普通高等教育“十三五”规划教材

线性代数

主　编　唐再良　何红洲
副主编　任全红　李元东　赵志锟

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S(\alpha+\beta) &= S(I\alpha + I\beta) = S((TS)(\alpha) + (TS)(\beta)) \\ &= S(T(S(\alpha)) + T(S(\beta))) = S(T(S(\alpha) + S(\beta))) \\ &= (ST)(S(\alpha) + S(\beta)) = I(S(\alpha) + S(\beta)) = S(\alpha) + S(\beta \end{aligned}$$

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

普通高等教育“十三五”规划教材

线性代数

主　编　唐再良　何红洲

副主编　任全红　李元东　赵志锟

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是四川省高等教育质量工程教改课题《突出探索再现 挖掘课程文化 注重前沿应用——代数学课程内容调整充实的探索与实践》的主要成果之一。在编写过程中，作者结合近 40 年的教学经验和教研成果，吸取国内外教学、科研前沿成果和教材编写成功做法，并经过多次试用修改。本书内容选取和编写理念突出学科应用和信息前沿特色，知识模块设计上兼顾科学性、工具性和灵活性，知识呈现上注重数学思维与学生认知特点的有机结合，便于教师选用和读者自学。

本书内容包括行列式、矩阵及其运算、n 维向量与线性方程组、矩阵的对角化及二次型、线性变换、应用模型，各小节后配有习题，书末附有部分习题答案及提示。

本书可作为高等院校理工、生物、经济、管理等应用型专业的教材，也可供其他相关专业教学参考。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 唐再良，何红洲主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2016.8
普通高等教育“十三五”规划教材
ISBN 978-7-5170-4509-0

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①唐… ②何… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第149291号

策划编辑：寇文杰　　责任编辑：张玉玲　　封面设计：李　佳

书　　名	普通高等教育“十三五”规划教材 **线性代数**
作　　者	主　编　唐再良　何红洲 副主编　任全红　李元东　赵志锟
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京正合鼎业印刷技术有限公司
规　　格	170mm×227mm　16 开本　15 印张　307 千字
版　　次	2016 年 8 月第 1 版　2016 年 8 月第 1 次印刷
印　　数	0001—2000 册
定　　价	28.00 元

前　言

线性代数是一门重要的公共基础课。多年来，一些专家学者和教师，根据自身学校的实际，编写了很多不同版本的优秀教材。随着高等教育改革的深入，近年来一些教材进行了修订再版，也有一些教师探索编写了创新性教材，但这些教材仍然存在需要进一步探索完善的情况：第一，新知识、新方法、新思想、新应用等不断涌现，但这些内容在现有教材中没有得到很好地体现；第二，线性代数的方法和思想在现代科技和日常生活中的应用日益广泛，而现有教材基本上都是从理论到理论，对线性代数知识的应用介绍太少，加之线性代数本身的抽象性，使得学生对学了线性代数有什么用处感到茫然，进而产生反感畏难情绪；第三，随着高等教育专业调整与改革的不断深入，专业的综合性越来越强，随着科学技术的发展，很多专业都要用到线性代数的相关知识和方法，但现有教材基本上还是原来的体系和结构，不仅内容安排是针对原有专业的，而且体例也局限于数学学科之内；第四，现有线性代数教材在编写理念上对知识的系统性和数学思维的特点考虑比较充分，但对刚入校的大一学生的认知特点考虑不够，致使学生普遍反映教材看不懂，影响教学效果，不少师生反映在专业课程用到线性代数知识时还得重新补课。

本教材是四川省高等教育质量工程教改课题《突出探索再现　挖掘课程文化　注重前沿应用——代数学课程内容调整充实的探索与实践》的研究成果之一，编写上力图弥补现有教材在以上方面的不足，并在以下方面进行了尝试和探索：将算法知识等内容引入课程；介绍线性代数知识在现代科技与生活中的应用实现案例；将知识在生活、生产、科技等实际问题中的具体背景再现出来，改变知识呈现载体和方式，解决教师备课难、学生学习难和内容枯燥抽象的问题。

按照“问题是数学的生命”的理念，根据线性代数课程的特点、功能、发展趋势及其在数学、经济、科技等不同领域的应用情况和培养目标的要求，在编写过程中，以解方程为主线，按照“问题—探究—解决—应用—问题”的形式进行呈现，重新调整了内容结构模块，同时每个模块后设计了具有一定梯度和应用背景的习题。

根据高等教育专业综合性越来越强、培养目标社会适应面越来越广和学生数学素养和知识基础参差不齐的发展特点，在编写过程中，坚持了教材知识的科学性、工具性、实用性相统一的原则，内容选取基本涵盖课程教学大纲和现有教材全部内容，体现了适应不同层次学生学习选取以及不同培养目标需要的开放兼容的新型课程体系理念。

遵循高等教育规律，在课程内容的安排上，针对非数学专业学生对数学学习

的畏难恐惧心理，特别注重了新体例选取和方便教师教学、学生自学或选学，并且不失课程本身科学性等特点的体现；在内容设计上，精选对相关专业人才培养有重要价值的应用案例，同时将线性代数的前沿知识、最新研究成果等进行适当的介绍。

本书紧紧围绕普通高等院校公共数学课程培养及训练应用型本科人才数学能力的教学要求，由从事高校数学教学近40年并负责“线性代数”精品课程的唐再良教授任主编，按照最新修订的“普通本科院校数学课程教学基本要求”编写而成。唐再良教授负责全书构架、大纲拟定和内容审定工作，何红洲副教授负责统稿工作，具体编写分工如下：第1章、第2章、第6章由何红洲编写，第3章由李元东和徐辉编写，第4章由赵志锟编写，第5章由任全红编写。中国科学院王明生研究员对教材内容进行了全面审查，并提出了许多宝贵建议，加拿大滑铁卢大学蒋绍全教授为教材的编写思路和体例提供了很多帮助，在此一并表示感谢。另外本书还借鉴了国内外专家学者的论著或教材内容，由于涉及文献较多，书后未能一一列出，敬请谅解。

由于编写时间仓促，加之一些编写构想还是一种尝试探索，书中挂一漏万在所难免，恳请读者和同行批评指正，以便在再版中进一步修改完善。

编　者

2016年7月

目　　录

第 1 章　行列式

在线性代数及其后续课程中有很多问题都需要用到“行列式”这个数学工具．本章在回顾中学数学二元一次方程组解法的基础上，首先给出二阶行列式和三阶行列式的定义及性质，然后把这些概念和性质推广到高阶行列式中去．

1.1　二阶和三阶行列式

先来回顾一下在中学数学中用加减消元法求解下列二元一次方程组的过程：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & ② \end{cases} \tag{1-1}$$

由① $\times a_{22}$ −② $\times a_{12}$ 可得：

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

再由② $\times a_{11}$ −① $\times a_{21}$ 可得：

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21},$$

若未知数 x_1、x_2 的系数满足 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则上述线性方程组的解为：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}. \tag{1-2}$$

式（1-2）的分子和分母的值都是先将四个数分成两对，再各对相乘，最后将两对乘积的结果再相减而得到，为了便于记忆，我们引入二阶行列式的概念：

定义 1-1　符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为**二阶行列式**，它代表 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 这一算式，即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1-3}$$

它是由两行两列的 $2 \times 2 = 2^2 = 4$ 个数组成，其中 a_{ij}（$i = 1,2$；$j = 1,2$）称为这个行列式的**元素**，第一个下标 i 代表 a_{ij} 所在的行号，称为元素 a_{ij} 的**行标**，表明该元素位于行列式的第 i 行；第二个下标 j 代表 a_{ij} 所在的列号，称为元素 a_{ij} 的**列标**，表明该元素位于行列式的第 j 列．也可以称 a_{ij} 为行列式的 $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ **元**，如 a_{12} 表示该行列式位于第 1 行第 2 列位置的元素或 a_{12} 称为该行列式的 $(1,2)$ 元．

式（1-3）可以使用对角线法则来记忆（如图 1-1 所示）：若把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为主对角线，把 a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为副对角线，则式（1-3）左端的二阶行列式便可由式（1-3）右端的算式计算，它是该行列式主对角线元素之积减去副对角线元素之积所得之差.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图 1-1

式（1-3）右端通常称为其左端对应的**二阶行列式的展开式**.

根据上述法则，式（1-2）的两个分子也可以写成二阶行列式的形式，即：

$$b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}，\quad b_2a_{11}-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若令：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}，\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}，\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}，$$

即 D 是前述二元一次方程组中未知数 x_1、x_2 的系数按其在方程组中的相对位置构成的行列式，称为**系数行列式**；D_1 和 D_2 分别是将 D 的第一列和第二列用方程组右端的常数列替代后得到的行列式，分别称为 D 的**第一替代行列式**和**第二替代行列式**. 若 $D\neq 0$，则上述方程组有唯一解，且可表示为：

$$x_1=\frac{D_1}{D}，\quad x_2=\frac{D_2}{D}. \tag{1-4}$$

例 1-1　求解二元一次方程组：

$$\begin{cases}(\sqrt{2}-1)x+2y=5 \\ x+(\sqrt{2}+1)y=-1\end{cases}.$$

注： 这里我们使用了中学数学的习惯，分别用 x、y 来表示二元一次方程组的两个未知元.

解　由于：

$$D=\begin{vmatrix} \sqrt{2}-1 & 2 \\ 1 & \sqrt{2}+1 \end{vmatrix}=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)-2\times 1=-1\neq 0，$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & \sqrt{2}+1 \end{vmatrix}=5(\sqrt{2}+1)-2\times(-1)=7+5\sqrt{2}，$$

$$D_2=\begin{vmatrix} \sqrt{2}-1 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=(\sqrt{2}-1)\times(-1)-5\times 1=-4-\sqrt{2}，$$

故所求方程组有唯一解为：

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{7+5\sqrt{2}}{-1}=-7-5\sqrt{2}，\quad y=\frac{D_2}{D}=\frac{-4-\sqrt{2}}{-1}=4+\sqrt{2}.$$

前述的线性方程组的两个未知元的最高次数都是一次的，这样的方程组称为**二元线性方程组**.

类似地，我们可以引入三阶行列式的概念.

定义 1-2 符号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$称为**三阶行列式**，它代表 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}$ $+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$ 这一算式，即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \end{array}, \tag{1-5}$$

它是由三行三列的 $3\times3=3^2=9$ 个元素组成，关于三阶行列式的其他相关概念与二阶行列式类似，不再重述.

为了揭示式（1-5）右端的算式与左端行列式元素的关系，类似于图 1-1，我们画出如图 1-2 所示的图形.

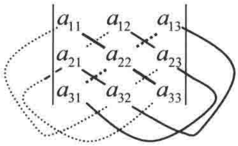

图 1-2

其中从左上角到右下角这条对角线称为主对角线，从右上角到左下角这条对角线称为副对角线，并且可以看出，对于式（1-5）右端的六项，其左端行列式主对角线上元素的乘积项或位于主对角线的平行线上的元素与副对角线上某元素的乘积项（要求这些作为乘积因子的元素都位于不同行和不同列）前面都取正号（如图中的实连线所示），其左端行列式副对角线上元素的乘积项或位于副对角线的平行线上的元素与主对角线上某元素的乘积项（要求这些作为乘积因子的元素都位于不同行和不同列）前面都取负号（如图中的虚连线所示）.

这种计算三阶行列式的方法同样称为对角线法则，它与计算二阶行列式的对角线法则显然是一致的.

式（1-5）右端同样称为其左端对应的**三阶行列式的展开式**.

例 1-2 计算三阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 根据对角线法则：

$$\begin{aligned} D=\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} &= 4\times3\times2+(-2)\times(-1)\times3+1\times0\times4 \\ &\quad -1\times3\times3-(-2)\times0\times2-4\times(-1)\times4 \\ &= 24+6+0-9-0-(-16)=37. \end{aligned}$$

例 1-3 求解方程：

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

解 用对角线法则计算方程左端的行列式，原方程变为：

$$-3x^2 - 18 + 4x - (-12) - (-2x^2) - 9x = -x^2 - 5x - 6 = 0 ,$$

从而解得 $x = -3$ 或 $x = -2$.

我们同样可以利用三阶行列式求得三元一次方程组（又称为三元线性方程组）：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1-6}$$

的解（$D \neq 0$）：

$$x_1 = \frac{D_1}{D} ,\quad x_2 = \frac{D_2}{D} ,\quad x_3 = \frac{D_3}{D} , \tag{1-7}$$

其中：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为方程组（1-6）的系数行列式.

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} ,\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} ,\quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

分别叫做 D 的第一、第二、第三替代行列式，它们分别是用方程组（1-6）右端的常数列替换 D 的第一、第二、第三列后所得的结果.

式（1-4）和式（1-7）就是解二元线性方程组（1-1）和解三元线性方程组（1-6）的克拉默（Cramer）法则.

习题 1.1

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \\ -1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$；（4）$\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$.

1.2 高阶行列式

1.2.1 n 阶行列式的定义

学习了二阶与三阶行列式，读者很自然会问，能否把行列式的概念推广到四阶、五阶以至更高的 n 阶呢？为了能从三阶行列式类推出 n 阶行列式的定义，我们来观察三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的展开式

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1-8}$$

中每一项的构成规律.

首先注意到其中每一项为三个元素的乘积 $a_{1i}a_{2j}a_{3k}$，并带有一个正号或负号. 这三个元素的第一个下标（即行标）依次为 $1,2,3$，这说明 $a_{1i}a_{2j}a_{3k}$ 是行列式的每一行各取一个元素相乘的结果. 由于数的乘法满足交换律，所以这里三个元素按行的自然顺序（从小到大的顺序）排列是人为的，这样我们只需将注意力集中在第二个下标 i,j,k 的变化上. 下面我们写出式（1-8）的六项中第二个下标（即列标）的排列：

$$(123)，(231)，(312)， \tag{1-9}$$

$$(321)，(213)，(132)， \tag{1-10}$$

它们恰好是 $1,2,3$ 的所有全排列. 这说明每一项在三个行中所取元素的列标是来自于 $1,2,3$ 的一个全排列，也就是说，各项的乘积是由每一行、每一列各取一个且仅取一个元素相乘得到的. 对于 $1,2,3$ 的每一个全排列，对应一个乘积 $a_{1i}a_{2j}a_{3k}$，而 $1,2,3$ 一共有六个全排列，所以式（1-8）一共有六项.

其次分析式（1-8）各项所带的符号. 由于各项的第一个下标都按自然顺序排列，所以各项所带的符号仅与第二个下标的排列有关. 为了说明其中的关系，下面引入逆序数的概念.

定义 1-3 在 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列（称为 n **级排列**）$(s_1s_2\cdots s_n)$ 中，若存在满足关系 $1\leqslant p<q\leqslant n$ 的自然数 p、q 使得 $s_p>s_q$，则称排列 $(s_1s_2\cdots s_n)$ 中出现了一个**逆序**，而称排列 $(s_1s_2\cdots s_n)$ 中出现的所有逆序的总数为该排列的**逆序数**，记为 $\tau(s_1s_2\cdots s_n)$.

由上述定义易知：

$$\tau(s_1s_2\cdots s_n)=(s_1\text{ 后面比 } s_1 \text{ 小的数字个数})$$
$$+(s_2\text{ 后面比 } s_2 \text{ 小的数字个数})+\cdots+(s_{n-1}\text{ 后面比 } s_{n-1} \text{ 小的数字个数}).$$

例如在$1,2,3,4,5$的一个全排列(34152)中，3后面有两个数（即1和2）比3小，4后面也有两个数（也是1和2）比4小，而5后面只有一个数（即2）比5小，故(34152)的逆序数$=2+2+1=5$.

如果一个排列的逆序数为偶数，就称该排列为**偶排列**，否则称该排列为**奇排列**．诸者容易验证式（1-9）的三个排列都是偶排列，式（1-10）的三个排列都是奇排列．

不难看出式（1-8）中各项所带的符号是由第二个下标排列(ijk)的奇偶性决定的，即当(ijk)是偶排列时，项$a_{1i}a_{2j}a_{3k}$带正号，当(ijk)是奇排列时，项$a_{1i}a_{2j}a_{3k}$带负号．即项$a_{1i}a_{2j}a_{3k}$所带的符号为$(-1)^{\tau(ijk)}$.

于是三阶行列式的定义式（1-5）可以写成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(ijk)} a_{1i}a_{2j}a_{3k} \text{，} \tag{1-11}$$

其中Σ是对所有三级排列(ijk)所构成的$3!$项求和．

读者不难验证二阶行列式的定义式（1-3）也可以写成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(ij)} a_{1i}a_{2j} \text{，} \tag{1-12}$$

其中Σ是对所有二级排列(ij)所构成的$2!$项求和．由于二级排列只有一个偶排列(12)和一个奇排列(21)，故二阶行列式的展开式中只有两项，一项带正号，一项带负号．

至此，我们不难把行列式的概念推广到n阶行列式．

定义 1-4　设有$n\times n=n^2$个数，排列成n行n列的数表如下：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \text{，} \tag{1-13}$$

其中a_{ij}是第i行第j列的数（称为**元素**）．若在每一行中取出一个数，并且要求取出的数都在不同的列上，把所取元素的行号按自然顺序排列，相应的列号分别设为$j_1,j_2,\cdots,j_n$，作出这n个元素的乘积$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，并在其前面乘以符号$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$，最后对所有这样的$n$级排列$(j_1j_2\cdots j_n)$所构成的项求和，这个和称为与式（1-13）中数表相对应的**n阶行列式**，记作：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-14}$$

其中 Σ 是对所有 n 级排列 $(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 所构成的 $n!$ 项求和.

式（1-14）右端也称为其对应左端的 n **阶行列式的展开式**.

式（1-14）左端的行列式也可简记为 $|a_{ij}|$ 或 $\det(a_{ij})$，显然式（1-12）和式（1-11）是式（1-14）中 $n=2$ 和 $n=3$ 时的特殊情形.

为了证明 n 阶行列式的性质，我们先给出两个定理.

定理 1-1 调换排列中任意两个数字的位置会改变排列的奇偶性.

证 先考虑调换排列中相邻两数字的情况. 设原排列为 $PabQ$，其中 P 表示数字 a 前面（左边）的 p 个排列好的数字，Q 表示数字 b 后面（右边）的 q 个排列好的数字. 现调换相邻两数字 a、b 的位置后得到一个新排列 $PbaQ$，P、Q 中各数字的位置不变. 对照排列 $PabQ$ 和排列 $PbaQ$，它们除 a、b 两数字的顺序改变外，其他任意数字的顺序并没有变. 若 ab 为自然顺序（即 $a<b$），则调换后 ba 将构成逆序，即排列 $PbaQ$ 的逆序数（只有 b 后面比 b 小的数字多了一个 a）比排列 $PabQ$ 的逆序数多1；若 ab 为逆序（即 $a>b$），则调换后 ba 为自然顺序，即排列 $PbaQ$ 的逆序数（只有 a 后面比 a 小的数字少了一个 b）比排列 $PabQ$ 的逆序数少1. 从而排列 $PbaQ$ 改变了排列 $PabQ$ 的奇偶性.

再考虑调换排列中任意两数字的情况. 设原排列为 $PaRbQ$，其中 P、Q 意义同上，R 表示 a、b 两数字间的 r 个排列好的数字. 现按如下方法调换 a、b：先把 $PaRbQ$ 调换成 $PRabQ$，要作 r 次相邻两数的调换；再把 $PRabQ$ 调换成 $PbRaQ$，要作 $r+1$ 次相邻两数的调换，从而一共作了 $2r+1$（即奇数）次相邻两数的调换，即排列 $PbRaQ$ 改变了排列 $PaRbQ$ 的奇偶性. ■

我们知道，在二阶行列式的展开式中，有一项带正号，一项带负号；在三阶行列式的展开式中，有三项带正号，三项带负号.

一般地，在 n 阶行列式（$n>1$）的展开式中，也恰有 $\frac{n!}{2}$ 项带正号，$\frac{n!}{2}$ 项带负号. 这只需证明：在 $n!$ 个 n 级排列中，奇、偶排列数各占一半即可.

事实上，在所有 n 级排列 $(s_1 s_2 \cdots s_n)$ 中，将最前面的两个数调换位置得到排列 $(s_2 s_1 \cdots s_n)$. 若 $(s_1 s_2 \cdots s_n)$ 为奇排列，则 $(s_2 s_1 \cdots s_n)$ 为偶排列，且对于不同的奇排列 $(s_1 s_2 \cdots s_n)$ 与 $(\tilde{s}_1 \tilde{s}_2 \cdots \tilde{s}_n)$，在调换最前面的两数的位置后，得到的偶排列 $(s_2 s_1 \cdots s_n)$ 与 $(\tilde{s}_2 \tilde{s}_1 \cdots \tilde{s}_n)$ 也不相同，这说明偶排列的个数应不小于奇排列的个数. 同理，奇排列的个数应不小于偶排列的个数. 所以两类排列个数相等.

由于数的乘法满足交换律，所以行列式展开式各项中 n 个元素的顺序也是可以交换的. 例如在四阶行列式的展开式中，乘积 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ 也可以写成 $a_{31}a_{23}a_{44}a_{12}$. 一般地，乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 可交换因子顺序成为 $a_{\alpha\alpha'}a_{\beta\beta'}\cdots a_{\lambda\lambda'}$，其中 $(\alpha\beta\cdots\lambda)$ 与 $(\alpha'\beta'\cdots\lambda')$ 都是 n 级排列，分别称为 $a_{\alpha\alpha'}a_{\beta\beta'}\cdots a_{\lambda\lambda'}$ 的行排列与列排列.

定理 1-2 n 阶行列式展开式中的项 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 可以写成：

$$(-1)^{S+T} a_{\alpha\alpha'} a_{\beta\beta'} \cdots a_{\lambda\lambda'},$$

其中 $S = \tau(\alpha\beta\cdots\lambda)$ 与 $T = \tau(\alpha'\beta'\cdots\lambda')$ 分别为 n 级行排列 $(\alpha\beta\cdots\lambda)$ 与 n 级列排列 $(\alpha'\beta'\cdots\lambda')$ 的逆序数.

证 将 $a_{\alpha\alpha'} a_{\beta\beta'} \cdots a_{\lambda\lambda'}$ 任意两个元素互换，排列 $(\alpha\beta\cdots\lambda)$ 与 $(\alpha'\beta'\cdots\lambda')$ 就各有两个数字发生调换，由定理 1-1 知，调换后的新行排列与新列排列同时改变了奇偶性，即它们的逆序数的和与数 $S+T$ 的奇偶性相同，如果将行排列 $(\alpha\beta\cdots\lambda)$ 最后调换为按自然顺序的排列 $(12\cdots n)$（其逆序数为 0），而列排列 $(\alpha'\beta'\cdots\lambda')$ 随之变为 $(j_1 j_2 \cdots j_n)$（其逆序数为 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$），则 $0+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 仍然与 $S+T$ 的奇偶性相同，又由于数的乘法满足交换律，故有：

$$(-1)^{S+T} a_{\alpha\alpha'} a_{\beta\beta'} \cdots a_{\lambda\lambda'} = (-1)^{0+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

反过来，即可把 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 写成：

$$(-1)^{S+T} a_{\alpha\alpha'} a_{\beta\beta'} \cdots a_{\lambda\lambda'}. \blacksquare$$

定理 1-2 说明，即使行列式展开式中某一项因子的行标或列标没有按自然顺序排列，我们也很容易确定该项的符号. 例如 $a_{31}a_{23}a_{44}a_{12}$ 是四阶行列式展开式中的一项，而行排列的逆序数 $S = \tau(3241) = 4$，列排列的逆序数 $T = \tau(1342) = 2$，且有 $S+T = 4+2 = 6$ 是偶数，所以该项带正号.

特别地，如果将行列式展开式中各项的列排列变为自然顺序，而相应的行排列记作 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$，则由定理 1-2，n 阶行列式又可以定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}, \tag{1-15}$$

其中 Σ 是对所有 n 级排列 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 所构成的 $n!$ 项求和.

例 1-4 计算行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

解 这是一个四阶行列式，在其展开式中应有 $4! = 24$ 项，但在每一项的乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$ 中只要有一个元素等于 0，乘积就为 0，所以只要计算展开式中不明显为 0 的项即可. 由于第 4 行只有 a_{44} 不为 0，故只需考虑 $j_4 = 4$ 的项；第 3 行只有 a_{33}、a_{34} 不为 0，而已取 $j_4 = 4$，故只考虑 $j_3 = 3$ 的项即可；同理，只考虑 $j_2 = 2$ 及 $j_1 = 1$ 的项. 也就是说，行列式展开式中不为零的项只有 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，而 $\tau(1234) = 0$，所以这一项带正号，即该行列式等于 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.

例 1-4 的行列式中，主对角线以下的元素均为 0（即当 $i > j$ 时，$a_{ij} = 0$），这

种行列式叫做上三角行列式．它等于主对角线上各元素的乘积．

同样，主对角线以上的元素均为 0（即当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$）的行列式叫做下三角行列式．同理可证它也等于主对角线上各元素的乘积．例如：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}\,.$$

特别地：

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix} = d_1d_2d_3d_4\,,$$

以上这种除主对角线上的元素外其余元素均为 0 的行列式，叫做对角行列式．

一般地，我们很容易证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}\,, \tag{1-16}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}\,, \tag{1-17}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}\,. \tag{1-18}$$

同理，读者可以证明：