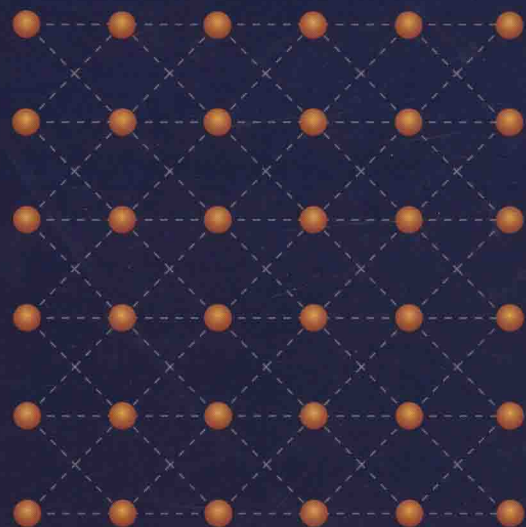
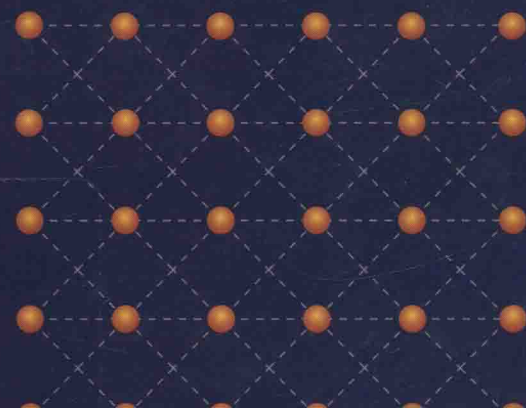


大规模并行电磁计算系列丛书
西电学术文库图书



计算电磁学中的 超大规模并行矩量法

张 玉 赵勋旺 等著



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

大规模并行电磁计算系列丛书
西电学术文库图书

计算电磁学中的 超大规模并行矩量法

张 玉 赵勋旺
陈 岩 林中朝 著
王 永 左 胜

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

近年来,我国在与电磁密切相关的领域取得了一系列重大进展,比如空中预警指挥飞机成功服役等,这些复杂系统工程实施都离不开对电磁场与电磁波的研究。认知复杂系统电磁特性的手段主要有实验测量和数值计算。对比而言,电磁场数值计算具有高效、灵活方便等显著优势,因此成为设备电磁特性分析与设计的现代化必要手段,也日益发挥着越来越重要的作用。作为电磁场数值分析方法中的经典算法,矩量法具有很高的理论精度,但在处理复杂电大系统电磁问题时,其所需付出的计算存储资源与计算时间代价非常高,这使得矩量法难以用于复杂系统的电磁计算。针对这个难题,本书研究如何利用大规模并行计算技术实现矩量法对复杂电大系统的精确、高效计算。

本书兼顾矩量法的理论基础、高性能计算技术与工程应用,围绕着矩量法处理电磁问题的算子方程、矩阵构建、矩阵方程并行求解、并行矩阵构建策略、核外算法、快速算法、混合方法、异构加速计算技术、工程应用实例等几个方面,系统地给出了超大规模并行矩量法的关键理论、技术以及工程应用。书中高阶矩量法结合波端口、单向通信 CALU 算法、CPU/GPU 与 CPU/MIC 异构加速矩量法等方面的内容新颖。特别是在排名第一的天河二号超级计算机中成功开展的 20 余万 CPU 核规模的矩量法计算,是当前国际上所达到的最大并行矩量法规模。这一工作使得采用矩量法精确分析复杂系统级电磁问题成为了一种可能,具有重要的战略意义。

本书可作为高等学校工科电子信息、通信、计算机类等相关专业的广大科技工程人员的参考指导书。

图书在版编目(CIP)数据

计算电磁学中的超大规模并行矩量法/张玉等著. —西安:西安电子科技大学出版社,2016.4

ISBN 978-7-5606-3944-4

I. ① 计… II. ① 张… III. ① 电磁计算—矩量法 IV. ① TM153

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 061617 号

策 划 邵汉平

责任编辑 阎 彬 王 瑛

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西百花印刷有限责任公司分公司

版 次 2016年4月第1版 2016年4月第1次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印 张 30

字 数 710千字

印 数 1~2000册

定 价 136.00元

ISBN 978-7-5606-3944-4/TM

XDUP 4236001-1

*** 如有印装问题可调换 ***

前 言

近年来,我国在与电磁密切相关的领域取得了一系列重大进展,比如空中预警指挥飞机成功服役等,这些复杂系统工程实施都离不开对电磁场与电磁波的研究。认知复杂系统电磁特性的手段主要有实验测量和数值计算。实验测量不可或缺,这一点无需多论,但需要指出的是,许多实际的情况不允许也难以实现精确的实验测量,比如飞机在空中飞行时雷达所处的电磁环境与地面测试时所处的环境有极大不同。电磁场数值计算指的是采用数值方法在频域或时域求解 Maxwell 方程及其衍生的其他方程。对比而言,电磁场数值计算具有高效、灵活、方便等显著优势,因此成为设备电磁特性分析与设计的现代化必要手段,也日益发挥着越来越重要的作用。

电磁场数值计算所追求的高精度与复杂电大系统计算所需要的庞大计算资源是一对矛盾。传统上来看,通常能处理电大尺寸目标的数值方法一般都不具备很高的数值精度,而能算得准的数值方法一般都算不大。在大型天线阵列布局等复杂电磁工程中,算得“准”是一个前提,不然不仅起不到在总体设计中的指导意义,反而还可能会误导工程设计。当前“复杂、电大”系统的设计对电磁仿真计算提出的迫切需求就是能提供“精确、高效”解,要求数值方法能同时具备“算得准、算得大、算得快”的特点。

就精度而言,在电磁场数值分析方法中矩量法具有高理论精度的特点。矩量法把所求解的电磁场算子方程转化为矩阵方程。由于其理论精度高,在处理诸如机载相控阵等复杂电大系统电磁问题时,会产生庞大的复数稠密矩阵,所需付出的计算存储资源与计算时间代价也会很高,这使得矩量法无法解决复杂系统的电磁计算问题。打破这个瓶颈的一个技术途径是采用快速算法,然而,在金属介质混合结构大型天线阵列等典型的复杂电磁模型计算中,快速算法所必须依赖的迭代解法又常常难于收敛。不同于快速算法,作者与美国同事一起,采用并行核外计算理论与技术,将“硬盘”存储动态纳入矩量法计算过程,极大地扩充了矩量法求解问题的规模,并分别于 2009 年、2012 年在美国 John Wiley 出版社出版了重点介绍并行核外矩量法理论与技术的英文专著。这一方法直接从计算技术角度出发来扩展矩量法的计算规模,采用核外 LU 分解求解矩阵方程,在扩大规模的同时既不会带来精度损失,也不会存在收敛风险。2009 年作者采用该技术已成功解决了一批在当时被认为对矩量法而言极具挑战性的问题。

近年来,国内上海超级计算中心的“魔方”超级计算机、国家超级计算济南中心的“神威蓝光”超级计算机、国家超级计算天津中心的天河一号、国家超级计算广州中心的天河二号等超级计算机相继投入应用,表明了我国在高效能计算机研制领域取得了极大的成就。超级计算机指当今时代运算速度较快的大容量大型计算机,是解决国家经济建设、社会发展、科学进步、国家安全和国防建设等领域一系列重大挑战性问题的工具,已成为世界各国特别是大国争夺的战略制高点。在 2015 年 10 月公布的全球超级计算机 500 强榜单中,中国国防科学技术大学研制的“天河二号”超级计算机连续六次获得冠军。中国高性能计算在研制和建造方面取得了巨大的进步,在硬件层面已经逐渐赶上了国际水平。然而,我们还必须清醒地看到,国内高性能计算的软硬件两个方面目前仍很不平衡,软件方

面仍需要大力发展,尤其在应用方面,超大规模并行应用开发较少,这与发达国家相比仍有不小差距。

重大电磁工程对电磁高精度计算的迫切需求以及国内高性能矩量法计算软件匮乏的现状,促使我们在这一交叉学科领域开展了系统深入的长期研究。2006年作者采用PC集群研究了并行矩量法,2008年在惠普集群中实现了512核并行核外高阶矩量法计算。2010年,课题组在上海超级计算中心的“魔方”超级计算机上搭建了国内第一个千核规模的工业应用级电磁精细仿真平台,计算了机载相控阵天线辐射特性等多个案例。在国家高效能计算机领域863重大课题“复杂电磁环境数值模拟”项目资助下,2013年9月课题组在上海超级计算中心率先实施了1万CPU核规模的矩量法并行计算;2015年初在国家超级计算济南中心的纯国产“神威蓝光”超级计算机中实施了3万CPU核并行高阶矩量法计算,同年11月实施了10万CPU核并行高阶矩量法计算。值得一提的是,济南中心的建设成功,标志着我国已成为继美国、日本后第三个能够采用自主处理器构建千万亿次超级计算机系统的国家。2015年2月,课题组在排名世界第一的天河二号超级计算机中成功地开展了20万CPU核规模的矩量法超大规模电磁计算(同时也实现了20万CPU核规模FDTD等数值方法的高性能并行计算)。这些研究工作使得我们已经具备了在超级计算机中采用矩量法处理复杂系统电磁计算的战略能力。

另一方面,超级计算机虽然大幅度提升了电磁计算能力,但也要注意,绝大多数的研究机构并没有千万亿次级别的高效能计算机。采用典型研究机构能拥有的千核计算机资源来开展复杂的系统级高精度电磁计算,是工程技术领域对电磁场数值计算能力提出的又一现实需求。在这种情况下,本书在解决了矩量法超级计算战略能力提升后,在并行矩量法研究基础上,讨论了并行矩量法的区域分解算法、高阶矩量法混合快速多极子等精度可控的算法,以期能够采用典型的千核规模计算机所拥有的计算资源,来高效地完成当前典型的工程仿真。

在兼顾矩量法的理论基础、高性能计算、工程应用的基础上,本书围绕着矩量法处理电磁问题的算子方程、矩阵构建、矩阵方程求解、大规模并行计算、核外矩阵计算、快速算法、混合方法、异构加速计算技术、工程应用实例等几个方面进行了技术总结,以期能系统地介绍矩量法高性能计算的关键理论与技术。考虑到并不是所有读者都已经是计算电磁学的多年从业者,书中也给出了必要的并行计算基础介绍和矩量法程序实例,以期能引导初学者理解、掌握和使用本书介绍的方法。

基于这些考虑,本书内容分为六个主要部分,具体架构如下图所示。

第一部分即第1章。采用矩量法求解电磁场问题,首先需要构建电磁场边值问题的算子方程。从等效原理出发,本章给出了几种常用的电磁场积分方程,其中包括电场积分方程(EFIE)、磁场积分方程(MFIE)、混合场积分方程(CFIE)与PMCHW方程,并讨论了平面波、电压源、波端口激励源等典型的馈源模型。

矩量法实施过程中的关键环节是选取基函数、权函数,用于构建矩阵。第2、3章分别介绍了低阶RWG基函数与高阶多项式基函数。这两章构成了本书的第二部分。选取基函数以后,在矩阵方程构建的过程中,奇异积分计算则是核心的计算理论。第2章对低阶RWG基函数矩量法的电场积分方程、磁场积分方程中的奇异积分处理方法给予了详细讨论;第3章则介绍了高阶多项式基函数矩量法,并对高阶基函数矩量法处理线天线问题的奇异积分进行了详细讨论。与低阶RWG基函数矩量法相比,高阶矩量法采用高阶多项式

矩量法的超大规模并行计算

矩量法概论、电磁场积分方程与激励源	EFIE、MFIE、CFIE、PMCHW方程、波端口激励源模型	第1章
矩量法的矩阵方程	RWG基函数、高阶多项式基函数	第2、3章
矩阵方程的求解	直接解法(并行LU分解、ScaLAPACK、CALU)、迭代解法(CG、预条件)	第4章
矩量法的大规模计算	大规模并行MoM、并行核外矩量法	第5、6章
基于矩量法的并行快速算法、区域分解方法与工程应用	并行快速算法、并行混合方法、工程应用举例	第7、8、9章
矩量法的异构计算技术	CPU/GPU矩量法、CPU/MIC矩量法	第10章
数值积分	一维、二维高斯数值积分	附录A
并行计算基础	集群介绍、MPI编程基础	附录B
并行矩量法实例	线天线的矩量法分析、并行程序实例	附录C

函数作为基函数来描述电磁流分布，可大大降低未知量个数，减小矩阵规模。结合不同的激励情形，第2、3章也分别给出了典型数值实例以表明其通用性和有效性。

本书第三部分是第4章。求解矩阵方程是矩量法的另一个关键环节。第4章分别介绍了矩阵方程的直接解法与迭代解法。直接解法中给出了并行计算中的传统LU分解方法以及通信避免LU分解方法。迭代解法中则重点讨论了一种通用的预条件方法，以便使迭代解法适用于不同基函数矩量法，加快收敛过程。

第5~9章构成了本书的第四部分，这一部分阐述大规模矩量法仿真计算关键理论与技术。第5章分别介绍了矩量法的矩阵并行填充策略以及万核、10万核、20万核超大规模计算时程序的并行性能情况。第6章重点讲述当内存资源不足时，采用硬盘来补充内存进行核外矩量法计算。第7章讲述基于矩量法的快速算法——快速多极子方法的基本理论与应用。如果说第6章是从计算机核外矩阵计算技术角度来扩展存储资源的，那么第7章则是从快速算法角度出发来缩减矩量法所需要的存储资源，使能求解的问题规模变大。第8章进一步综合使用了并行矩量法、快速多极子方法进行混合方法数值计算。第9章则给出了部分工程应用实例，以此表明本书介绍的方法处理典型电磁工程计算问题的能力。

本书第五部分即第10章。这一章对高性能计算新技术进行了探索，给出了GPU核

外、两级核外矩量法以及 MIC 加速矩量法。

第六部分是附录。为了方便读者阅读，附录 A 对矩量法中的数值积分进行了介绍。附录 B、附录 C 是读者掌握第四部分的基础。没有并行计算基础的读者，应先阅读附录 B、附录 C 之后，再去阅读本书第四部分，有经验的读者则可以略过。

围绕矩量法的矩阵构建、矩阵存储、矩阵方程求解三个关键环节，本书力求在以下五个方面做到内容新颖：

(1) 高阶矩量法结合波端口方法新。尽管波端口激励模型已被成功应用于低阶矩量法，但却鲜有文献研究高阶基函数矩量法中的波端口问题，本书给出了这方面的计算理论和数值实例。

(2) 并行求解理论新。本书在求解矩量法矩阵方程方面，针对直接解法，给出了一种高效率的单向通信 CALU 算法，其性能不仅优于商业数学库，还在超大规模并行计算时实现了自主保障。

(3) 异构计算技术新。本书不仅给出了采用 CPU 计算资源的并行矩量法核心理论与关键技术，还分别给出了 GPU 与 MIC 异构加速的矩量法计算技术研究进展。

(4) 并行计算规模大。一方面，课题组在纯国产“神威蓝光”超级计算机上运行并行矩量法，突破了矩量法单一任务利用纯国产 10 万 CPU 核的并行规模，这是在采用完全国产 CPU 处理器的超级计算机上运行过的最大矩量法计算规模。

另一方面，课题组借助于当前排名世界第一的“天河二号”超级计算机，突破了高阶矩量法 20 万 CPU 核的并行规模。查新结果表明，这是国际上并行矩量法计算所达到的最大并行规模。

(5) 工程应用范围广。本书给出了丰富的、不同领域的应用实例，原来很多被认为不可能采用矩量法进行仿真计算的电磁问题，在本书中已经变为现实。读者可从这些算例中感受大规模并行矩量法技术带来的益处。将理论成果更好地服务于工程急需，也恰恰是本书写作的根本目的。

本书的研究工作得到国家高技术研究发展计划(863 计划)课题“复杂电磁环境数值模拟”(2012AA01A308)的支持。本书的研究工作离不开 863 专家组专家们的悉心指导与热情帮助。本书的相关研究工作还得到了教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-13-0949)和陕西省青年科技新星项目(2013KJXX-67)的支持。本书也是对近年来课题组研究工作的总结，多名研究生参与了课题研究。王永、畅青参与了第 2 章，陈岩参与了第 4、5 章，左胜参与了第 6 章，李艳艳参与了第 8 章，林中朝参与了第 5、8、9 章，陈岩、吕兆峰、张光辉参与了第 10 章的相关研究与文档整理。书中所述矩阵 LU 分解、OpenBLAS 相关内容也分别得到了浪潮集团张清博士团队，中科院计算所张云泉研究员、张先轶博士的热情帮助。书中大量的测试调优工作得到了上海超级计算中心，国家超级计算济南中心、广州中心的大力支持。作者对他们一并表示衷心感谢！

在本书出版过程中，西安电子科技大学出版社的编辑也做了大量细致的工作，这里表示感谢。

限于作者自身水平，书中难免会有一些疏漏与不足之处，敬请读者批评指正！

张玉

2015 年 10 月于
西安电子科技大学

目 录

第 1 章 矩量法与场积分方程	1
1.1 矩量法简介	1
1.1.1 矩量法的数学原理	1
1.1.2 矩量法求解算子方程实例	3
1.2 电磁场基本理论	6
1.2.1 麦克斯韦方程组	6
1.2.2 时谐场的复数表示法	7
1.2.3 电流连续性方程	8
1.2.4 媒质本构方程	9
1.2.5 边界条件	10
1.2.6 矢量波动方程	11
1.2.7 位函数理论	12
1.2.8 玻印廷定理	23
1.2.9 对偶原理	25
1.2.10 唯一性定理	27
1.2.11 洛伦兹互易定理	29
1.2.12 等效原理	30
1.3 面积分方程	32
1.3.1 理想导体表面积分方程	32
1.3.2 两区域介质表面 PMCHW 积分方程	37
1.3.3 多区域任意复杂结构的积分方程	40
1.4 激励源	43
1.4.1 平面波	43
1.4.2 电压源	44
1.4.3 磁流源	44
1.4.4 导波场源	45
1.4.5 激励源的对称性	52
1.5 小结	55
参考文献	55
第 2 章 RWG 基函数矩量法	57
2.1 几何建模	57
2.2 RWG 基函数	58
2.3 电场积分方程的矩量法解	60
2.3.1 矩阵方程构建	60
2.3.2 矩阵元素的积分计算	62
2.3.3 低阶奇异积分的解析处理	62
2.4 磁场积分方程的矩量法解	68

2.4.1	矩阵方程构建	68
2.4.2	矩阵元素的积分计算	70
2.4.3	高阶奇异积分的解析处理	70
2.5	PMCHW 积分方程的矩量法解	76
2.5.1	矩阵方程构建	77
2.5.2	矩阵元素的积分计算	78
2.6	EFIE+PMCHW 方程的矩量法解	79
2.7	数值算例	80
2.7.1	EFIE 与 MFIE 矩量法分析散射问题	80
2.7.2	PMCHW 矩量法分析散射问题	81
2.7.3	微带结构的散射	82
2.7.4	EFIE 矩量法分析波端口问题	82
2.8	小结	85
	参考文献	86
第 3 章	高阶基函数矩量法	87
3.1	几何建模	87
3.1.1	线结构的截锥体建模	87
3.1.2	面结构的双线性曲面建模	88
3.2	高阶基函数	89
3.2.1	细导线上电流的展开	89
3.2.2	双线性曲面上电流的展开	90
3.3	矩阵方程构建	93
3.3.1	细导线的检验过程	93
3.3.2	双线性曲面的检验过程	95
3.4	数值算例	98
3.4.1	平面波激励	98
3.4.2	矩形波端口激励	99
3.4.3	圆形波端口激励	102
3.4.4	同轴激励	104
3.5	高阶基函数矩量法与 RWG 基函数矩量法的比较	107
3.5.1	微带贴片阵列	107
3.5.2	X 波段波导缝隙天线阵	109
3.5.3	Ka 波段波导缝隙天线	110
3.6	小结	111
	参考文献	111
第 4 章	矩阵方程求解	112
4.1	直接解法	112
4.1.1	基于 LU 分解的矩阵方程求解方法	112
4.1.2	LU 分解算法	113
4.1.3	分块 LU 分解算法	118
4.1.4	分块 LU 分解算法并行实现	124
4.2	线性数学库	140
4.2.1	线性代数库简介	140

4.2.2	OpenBLAS 和矩阵乘法优化	143
4.3	并行分块 LU 分解算法的参数优化	144
4.3.1	分块大小	144
4.3.2	进程网格	146
4.4	并行分块 LU 分解算法性能测试	149
4.4.1	随机矩阵 LU 分解性能测试	149
4.4.2	矩量法矩阵 LU 分解性能测试	151
4.5	迭代解法	157
4.5.1	共轭梯度法	157
4.5.2	广义最小余量法	158
4.5.3	块对角预条件	159
4.5.4	基函数邻居预条件	160
4.5.5	并行迭代解法	161
4.6	迭代求解器性能分析	161
4.6.1	预条件加速 RWG 基函数 MLFMA 迭代求解	161
4.6.2	预条件加速正弦基函数矩量法矩阵方程求解	163
4.6.3	预条件加速屋顶基函数矩量法矩阵方程求解	167
4.7	小结	169
	参考文献	169
第 5 章	超大规模并行矩量法	172
5.1	并行矩量法矩阵填充	172
5.1.1	RWG 基函数矩量法的并行矩阵填充	172
5.1.2	高阶基函数矩量法的并行矩阵填充	182
5.2	并行矩量法性能评估	183
5.2.1	并行 RWG 基函数矩量法的性能评估	183
5.2.2	并行高阶基函数矩量法的性能评估	187
5.3	数值算例	204
5.3.1	波导缝隙天线阵列辐射特性	204
5.3.2	微带天线阵列辐射特性	205
5.3.3	机载八木天线阵列的辐射特性	207
5.3.4	机载微带天线阵列的辐射特性	210
5.4	小结	223
	参考文献	223
第 6 章	并行核外高阶基函数矩量法	224
6.1	并行核外算法的矩阵分布	224
6.2	并行核外高阶基函数矩量法矩阵填充方案	225
6.3	核外 LU 分解算法	226
6.3.1	核外 LU 分解算法的 I/O 分析	226
6.3.2	核外 Left-Looking LU 分解算法设计	230
6.3.3	核外 One-Slab Left-Looking LU 分解算法设计	233
6.4	并行核外 LU 分解算法的程序实现	236
6.5	基于核外 LU 分解的矩阵方程求解方法	238
6.6	并行核外 LU 分解算法的参数优化	240

6.7	性能监测	242
6.8	数值算例	247
6.8.1	飞机的散射特性	247
6.8.2	波导缝隙阵天线的辐射特性	250
6.8.3	微带阵列天线的辐射特性	251
6.8.4	机载伞形印刷振子天线阵列的辐射特性	252
6.9	小结	255
	参考文献	256
第7章	基于RWG基函数矩量法的并行多层快速多极子	257
7.1	自由空间多层快速多极子方法	257
7.1.1	自由空间格林函数的加法定理和平面波展开理论	258
7.1.2	自由空间快速多极子方法	259
7.1.3	自由空间多层快速多极子方法	261
7.2	半空间多层快速多极子方法	263
7.2.1	半空间混合场积分方程	264
7.2.2	半空间 MLFMA 近相互作用	266
7.2.3	半空间 MLFMA 远相互作用	267
7.2.4	半空间 MLFMA 的矩阵向量乘积	270
7.3	并行半空间多层快速多极子方法	272
7.3.1	矩阵向量乘积的数据分配方案	272
7.3.2	半空间 MLFMA 的自适应划分策略	272
7.4	并行性能测试	276
7.4.1	精度验证	277
7.4.2	并行效率测试	278
7.5	工程应用	282
7.5.1	波音 737 飞机 RCS	282
7.5.2	某型飞机 RCS	284
7.5.3	某大型飞机 RCS	287
7.5.4	地面上坦克 RCS	288
7.5.5	地面上汽车 RCS	290
7.5.6	海面上舰载天线电磁辐射特性	292
7.6	小结	293
	参考文献	293
第8章	基于矩量法的并行混合算法	295
8.1	并行矩量法的区域分解方法	295
8.1.1	区域分解算法的基本原理	295
8.1.2	算法精度验证	299
8.1.3	数值算例	304
8.2	并行高阶基函数矩量法与多层快速多极子混合算法	313
8.2.1	混合算法的基本原理	314
8.2.2	算法精度验证	315
8.2.3	数值算例	319
8.3	小结	333

参考文献	333
第 9 章 并行高阶基函数矩量法的工程应用	335
9.1 电磁辐射特性计算	335
9.1.1 机载微带天线阵列	335
9.1.2 波导缝隙天线阵列	338
9.1.3 民航客机周围近场	341
9.1.4 海事卫星天线	344
9.1.5 基站天线与室内电磁辐射评估	347
9.1.6 车厢内 WiFi 天线	355
9.2 电磁散射特性计算	356
9.2.1 箔条云	356
9.2.2 飞机发动机	357
9.2.3 无人机	358
9.3 旋转叶片调制效应计算	361
9.3.1 旋翼对散射场的调制	361
9.3.2 螺旋桨对辐射场的调制	362
9.4 小结	364
参考文献	364
第 10 章 异构平台中的并行矩量法	365
10.1 并行矩量法特征分析	365
10.1.1 并行框架分析	365
10.1.2 程序热点分析	367
10.1.3 异构协同计算的难点	369
10.2 CPU/GPU 异构并行矩量法	369
10.2.1 国内外研究现状	369
10.2.2 基本并行框架设计	370
10.2.3 程序热点加速	373
10.2.4 性能测试与应用算例	376
10.3 CPU/GPU 异构并行两级核外矩量法	386
10.3.1 算法基本原理	386
10.3.2 GPU 与 CPU 任务分配比例优化	389
10.3.3 数值算例	390
10.4 CPU/MIC 异构并行矩量法	392
10.4.1 基本并行框架设计	392
10.4.2 程序热点加速	394
10.4.3 MIC 与 CPU 任务分配比例优化	399
10.4.4 数值算例	399
10.5 CPU/GPU 与 CPU/MIC 的性能比较	405
10.6 大规模 CPU/MIC 异构并行矩量法	407
10.7 小结	411
参考文献	411
附录 A 高斯数值积分	413

A.1	一维高斯积分	413
A.2	二维高斯积分	414
	参考文献	416
附录 B	并行计算基础	417
B.1	硬件平台	417
B.1.1	计算机集群	417
B.1.2	本书使用的计算平台	418
B.2	并行编程环境	421
B.3	并行算法	422
B.4	并行计算性能评测与优化	423
B.5	MPI 编程示例	424
B.6	软件安装与设置	427
	参考文献	430
附录 C	细线天线的矩量法分析	432
C.1	积分方程的构建	432
C.2	积分方程的离散	433
C.3	选配过程	435
C.4	矩阵元素的计算	436
C.5	辐射远场的计算	438
C.6	矩阵填充算法	439
C.7	并行程序流程	440
C.8	并行程序实例	442
C.9	程序编译与运行	465
	参考文献	467

第1章 矩量法与场积分方程

电磁场分析中常常需要处理不同的“边值”问题，即寻求麦克斯韦方程组在给定边界条件下的解。在处理边值问题时，很自然会提出这样的问题：应采用什么样的边界条件？在什么样的边界条件下，我们求得的满足边界条件的麦克斯韦方程组的解是唯一的？若采用矩量法分析电磁场问题，那么矩量法可通过求解哪些“算子方程”来解决电磁场计算问题？

为了回答这些问题，本章首先简单回顾矩量法求解算子方程的一般过程，然后在介绍了电磁场的基本理论后，分别讨论了处理金属问题的电场积分方程、磁场积分方程、混合场积分方程，以及处理介质问题的PMCHW方程，并给出了几种典型的激励源模型。

1.1 矩量法简介

矩量法作为一种数学方法，很久之前就被提出。R. F. Harrington系统地研究了如何用矩量法求解电磁场问题，他在1968年出版的专著《Field Computation by Moment Methods》中对矩量法在电磁场领域的应用做了介绍^[1]。尽管矩量法早已被计算电磁领域的研究者所熟知，但为了有助于未研究过矩量法的读者理解本书内容，仍有必要简单回顾其基本原理与计算流程。

1.1.1 矩量法的数学原理

本节将对矩量法的数学原理^[2]进行说明。对于一般的非齐次线性方程，都可写为如下通式：

$$L(f) = g \quad (1.1-1)$$

式中： L 是线性算子； g 为已知函数，也叫激励； f 为待求解的未知函数。 f 和 g 分别定义在函数空间 F 和 G 上，算子 L 是将 F 空间的函数映射到 G 空间里的泛函。我们所研究的是确定论问题，即对于一个已知的 g ，只有一个解 f ，即式(1.1-1)的解是唯一的。

为获得式(1.1-1)的解，将未知函数用其定义域空间的一组函数展开：

$$f = \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n \quad (1.1-2)$$

其中， α_n 为未知的展开系数， $\{f_n\}$ ($n=1, 2, 3, \dots, N$)为 F 空间的一组展开函数。如果 $\{f_n\}$ 是完备的，则展开式可严格地逼近未知函数 f 。通常只有当 $N \rightarrow \infty$ 时，展开函数(此时为基函数)才是完备的。实际中由于所选的展开函数在定义域内不一定完备，或由于数值原因无法选取足够多的展开函数，可能导致原函数 f 与式(1.1-2)的展开式之间存在误差。再将式(1.1-2)代入式(1.1-1)，利用 L 算子的线性特性，原来的算子方程就转化为含有 N 个未知量 α_n 的代数方程：

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n L(f_n) \approx g \quad (1.1-3)$$

但此时因为展开函数与原函数的误差被带到了非齐次线性方程中，所以式(1.1-3)两边已经产生了差别。

矩量法本质上是**最小加权余量法**，参考式(1.1-3)，将这个余量记为

$$\text{Residual} = \sum_{n=1}^N \alpha_n L(f_n) - g \quad (1.1-4)$$

矩量法就是要使这个余量最小化，理想状态是要使 $\text{Residual}=0$ ，这通常难以实现，但可以让余量以某种平均的方式趋于零。引入并定义**内积** $\langle f, g \rangle$ ，使其满足

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \langle g, f \rangle \\ \langle \alpha f + \beta h, g \rangle &= \alpha \langle f, g \rangle + \beta \langle h, g \rangle \\ \langle f, f^* \rangle &= \begin{cases} > 0, & f \neq 0 \\ = 0, & f = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1-5)$$

其中， α, β 为标量常数， $*$ 表示复数共轭。注意：在希尔伯特(Hilbert)空间中，内积的定义用上述定义对应于 $\langle f, g^* \rangle$ ，此处这样定义内积符号是为了更方便地将共轭运算显式地表示出来^[1]。为了获得使式(1.1-4)余量最小的解，需要在值域空间 G 内定义一组**检验函数**（也称为**权函数**） $\{w_m\}$ ($m=1, 2, 3, \dots, N$)，将这组权函数分别与余量做内积，这就是所谓的**选配过程或检验过程**。

令权函数与余量的内积为零：

$$\langle w_m, \text{Residual} \rangle = 0 \quad (1.1-6)$$

式(1.1-6)等价于

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n \langle w_m, L(f_n) \rangle = \langle w_m, g \rangle, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (1.1-7)$$

这样做的含义就是要使余量在平均意义下最小以确定未知系数，这就是权函数的作用。当选取的权函数 w_m 与余量函数 Residual 相同时，式(1.1-6)的数学意义是余量的二阶矩为零(或称为最小二乘法)；当选取的权函数 w_m 与基函数 f_n 相同时，称为伽略金法。将激励 g 与 $L(f_n)$ 分别向**权空间** (权函数构成的空间) 投影，也即取它的矩，这就是矩量法名称的由来。

式(1.1-7)可写为矩阵方程：

$$l\alpha = g \quad (1.1-8)$$

式中

$$l = \begin{bmatrix} \langle w_1, L(f_1) \rangle & \langle w_1, L(f_2) \rangle & \cdots & \langle w_1, L(f_N) \rangle \\ \langle w_2, L(f_1) \rangle & \langle w_2, L(f_2) \rangle & \cdots & \langle w_2, L(f_N) \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle w_N, L(f_1) \rangle & \langle w_N, L(f_2) \rangle & \cdots & \langle w_N, L(f_N) \rangle \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} \langle w_1, g \rangle \\ \langle w_2, g \rangle \\ \vdots \\ \langle w_N, g \rangle \end{bmatrix} \quad (1.1-9)$$

只要基函数 $\{f_n\}$ 和权函数 $\{w_m\}$ 各自线性无关, \mathbf{l} 就是非奇异矩阵。通过求解矩阵方程 (1.1-8), 可得到原算子方程的矩量法解:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}\mathbf{l}^{-1}\mathbf{g} \quad (1.1-10)$$

其中 $\mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3, \dots, f_N]$ 。

矩量法求解边值问题的一般过程如图 1.1-1 所示。

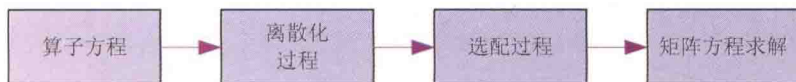


图 1.1-1 矩量法流程

可见, 矩量法是一种将线性算子方程离散后通过加权转化为矩阵方程的方法。算子方程的矩量法解是精确的还是近似的, 取决于离散化程度、基函数 f_n 和权函数 w_m 的选择以及矩阵方程的求解方法。

在用矩量法求解电磁问题的算子方程时, 一般习惯将式(1.1-8)写为

$$\mathbf{Z}\mathbf{I} = \mathbf{V} \quad (1.1-11)$$

其中, \mathbf{Z} 是一个 $N \times N$ 的复数稠密矩阵, 被称为“阻抗”矩阵, N 代表求解区域上电流或磁流的未知系数(未知量)的个数; \mathbf{I} 是一个待求解的 N 维电磁流系数列向量, 被称为电磁流系数矩阵; \mathbf{V} 是一个已知的 N 维的激励列向量, 称为电压矩阵或激励矩阵。

1.1.2 矩量法求解算子方程实例

下面给出一个矩量法求解算子方程的实例。给定激励函数 $g(x) = 4x^2 + 1$, 求在区间 $0 \leq x \leq 1$ 中满足下面非齐次线性方程及边界条件的 $f(x)$:

$$\begin{cases} -\frac{d^2 f}{dx^2} = g(x) & (1.1-12a) \\ f(0) = f(1) = 0 & (1.1-12b) \end{cases}$$

显然这是一个简单的边值问题, 其精确的解析解是

$$f(x) = \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^4 \quad (1.1-13)$$

这里线性算子 L 的定义为

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} \quad (1.1-14)$$

在要考虑的区间 $0 \leq x \leq 1$ 内, 所有函数 g 的空间是 L 的值域, L 的定义域是在区间 $0 \leq x \leq 1$ 内的函数 $f(x)$ 的空间, 这些函数满足边界条件式(1.1-12b)。如果无适当的边界条件, 式(1.1-12a)的解不是唯一的, 换句话说, 算子要由微分算子及其定义域两者来确定。

适用于此问题的一个内积是

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad (1.1-15)$$

显然, 它满足式(1.1-5)的一系列假设。要注意, 式(1.1-15)的定义不是唯一的, 比如 $\int_0^1 w(x)f(x)g(x)dx$ 也是一种可采用的内积, 式中 $w(x) > 0$ 是一个任意给定的权函数。

下面采用矩量法来求解这个问题。选择展开函数(基函数)

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (1.1-16)$$

显然, 该函数满足算子 L 定义域的边界条件 $f_n(0) = f_n(1) = 0$, 可以写出

$$f = \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n = \sum_{n=1}^N \alpha_n (x^n - x^{n+1}) \quad (1.1-17)$$

采用伽略金法, 选取检验函数(权函数)

$$w_m = f_m(x) = x^m - x^{m+1} \quad (1.1-18)$$

根据式(1.1-15)的内积形式, 算子方程(1.1-12a)在检验后被离散成矩阵方程

$$l\alpha = g \quad (1.1-19)$$

其中, 矩阵元素

$$\begin{aligned} l_{mn} &= \langle w_m, L(f_n) \rangle = \int_0^1 (x^m - x^{m+1}) \left[-\frac{d^2}{dx^2} (x^n - x^{n+1}) \right] dx \\ &= \frac{2mn}{(m+n)^3 - (m+n)} \end{aligned} \quad (1.1-20)$$

$$\begin{aligned} g_m &= \langle w_m, g \rangle = \int_0^1 (x^m - x^{m+1}) (1 + 4x^2) dx \\ &= \int_0^1 (4x^{m+2} + x^m - 4x^{m+3} - x^{m+1}) dx \\ &= \frac{5m^2 + 19m + 20}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} \end{aligned} \quad (1.1-21)$$

特殊地, 当 $N=1$ 时, 有

$$l_{11} = \frac{1}{3}, \quad g_1 = \frac{11}{30} \quad (1.1-22)$$

方程的解为

$$\alpha_1 = \frac{11}{10} \quad (1.1-23)$$

于是有

$$f(x) = \alpha_1 f_1 = \frac{11}{10} (x - x^2) \quad (1.1-24)$$

当 $N=2$ 时, 矩阵方程为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{13}{60} \end{bmatrix} \quad (1.1-25)$$

矩阵方程的解为

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{13}{60} \end{bmatrix} = 30 \begin{bmatrix} \frac{4}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{13}{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{30} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (1.1-26)$$

于是, 可得