方程　Ⅳ.①O211.63

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第243474号

非线性随机延迟微分方程数值解的稳定性
Feixianxing Suiji Yanchi Weifen Fangcheng Shuzhijie de Wendingxing

陈　琳　著

策划编辑：吴　晗
责任编辑：戢凤平
封面设计：原色设计
责任校对：张会军
责任监印：朱　玢
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)　电话：(027)81321913
武汉市东湖新技术开发区华工科技园　邮编：430223
录　排：武汉市洪山区佳年华文印部
印　刷：虎彩印艺股份有限公司
开　本：710mm×1000mm　1/16
印　张：7
字　数：143千字
版　次：2016年11月第1版第1次印刷
定　价：28.00元

前　言

随机微分方程在许多领域中发挥着非常重要的作用. 近十年来,许多研究者从不同角度研究了随机微分方程,并得到许多令人瞩目的成果. 而大部分随机微分方程,特别是非线性条件下的随机微分方程是很难得到解析解的. 此时,借助于数值方法来研究随机微分方程在许多实际问题中是非常有效的. 本书在没有线性增长和全局 Lipschitz 连续的条件下,研究了定延迟随机微分方程和无界延迟随机微分方程的真实解及数值解的零解稳定性. 利用 Lyapunov 函数思想及连续型和离散型半鞅收敛定理,得到了真实解的零解稳定性,包括 p 阶矩和 a. s. 轨道意义下的指数稳定和 ψ-稳定条件;也得到了数值解的零解稳定性,包括均方和 a. s. 轨道意义下的渐近稳定、指数稳定和 ψ-稳定条件. 通过对方程系数施加限制条件,具体化一般条件,使得定理的条件更易于验证.

利用连续型半鞅收敛定理,在单调型条件下,得到了定延迟随机微分方程 p 阶矩和 a. s. 轨道意义下的零解指数稳定. 在对无界延迟随机微分方程的研究中,引入 Ψ 类函数作为参照函数,并借助衰减因子 $\psi^{-\varepsilon}(\delta(t))$来抑制无界延迟所带来的困难,得到了在单调型条件下无界延迟随机微分方程 p 阶矩和 a. s. 轨道意义下的零解 ψ-稳定.

在讨论数值解的稳定性方面,利用离散型半鞅收敛定理,研究了 Backward Euler-Maruyama(BEM) 及更一般的随机 θ 方法的零解稳定性. 对于定延迟随机微分方程,我们在单调型条件下,得到了上述两种数值解的均方渐近稳定、a. s. 轨道渐近稳定. 当条件加强为强单调型条件时,则可以得到数值解的均方指数稳定和a. s. 轨道指数稳定,这是本书的主要特征之一. 值得一提的是,在对随机 θ 方法稳定性分析中,我们同时给出了当 $\theta\in[0,0.5)$时该数值方法无法复现真实解零解稳定性的反例,以及 $\theta\in(0.5,1]$时该数值方法能够稳定的证明. 对于无界延迟随机微分方程,借助衰减因子 $\psi^{-\varepsilon}(\delta(t))$,在单调型条件和强单调型条件下,分别得到了上述两种数值方法均方和 a. s. 轨道意义下的渐近稳定性以及 ψ-稳定性.

本书在程序上采用“两阶段模式”:首先,在单调型条件下建立一般性定理;其次,具体化一般性定理的条件,通过加入 f 与 g 的增长条件,得到只含有系统参数的约束条件,最终得到便于应用的定理. 我们主要考虑两类具体化的条件,单边线性增长条件和多项式增长条件. 在多项式增长条件中,将扩散系数 g 放宽至多项式增长. 在该条件下所得结论较之原有结论有了本质的改进,使得结论覆盖了许多扩散系数不

满足线性增长的重要系统,如 Lotka-Volterra 系统. 以上两个具体化的条件,不但包含在单调型条件内,也包含在强单调型条件内,这说明了强单调型条件有着很广的适用范围,并从侧面反映了两个单调型条件是非常接近的.

本书关于数值解稳定性的结论对步长的要求很弱,仅仅要求隐式数值方法的定义合理,而在定理证明中没有其他限制. 换句话说,若数值解定义合理,那么对任意步长的 BEM 以及随机 θ 方法都是能保留复现原方程的零解稳定性的. 此外,本书对各种情况都给出了可行的办法,用于计算衰减速度 γ 及 $\gamma(\Delta)$. 数值解的衰减速度 $\gamma(\Delta)$ 与所选取的步长有关,但当步长选取得充分小时,这个速度会充分接近真实解衰减至零解的速度 γ.

本书致力于系统介绍非线性随机延迟微分方程数值解稳定性的有关基础与研究进展. 随机微分方程数值解的研究具有一定交叉学科的特点,因此,本书读者需具备一定概率论基础,并掌握计算数学的基本概念. 本书可作为数学专业高年级本科、概率论与数理统计专业研究生的选修课程的教材,也可供科技工作者和教师参考.

衷心感谢我的导师胡适耕教授,以及吴付科教授多年来对我的关心和帮助. 本书的出版得到了国家自然科学基金数学天元基金项目(编号:11526101)的资助,同时也获得了国家自然科学基金地区基金项目(编号:11461028)的资助,在此表示感谢.

最后,感谢我的夫人赖玲芳长期以来对我的支持和理解.

陈　琳

2016 年 9 月

符 号 表

$\triangleq$:定义为

a. s. :几乎处处,几乎必然,依概率 1

$\varnothing$:空集

I_A:集合 A 的示性函数,即,当 $x\in A$ 时 $I_A=1$,否则 $I_A=0$

A^c:集合 A 在 Ω 上的补集,即 $A^c=\Omega-A$

$\sigma(C)$:由集族 C 产生的 σ-代数流

$a\vee b$:a 与 b 的最大值

$a\wedge b$:a 与 b 的最小值

$\lfloor a \rfloor$:实数 a 的向下取整,即不超过 a 的最大整数

$\lceil a \rceil$:实数 a 的向上取整,即不小于 a 的最小整数

$f:A\to B$:从集合 A 到集合 B 的映射

$\mathbf{R}=\mathbf{R}^1$:实数集

$\mathbf{R}_+$:非负实数集$[0,+\infty)$

$\mathbf{R}^d$:d-维的欧式空间

$\mathbf{R}^{d\times m}$:$d\times m$-实数矩阵空间

$\mathscr{F}$:σ-代数

$\mathscr{F}_t$:σ-代数流

$|\boldsymbol{x}|$:向量 $\boldsymbol{x}$ 的欧式范数

$\|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{L}^p}$:随机变量 $\boldsymbol{\xi}$ 的 $\mathbf{L}^p$ 泛数,即 $\|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{L}^p}=(E|\boldsymbol{\xi}|^p)^{1/p}$

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$:向量或矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置

$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$:向量 $\boldsymbol{x}$ 和向量 $\boldsymbol{y}$ 的内积,即$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$

$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$:矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{d\times d}$的迹,即 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant d}a_{ii}$

$|\boldsymbol{A}|$:矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹范数,即$|\boldsymbol{A}|=\sqrt{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}$

$V_{\boldsymbol{x}}$:$V_{\boldsymbol{x}}=(V_{x_1},V_{x_2},\cdots,V_{x_d})=\left(\dfrac{\partial V}{\partial x_1},\dfrac{\partial V}{\partial x_2},\cdots,\dfrac{\partial V}{\partial x_d}\right)$

$V_{\boldsymbol{xx}}$:$V_{\boldsymbol{xx}}=(V_{x_ix_j})_{d\times d}=\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{d\times d}$

$\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbf{R}^d)$：$p$ 次可积的 $\mathbf{R}^d$ 值随机变量族
$\mathbf{L}^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,\mathbf{R}^d)$：$p$ 次可积且 $\mathscr{F}_t$ 可测的 $\mathbf{R}^d$ 值随机变量族
$\mathbf{L}^p([a,b],\mathbf{R}^d)$：$p$ 次可积的 Borel 可测函数族 $h:[a,b]\to\mathbf{R}^d$
$\mathbf{C}^b_{\mathscr{F}_0}=\mathbf{C}^b_{\mathscr{F}_0}([-\tau,0];\mathbf{R}^d)$：定义在$[-\tau,0]$上 $\mathscr{F}_0$ 可测的 $\mathbf{R}^d$ 值有界随机变量族
$C(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}_+)$：定义在 $\mathbf{R}^d$ 空间上的非负连续函数族
□：定理或命题证完

目　录

第1章 随机积分

在许多实际系统中，某些变量与其变化率之间存在着一定的制约关系.这种制约关系如果可以用恰当的数学模型描述为自变量、未知函数及未知函数的导数之间的等式，那也就是微分方程.而微分方程在物理、工程、化学、生物、经济等领域中有着非常广泛的应用，这已被广大学者熟知和接受.随着科技的不断发展，对实际问题描述的要求也越来越精确，随机因素所带来的影响越来越不容忽视.事实上，任何一个真实的动力系统，总是会受到大量的、偶然的随机因素的影响，如环境噪声、偶然性的突发事件、未知参数等.这种随机因素的影响有时候是不重要的，其存在不会对原系统产生本质的影响.有时候随机因素的影响却是本质的，它的存在可能完全改变原系统的运动状态，如果忽略这些因素，那么对所建立的模型进行定性分析将与实际情况出现很大偏差.如人口动力系统[1,2]、股票市场[3,4]、航天系统[5]、核反应堆[6]、化学反应系统[7]、神经网络[8].因此，在微分系统中加入随机因素的影响是必要的，这就使得对一些实际过程的分析也有必要从通常的确定性的观点转到随机的观点，从而对这些实际系统的描述，也就自然地从确定性的微分方程转到随机微分方程(SDE).

另外，一个系统的动力行为除了取决于当前状态外，有时还受到之前状态，即延迟的影响.那么很自然，同时考虑随机扰动和历史记忆的动力系统，则是随机延迟微分方程(SDDE).在许多实际系统中，记忆的长度往往不是固定不变的，即并不一定要固定的延迟.无论是从理论上还是实际应用的需要上来说，变动延迟的随机微分方程都是值得研究的.这类方程已被广泛地应用到经济学、生物学、医学、生态学等科学领域.

近半个世纪以来，随机微分方程理论产生了丰富的研究成果，有非常丰富的著作.这些已有的文献系统考虑了随机微分方程、随机延迟微分方程、随机泛函微分方程、中立型随机微分方程等基本理论，并涉及随机微分方程在生态学、经济学、神经网络等方面的应用.虽然现在关于微分方程及随机微分方程已经有了大量研究文献，但是不可否认，其中绝大多数是无法给出其解析解的.因此数值方法就成为了我们研究实际问题的重要技术和手段.既然是用近似解来替代真实解，那么首先需要随机微分方程的真实解可以被某种数值解比较准确地替代，即需要证明数值解的收敛性.关于数值解的收敛性，已经有许多学者做了相关研究.

稳定性一直是随机微分方程研究中最重要的问题，随机微分方程中存在的延迟会影响方程解的轨道.在这些干扰下，方程能否保持预定的轨道？这就是稳定性问

题.关于随机微分方程的各类稳定性有着大量的研究.显然,数值解作为真实解的近似,能不能保留和复现真实解的某些稳定性也是非常值得研究的一个论题.实际上,近年来这个课题受到了广大学者的关注.

1.1 随机变量

与确定性实验不同,随机实验有多个可能的结果.每一个可能的结果为一个样本点 ω,所有样本点组成的集合称为样本空间 Ω.样本空间的子集称为随机事件,$\mathscr{F}$ 表示由随机事件所组成的集合,$\mathscr{F}$ 被称为 σ-代数或 σ-域,当且仅当

(i) $\varnothing\in\mathscr{F}$,其中 $\varnothing$ 表示空集;

(ii) $A\in\mathscr{F}\Rightarrow A^c\in\mathscr{F}$,其中 $A^c=\Omega-A$,表示集合 A 在 Ω 内的补集;

(iii) $\{A_i\}\subset\mathscr{F}\Rightarrow\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$ 并且 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$.

即 σ-代数是集合 Ω 子集的集合,并对可列交运算和可列并运算封闭,称 $(\Omega,\mathscr{F})$ 为一个可测空间,称任意 $A\in\mathscr{F}$ 为 $\mathscr{F}$ 可测集或简称可测集.若 C 是一族 Ω 的子集,则在 Ω 上存在一个包含 C 的最小 σ-代数,称为由 C 生成的 σ-代数,记为 $\sigma(C)$.若 $\Omega=\mathbf{R}^d$ 且 C 是由 $\mathbf{R}^d$ 中所有开集组成的集合,则此时称 $\sigma(C)$ 为 Borel σ-代数,记为 B^d,B^d 中的元素称为 Borel 集.

一个实值函数 $X:\Omega\to\mathbf{R}$ 称为 $\mathscr{F}$ 可测的,当

$$\{\omega:X(\omega)\leqslant x\}\in\mathscr{F},\quad\forall x\in\mathbf{R}$$

函数 X 称为实值($\mathscr{F}$ 可测)的随机变量.集合 A 是 $\mathscr{F}$ 可测集,即 $A\in\mathscr{F}$,当且仅当示性函数 I_A 是 $\mathscr{F}$ 可测的,其中示性函数定义如下

$$I_A(\omega)=\begin{cases}1 & (\omega\in A)\\ 0 & (\omega\notin A)\end{cases}$$

定理 1.1.1 (i) X 是可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的一个随机变量,当且仅当 X 是一个简单函数或是一列简单函数的极限.

(ii) $X_n(n\geqslant1)$ 是可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的一列随机变量序列,且有 $X(\omega)=\lim\limits_{n\to\infty}X_n(\omega)$,则 X 是一个随机变量.

(iii) 若 X 是在可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的一个随机变量;g 是一个 Borel-可测函数,则 $g(X)$ 是一个随机变量.

一个函数 $P:\mathscr{F}\to[0,1]$ 满足

(i) $P(\Omega)=1$;

(ii) $A\in\mathscr{F}\Rightarrow P(A^c)=1-P(A)$,其中 $A^c=\Omega-A$;

(iii) 对任意互不相容的集合序列 $\{A_i\}_{i\geqslant1}\subset\mathscr{F}$,有如下等式

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则该函数 P 称为可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的概率测度，$(\Omega,\mathscr{F},P)$称为概率空间.

对上述概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，定义

$$\overline{\mathscr{F}}=\{A\subset\Omega:\exists B,C\in\mathscr{F}:B\subset A\subset C,P(B)=P(C)\}$$

则称 $\overline{\mathscr{F}}$ 是 $\mathscr{F}$ 的完备化. 若 $\overline{\mathscr{F}}=\mathscr{F}$，则称概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$是完备的. 否则，我们可以通过以下方式将概率测度 P 延拓到 $\overline{\mathscr{F}}$ 上：对任意的 $A\in\overline{\mathscr{F}}$ 存在 $B,C\in\mathscr{F}$，满足 $B\subset A\subset C$ 且有 $P(B)=P(C)$，定义 $P(A)=P(B)=P(C)$. 因此$(\Omega,\overline{\mathscr{F}},P)$是一个完备的概率空间，称为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$的完备化.

一族随机事件$\{A_i:i\in I\}$，若对所有可能的 $i_1,i_2,\cdots,i_k\in I$ 满足

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称该随机事件族是相互独立的. 一族子 σ-代数$\{\mathscr{F}_i:i\in I\}$，若对所有可能的 $i_1,i_2,\cdots,i_k\in I$ 以及任意的 $A_{i_1}\in\mathscr{F}_{i_1},A_{i_2}\in\mathscr{F}_{i_2},\cdots,A_{i_k}\in\mathscr{F}_{i_k}$ 满足

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称该子 σ-代数族是相互独立的. 一族随机变量$\{X_i:i\in I\}$，若由其生成的一族 σ-代数$\{\sigma(X_i):i\in I\}$是相互独立的，则称该随机变量族是相互独立的.

定义 1.1.1　令$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一个概率空间，若 $X\in\mathbf{L}^1(\Omega,\mathbf{R})$是可积的一维随机变量，则称

$$EX=\int_\Omega X(\omega)\mathrm{d}P(\omega)$$

为随机变量 X 的期望.

对取值在 $\mathbf{R}^d$ 上的随机变量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_d)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{L}^1(\Omega,\mathbf{R}^d)$，定义期望 $E\boldsymbol{X}=(EX_1,EX_2,\cdots,EX_d)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^d$. 进一步对取值为 $d\times m$ 维矩阵的随机变量 $\boldsymbol{X}=(X_{ij})\in\mathbf{L}^1(\Omega,\mathbf{R}^{d\times m})$，定义期望 $E\boldsymbol{X}=(EX_{ij})_{d\times m}\in\mathbf{R}^{d\times m}$. $\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbf{R}^d)$表示满足 $E|\boldsymbol{X}|^p<\infty$ 的 $\mathbf{R}^d$ 值随机变量族. 当 $1\leqslant p<\infty$时，在泛数$(E|\boldsymbol{X}|^p)^{1/p}$下，$\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbf{R}^d)$是 Banach 空间. $\mathbf{L}^2(\Omega,\mathbf{R}^d)$则是一个 Hilbert 空间，其内积可表示为$\langle\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\rangle=E(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y})$.

对任意 $p>0$，当随机变量 $X\in\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbf{R}^d)$时，我们称 $E|\boldsymbol{X}|^p$ 为随机变量 X 的 p 阶矩；当 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\mathbf{L}^2(\Omega,\mathbf{R}^d)$时，称下列对称非负定的 $d\times d$ 维矩阵为 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的协方差矩阵：

$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=E[(\boldsymbol{X}-E\boldsymbol{X})(\boldsymbol{Y}-E\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}]$$

若 $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=0$，意味着$(\boldsymbol{X}-E\boldsymbol{X})$与$(\boldsymbol{Y}-E\boldsymbol{Y})$正交，此时我们称 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 不相关；特别地，当 $X\in\mathbf{L}^2(\Omega,\mathbf{R})$是一维随机变量时，称 $D(X)=E(X-EX)^2$ 为随机变量 X 的方差.

随机变量的期望与矩的性质大部分直接来自于积分论，本身并不难把握. 但是有关性质数量较多，下面我们将一些在后文中起到重要作用的性质汇总如下.

（1）Hölder 不等式

$$|E(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y})|\leqslant(E|\boldsymbol{X}|^{p})^{1/p}(E|\boldsymbol{Y}|^{q})^{1/q}$$

其中
$$\boldsymbol{X}\in\mathbf{L}^{p}(\Omega,\mathbf{R}^{d}),\quad \boldsymbol{Y}\in\mathbf{L}^{q}(\Omega,\mathbf{R}^{d})$$

且 $p>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 特别地，当 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{L}^{1}(\Omega,\mathbf{R}^{d})$ 时，有 $|E\boldsymbol{X}|\leqslant E|\boldsymbol{X}|$.

（2）Lyapunov 不等式

$$(E|\boldsymbol{X}|^{r})^{1/r}\leqslant(E|\boldsymbol{X}|^{p})^{1/p}$$

其中 $0<r<p<\infty,\boldsymbol{X}\in\mathbf{L}^{p}(\Omega,\mathbf{R}^{d})$.

（3）C_p 不等式

$$E\left|\sum_{i=1}^{d}X_i\right|^{p}\leqslant C_p\sum_{i=1}^{d}E\mid X_i\mid^{p}$$

其中 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{L}^{p}(\Omega,\mathbf{R}^{d})$，且当 $0<p\leqslant1$ 时 $C_p=1$，当 $p>1$ 时 $C_p=d^{p-1}$.

（4）Chebyshev 不等式

$$P\{\omega:|\boldsymbol{X}(\omega)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\varepsilon^{-p}E|\boldsymbol{X}|^{p}$$

其中 $\varepsilon>0,p>0,\boldsymbol{X}\in\mathbf{L}^{p}(\Omega,\mathbf{R}^{d})$.

（5）Jensen 不等式

$$g(E\boldsymbol{X})\leqslant E(g(\boldsymbol{X}))$$

其中 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{L}^{1}(\Omega,\mathbf{R}^{d}),g:\mathbf{R}^{d}\to\mathbf{R}$ 是一个凸函数.

（6）Lévy 定理

假设 $\{\boldsymbol{X}_n\}\subset\mathbf{L}^{1}(\Omega,\mathbf{R}^{d})$，且满足 $0\leqslant\boldsymbol{X}_1\leqslant\boldsymbol{X}_2\leqslant\cdots\leqslant\boldsymbol{X}_n$，则有

$$E(\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{X}_n)=\lim_{n\to\infty}E\boldsymbol{X}_n$$

（7）Fatou 定理

假设 $\{\boldsymbol{X}_n\}\subset\mathbf{L}^{1}(\Omega,\mathbf{R}^{d})$，且满足 $\boldsymbol{X}_n\geqslant0$，则有

$$E(\liminf_{n\to\infty}\boldsymbol{X}_n)\leqslant\liminf_{n\to\infty}E\boldsymbol{X}_n$$

（8）控制收敛定理

假设 $p\geqslant1,\{\boldsymbol{X}_n\}\subset\mathbf{L}^{p}(\Omega,\mathbf{R}^{d}),Y\in\mathbf{L}^{p}(\Omega,\mathbf{R})$，满足 $|\boldsymbol{X}_n|\leqslant Y$ a. s.，且 $\{\boldsymbol{X}_n\}$ 依概率 1 收敛到随机变量 $\boldsymbol{X}$，则有

$$\boldsymbol{X}\in\mathbf{L}^{p}(\Omega,\mathbf{R}^{d})$$

且

$$\lim_{n\to\infty}E\boldsymbol{X}_n=E\boldsymbol{X}$$

在经典的概率论中，对随机事件意义下的条件概率已有定义. 设 $A,B\in\mathscr{F}$，且 $P(B)>0$，则事件 B 条件下事件 A 的条件概率是

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

接下来我们介绍更加深刻的概念. 令 $\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ-代数，$\boldsymbol{\upsilon}$ 是 $(\Omega,\mathscr{G})$ 上的 $\mathbf{R}^{d}$ 值

测度. 假设在 $\mathscr{G}$ 中 P 的零测集必为 $\boldsymbol{v}$ 的零测集,即 $P(A)=0\Rightarrow \boldsymbol{v}(A)=0$,则由测度论中著名的 Radon-Nikodym 定理知,存在 $\mathscr{G}$ 可测的函数 $\boldsymbol{\xi}:\Omega\to\mathbf{R}^d$,使得

$$\boldsymbol{v}(A)=\int_A \boldsymbol{\xi}\mathrm{d}P,\quad \forall A\in\mathscr{G}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}$ 在 a. s. 意义下是唯一的,通常记为 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}P}$. 那么我们可以给出如下定义.

定义 1.1.2　令 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{L}^1(\Omega,\mathbf{R}^d)$,假设 $\forall A\in\mathscr{G}$,满足 $\boldsymbol{v}(A)=E(I_A\boldsymbol{X})$,则称

$$E(\boldsymbol{X}|\mathscr{G})\triangleq\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}P}$$

为随机变量 $\boldsymbol{X}$ 在 $\mathscr{G}$ 下的条件期望;而称

$$P(B|\mathscr{G})\triangleq E(I_B|\mathscr{G}),\quad \forall B\in\mathscr{F}$$

为事件 B 在 $\mathscr{G}$ 下的条件概率.

下面我们介绍一些在本书中发挥重要作用的有关条件期望的性质.

(1) 若 $\mathscr{G}=\{\varnothing,\Omega\}$ 是一个平凡代数,则

$$E(X|\mathscr{G})=EX$$

(2) 若 $\sigma(X)\subset\mathscr{G}$,则

$$E(XY|\mathscr{G})=XE(Y|\mathscr{G})$$

特别地,可得出 $E(E(X|\mathscr{G})Y|\mathscr{G})=E(X|\mathscr{G})E(Y|\mathscr{G})$.

(3) 若 $\sigma(X)$ 与 $\mathscr{G}$ 是独立的,则

$$E(X|\mathscr{G})=EX$$

特别地,当 X 与 Y 相互独立时,则有 $E(X|Y)=EX$.

(4) 若 $\mathscr{G}_1\subset\mathscr{G}_2$,则可得出如下双期望公式

$$E(E(X|\mathscr{G}_1)|\mathscr{G}_2)=E(E(X|\mathscr{G}_2)|\mathscr{G}_1)=E(X|\mathscr{G}_1)$$

(5) 若 $g(x)$ 是一个凸函数,则

$$g(E(X|\mathscr{G}))\leqslant E(g(X)|\mathscr{G})$$

特别地,当 $g(x)=|x|$ 时,我们有 $|E(X|\mathscr{G})|\leqslant E(|X||\mathscr{G})$.

1.2 随机过程

设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是给定的完备概率空间. $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 $\mathscr{F}$ 的单调增子 σ-代数流,即对 $\forall\, 0\leqslant t<s<\infty$ 有 $\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}_s\subset\mathscr{F}$ 成立. 当 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 右连续单调增且 $\mathscr{F}_0$ 包含所有的 P-零集,我们称该代数流满足通常条件. 此后,本书假设讨论中涉及的 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是完备概率空间,且 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 满足通常条件.

定义 1.2.1　任意 $\mathbf{R}^d$ 值的随机变量族 $\{X_t\}_{t\in I}$ 称为参数集是 I、状态空间是 $\mathbf{R}^d$

的随机过程.

随机过程 $\boldsymbol{X}(t,\omega)$可以被看作含两个自变量(t,ω)的二元函数

$$\boldsymbol{X}(t,\omega):I\times\Omega\to\mathbf{R}^d,\quad (t,\omega)\to X(t,\omega)$$

简记为 $X_t(\omega)$. 显然,对每一个固定的 $t\in I$, $X_t:\Omega\to\mathbf{R}^d$ 是随机变量. 而对每个固定的 $\omega\in\Omega$, $X(\omega):I\to\mathbf{R}^d$ 是一个时间函数,称为该过程的轨道.

在同时涉及多个随机过程如 $\boldsymbol{X}_t$, $\boldsymbol{Y}_t$ 等时,若 $\boldsymbol{X}_t=\boldsymbol{Y}_t$ a. s. ($\forall t\in I$),则称 $\boldsymbol{X}_t$ 与 $\boldsymbol{Y}_t$ 等价;若 $P(\boldsymbol{X}_t=\boldsymbol{Y}_t(\forall t\in I))=1$,则称 $\boldsymbol{X}_t$ 与 $\boldsymbol{Y}_t$ 无差别. 对于连续时间的随机过程而言,“无差别”比“等价”要强很多. 相互等价的随机变量,意味着对任何时间 t,两者有着相同的分布与统计性质;但若将时间 t 作为变量时,两者所表现出来的轨道性质则可能相差很远. 而相互无差别的随机过程,则意味着它们的轨道性质也几乎是一样的.

一个随机过程 $\boldsymbol{X}_t$ 常常关联着一些随机时间,如首次进入 Borel 集 B 的时间

$$\tau=\inf\{t\in I:\boldsymbol{X}_t\in B\}$$

就是一个随机时间,可看作 $\boldsymbol{X}_t$ 进入集合 B 的首达时间. 但为了使形如上述的随机时间 τ 能方便使用,就必须使其满足某种可测性条件,因此需要如下的准确定义.

定义 1.2.2 设随机变量 $\tau:\Omega\to[0,\infty]$ (注意此处取值可为∞),且满足$\{\tau\leqslant t\}\triangleq\{\omega:\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t$,则称 τ 为一个 $\mathscr{F}_t$ 停时,简称停时.

接下来,我们介绍一类特殊且重要的随机过程——鞅.

定义 1.2.3 令$\{M_t\}_{t\geqslant0}$是 $\mathscr{F}_t$ 可测的 $\mathbf{R}^d$ 值可积过程,对任意的 $0\leqslant s<t<\infty$:

(i) 若满足 $E(M_t|\mathscr{F}_s)=M_s$ a. s. ,则称 M_t 为鞅;

(ii) 若满足 $E(M_t|\mathscr{F}_s)\leqslant M_s$ a. s. (或 $E(M_t|\mathscr{F}_s)\geqslant M_s$ a. s.),则称 M_t 为上鞅(或下鞅);

(iii) 若存在停时序列$\{\tau_n\}$,使得$\{M_{t\wedge\tau_n}-M_0\}$是一个鞅,且 $\tau_n\to\infty$ a. s. ,则称$\{M_t\}_{t\geqslant0}$为局部鞅.

显然,$\{M_t\}_{t\geqslant0}$是一个鞅当且仅当$\{M_t\}_{t\geqslant0}$既是一个上鞅也是一个下鞅;$\{M_t\}_{t\geqslant0}$是一个上鞅当且仅当$\{-M_t\}_{t\geqslant0}$是一个下鞅;若$\{M_t\}_{t\geqslant0}$是一个上鞅,则意味着 EM_t 对时间变量 t 是单调减的. 若$\{M_t\}_{t\geqslant0}$是一个下鞅,则 EM_t 对时间变量 t 是单调增的. 若$\{M_t\}_{t\geqslant0}$是一个鞅,则说明 $EM_t=\text{const}$. 由此可见,鞅(包括上鞅与下鞅)有很强的统计规律性,这正是鞅概念有重要价值的原因.

定理 1.2.1(停时定理) 令 θ, ρ 是两个取值在有限时间上的停时,若$\{M_t\}_{t\geqslant0}$是一个在代数流 $\mathscr{F}_t$ 上的鞅,则

$$E(M_\theta|\mathscr{F}_\rho)=M_{\theta\wedge\rho}\quad \text{a. s.}$$

且$\{M_{\theta\wedge\rho}\}$仍是一个鞅.

鞅的主要优势之一是可建立一系列非常实用的不等式,称为鞅不等式. 在随机积分与随机微分方程的研究中,鞅不等式是主要工具之一. 本书给出如下几个常用的鞅

不等式.

定理 1.2.2(鞅不等式)　令 $0<a<b<+\infty$,假设 $\varepsilon>0, p\geqslant 1$, $\{M_t: a\leqslant t\leqslant b\}$ 是右连续的实值可积过程.

(i) 若 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个下鞅,则

$$P(\omega: \sup_{a\leqslant t\leqslant b} M_t(\omega)\geqslant\varepsilon)\leqslant\varepsilon^{-1}EM_b^+$$

$$P(\omega: \sup_{a\leqslant t\leqslant b} M_t(\omega)\geqslant\varepsilon)\leqslant\varepsilon^{-p}EM_b^p,\quad M_t\geqslant 0$$

(ii) 若 $\{M\}_{t\geqslant 0}$ 是一个上鞅,则

$$\varepsilon P(\omega: \sup_{a\leqslant t\leqslant b} M_t(\omega)\geqslant\varepsilon)\leqslant EM_a+EM_b^-$$

$$\varepsilon P(\omega: \inf_{a\leqslant t\leqslant b} M_t(\omega)\leqslant -\varepsilon)\leqslant EM_b^-$$

(iii) 若 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个取值在 $\mathbf{R}^d$ 上的鞅,则

$$P(\omega: \sup_{a\leqslant t\leqslant b} |M_t(\omega)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\varepsilon^{-p}E|M_b|^p$$

定理 1.2.3(Doob 不等式)　令 $0<a<b<\infty$,假设 $\varepsilon>0, p>1$, $\{M_t: a\leqslant t\leqslant b\}$ 是右连续的 p 次可积过程.

(i) 若 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 是非负上鞅,则

$$E|\sup_{a\leqslant t\leqslant b} M_t^p|\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p EM_b^p$$

(ii) 若 $\{\boldsymbol{M}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 $\mathbf{R}^d$ 值鞅,则

$$E(\sup_{a\leqslant t\leqslant b} |\boldsymbol{M}_t|^p)\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p E|\boldsymbol{M}_b|^p$$

接下来的两个半鞅收敛定理在本书中起着至关重要的作用,其证明可见参考文献[21].

定理 1.2.4(连续型半鞅收敛定理)　设 $\{A(t)\}$ 是实值 $\mathscr{F}_t$ 适应的增过程, $M(t)$ 是连续的实值局部鞅,有 $A(0)=M(0)=0$ a. s., ζ 是 $\mathscr{F}_0$ 可测的非负随机变量. 如果 $\{X(t)\}$ 是 $\mathscr{F}_t$ 适应的非负过程,且满足

$$X(t)=\zeta- A(t)+M(t)$$

则

$$\lim_{t\to\infty} X(t)<\infty,\quad \lim_{t\to\infty} A(t)<\infty \text{ a. s. 且 } EX(t)\leqslant E\zeta$$

即 $X(t)$ 与 $A(t)$ 都收敛到有界随机变量.

定理 1.2.5(离散型半鞅收敛定理)　令 $\{A_i\}$ 是非负随机变量列, M_i 是一个实值局部鞅,满足 A_i 是 $\mathscr{F}_{i-1}$ 可测的,且 $A_0=M_0=0$ a. s.,假设 $\{X_i\}$ 是非负半鞅且满足

$$X_i=\zeta-A_i+M_i$$

其中 ζ 是 $\mathscr{F}_0$ 可测的非负随机变量,则有

$$\lim_{i\to\infty} X_i<\infty,\quad \lim_{i\to\infty} A_i<\infty \text{ a. s. 且 } EX_i\leqslant E\zeta$$

即 X_i 与 A_i 都收敛到几乎处处有限的随机变量.

接下来我们介绍一个非常重要的随机过程——Brown 运动. Brown 运动是 1827 年 Robert Brown 观察花粉的无规则运动而被发现并由此而得名的. 而 Brown 运动在数学上被看作随机过程则要归功于 Norbert Wiener,因此该过程也被称为 Wiener 过程. 我们首先给出 Brown 运动的数学定义.

定义 1.2.4 设$\{\boldsymbol{\omega}(t):t\in\mathbf{R}_+\}$是 m 维 $\mathscr{F}_t$ 适应过程,它满足以下三条性质:

(i) $\boldsymbol{\omega}(0)=0$ a. s. ;

(ii) (正态性)对任意 $0\leqslant s<t<\infty$,有 $\boldsymbol{\omega}(t)-\boldsymbol{\omega}(s)\sim N(\mathbf{0},(t-s)\boldsymbol{\Sigma})$,其中 $\boldsymbol{\Sigma}=[\sigma_{kl}]\in\mathbf{R}^{m\times m}$是正定矩阵;

(iii) (增量独立性)对任意 $0\leqslant s<t<\infty$,有 $\boldsymbol{\omega}(t)-\boldsymbol{\omega}(s)$与 $\mathscr{F}_s$ 是独立的.

则称 $\boldsymbol{\omega}(t)$是一个 m 维的 Brown 运动或 Wiener 过程;当 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为单位矩阵时,称 $\boldsymbol{\omega}(t)$为 m 维的标准 Brown 运动.

从时间断面上来看,Brown 运动服从正态分布,因此有一系列良好的性质,这些性质在后文中将被使用.

定理 1.2.6 设 $\boldsymbol{\omega}(t)=(\omega_1(t),\omega_2(t),\cdots,\omega_m(t))^{\mathrm{T}}$ 是一个 m 维的 Brown 运动. 有如下结论成立:

(i) 对任意 $t>0$,有 $\boldsymbol{\omega}(t)\sim N(\mathbf{0},t\boldsymbol{\Sigma})$,因此有 $E\boldsymbol{\omega}(t)=\mathbf{0}$,且 $D(\boldsymbol{\omega}(t))=t\boldsymbol{\Sigma}$;

(ii) 若 $\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{n\times m}$,且 $\operatorname{rank}\mathbf{A}=n$,则 $\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}(t)$是一个 n 维的 Brown 运动;

(iii) 每一个分量 $\omega_k(t)$都是一维 Brown 运动,并且有 $\omega_1(t),\omega_2(t),\cdots,\omega_m(t)$相互独立$\Leftrightarrow\boldsymbol{\Sigma}$ 为对角阵.

但是从纵向来看,Brown 运动却有着高度复杂的轨道性质,我们从下面的定理可以看出.

定理 1.2.7 Brown 运动 $\boldsymbol{\omega}(t)$有如下轨道性质:

(i) (连续性)$\boldsymbol{\omega}(t)$的轨道在$[0,\infty)$上是连续的;

(ii) (不可微性)设 $\alpha>\dfrac{1}{2}$,则对几乎所有轨道

$$\limsup_{s\to t}\frac{|\boldsymbol{\omega}(s)-\boldsymbol{\omega}(t)|}{|s-t|^{\alpha}}=\infty,\quad \forall\, t\geqslant 0$$

令 $\alpha=1$ 时可得出,几乎所有轨道在$[0,\infty)$上都是处处不可微的,因此有无界变差.

(iii) (重对数率)对于一维标准 Brown 运动有

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\omega(t)}{\sqrt{2t\ln(\ln t)}}=-1 \text{ a. s.}$$

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\omega(t)}{\sqrt{2t\ln(\ln t)}}=1 \text{ a. s.}$$

而对于 m 维的标准 Brown 运动,则有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{|\boldsymbol{\omega}(t)|}{\sqrt{2t\ln(\ln t)}}=1 \text{ a. s.}$$