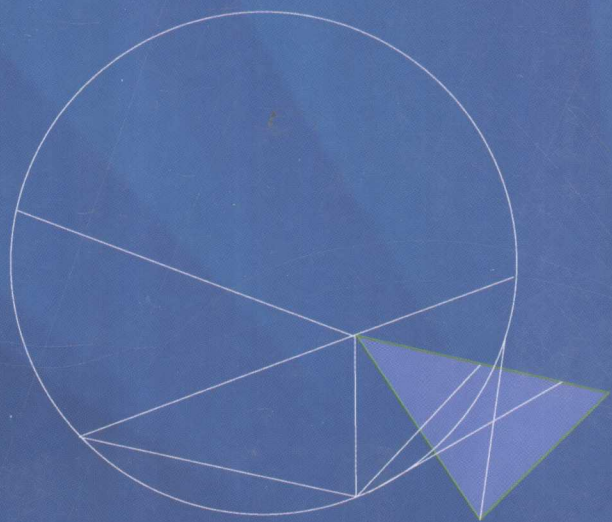


经济数学基础丛书

微积分 (经管类)

(第三版)

蔡光兴 李德宜 主编



WEI JI FEN



科学出版社

经济数学基础丛书

微 积 分

(经管类)

(第三版)

蔡光兴 李德宜 主 编

科 学 出 版 社

北 京

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229;010-64034315;13501151303

内 容 简 介

本书依照教育部新的“经济管理类本科数学课程教学基本要求”和“研究生入学考试大纲数学三(经管类)”对该课程的要求,在保持第二版的结构科学合理,经济学例题经典丰富,融入数学软件应用、数学家简介、英文数学题及微积分学简史等特色的基础上,对教材内容、体系进行了适当的调整和优化,例题、练习题更加典型丰富.本书内容包括一元函数微分学及其在经济学中的应用、一元函数积分学及其应用、微分方程、无穷级数和多元函数微积分.

本书内容充实,体系新颖,选例灵活,且有鲜明的应用特点,既可作为高等学校文、经、管类各专业微积分课程的教材,也可供其他相关专业读者使用,对报考研究生的学生及有关专业教师也具有参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

微积分:经管类/蔡光兴,李德宜主编.—3版.—北京:科学出版社,2016
(经济数学基础丛书)

ISBN 978-7-03-048635-6

I. ①微… II. ①蔡… ②李… III. ①微积分—高等学校—教材 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 125233 号

责任编辑:王雨舸/责任校对:董艳辉

责任印制:彭超/封面设计:蓝正

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本:787×1092 1/16

2016年6月第 三 版 印张:22 1/4

2016年6月第一次印刷 字数:524 000

定价:48.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《微积分(经管类)》(第三版)编委会

主 编 蔡光兴 李德宜
副主编 方 瑛 尹水仿 金凌辉 余胜春
编 委 (以姓氏笔画为序)
王晓芬 方 瑛 方次军 尹水仿
付小兰 朱 莹 朱永松 刘 磊
许松林 李子强 李逢高 李家雄
李德宜 杨策平 余 杨 余胜春
肖岸纯 张水坤 张凯凡 张艳红
陈 华 陈 洁 陈水林 金凌辉
郑 列 胡二琴 费锡仙 贺方超
耿 亮 黄 斌 黄 慧 黄 毅
章曙雯 常 涛 曾 宇 曾 莹
蔡光兴 蔡振峰 谭 文 熊 丹
熊淑艳

第三版前言

在科学技术发展日新月异的今天,数学知识在经济管理等学科应用发展中的重要作用日益凸显出来。《微积分(经管类)》自2004年出版、2011年再版以来,受到使用者的广泛好评,我们在深表感谢的同时,积极听取广大师生提出的宝贵意见,结合新形势、新要求对本书进行了修订再版。

本次再版保持了第二版的体系结构以及数学软件应用、数学家简介、英文数学题和微积分简史介绍等特色,参照新的“经济管理类本科数学课程教学基本要求”和“研究生入学考试大纲数学三(经管类)”,根据教学需要对书中的部分内容进行了修订:重写了第9章微分方程中差分方程部分,使其内容更贴近教学需要;修改更换了部分章节的例题,丰富了经济学应用问题调整统一了相关部分符号体系;发现并订正了一些错漏之处。

本次再版是在蔡光兴教授、李德宜教授指导下,由方瑛、曾宇等具体完成修订工作。由于编者水平所限,书中存在的疏漏和不足之处敬请广大读者指正。

编 者
2016年3月

第二版前言

《微积分(经管类)》自2004年出版以来,深受广大师生欢迎,被全国许多高等学校选为经管类“微积分”课程教材.在使用过程中,广大师生向我们提出了许多宝贵意见和建议,在此深表感谢.

这次再版,保持了第一版的科学合理的体系结构和经济学例题经典丰富,融入数学软件应用、数学家简介、英文数学题及微积分学简史等特色.依照新的“经济管理类本科数学课程教学基本要求”和“研究生入学考试大纲数学三(经管类)”对该课程的要求,对部分内容进行了重写.主要工作体现在:调整了第2章极限与连续中无穷小量顺序;充实了第9章微分方程中差分方程内容;增强了第11章多元函数微积分中空间解析几何;更新补充了经济学方面例题及练习题.

本书第二版由蔡光兴、李德宜主编,方瑛、尹水仿、郑列、余胜春副主编.第1章、第2章、第3章、第4章、第5章、第9章由蔡光兴、方瑛、曾莹完成;第6章、第7章、第8章、第10章、第11章由李德宜、尹水仿、余胜春、谭文完成;各章后数学家简介、英文数学题及书末微积分学简史由蔡光兴、郑列、方瑛、李逢高、朱永松、许松林完成.其他编委对本书再版提供了许多宝贵意见,并参与了习题及习题答案的编写.方瑛、尹水仿、余胜春、李逢高对本书修订再版做了大量的工作.蔡光兴教授、李德宜教授审阅了修订稿并最后定稿.

编者水平有限,书中疏漏和不足之处在所难免,敬请广大读者指正.

编者
2011年2月

前 言

21 世纪的今天,随着科学技术的迅速发展和计算机技术的广泛应用,不但现代化产业和经济的组织管理已完全离不开数学所提供的方法和技术,而且在人文和社会科学中也有了它的用武之地.这一切都使现代数学课程,不仅在大学理工科中占有举足轻重的基础地位,而且在人文、经济、管理等学科中其作用也日重一日.对于大学的非数学专业而言,现代数学教育的作用不再仅仅是学习基础知识,为后续课程或其他学科打下基础,提供工具,更重要的是传授数学思路、数学方法,培养学生的创新意识,提高学生的数学素养、数学思维能力、科学计算能力、数学建模及应用数学能力.新世纪教育“三个面向”——面向世界、面向未来、面向现代化,要求大学数学教育的教学内容与课程体系必须进行改革,教学内容吐故纳新,课程体系严谨实用.为适应这一形势的需要,我们组织了一批具有丰富大学数学教学经验的教师,共同研讨了经管类微积分课程:如何做到符合国家教育部课程大纲基本要求,又达到文、经、管类专业学生考研对该课程大纲的要求;如何激发学生学习数学的积极性,了解数学发展背景;如何使学生更好地运用数学软件进行科学计算及应用;如何使学生面向世界并与国际接轨等.在研讨的基础上,我们编写了这本教材.本教材编写特色如下:

(1) 保持传统微积分的知识体系,其基本内容是根据高等院校《高等数学课程教学基本要求》及全国硕士研究生入学考试大纲数学三、四(文、经、管类数学)的微积分纲目来编写的,对微积分基本内容的讲解做到了内容精炼、结构严谨、循序渐进、推理简明、通俗易懂.

(2) 考虑到计算机技术的迅速发展和普及,教材在第一章简要介绍了 Mathematica 软件,使学生早日接触 Mathematica 这一功能强大、操作方便的数学软件.在微积分各章配有运用软件上机操作并计算的题目,以提高学生的学习兴趣,培养学生运用数学软件的能力.本内容供教师灵活选用.

(3) 21 世纪教育要面向世界,国际交流与合作更加频繁,为适应双语教学的需要,教材每章后均附有重要概念英文词汇,布置有若干道英文习题,并要求学生用英文求解,以提高学生阅读数学外文资料的能力,并为学生日后用英文撰写学术论文打下基础.

(4) 微积分创立是数学史上最辉煌的一页.为了扩大学生视野,使学生了解微积分创立发展背景,提高学生对数学源流的认识,在每章后对微积分创立发展过程中做出过伟大贡献的著名数学家如牛顿、莱布尼茨等作了简介,并在书末附有微积分发展简史.

(5) 为增强学生经济应用能力,本教材在相关章节都配有经济应用习题.为突出微分学在经济中的应用,第 5 章进行了专题讨论,讨论了导数在经济分析中的应用,如边际成本、函数弹性等;讨论了导数极值在经济管理中的应用,如需求分析、库存管理、复利问题、最大利润问题等.

(6) 为使学生更好地掌握所学知识,提高应用能力,每章后都配有大量练习题,这些

习题分三部分:A题为选择填空题,主要加强学生对基本概念、基本知识的理解;B题为基本训练题,包括计算、求解、证明、应用,其中有若干道英文题,要求用英文习作;C题为运用计算机及 Mathematica 软件应用该章知识点的习作题。

本书由蔡光兴、李德宜主编,余杨、方瑛、尹水仿、郑列任副主编。全书在编写过程中,由蔡光兴教授提出编写思路、提纲,由编委会研究讨论确定编写方案。各章编写人员如下:方瑛(第一章第一、二节、第四章),朱永松(第一章第四节),郑列(第二章),蔡光兴(第三章、第一章第三节),余杨、许松林(第五章、第九章、第十章),李德宜、尹水仿、谭文(第六章、第七章、第八章、第十一章),各章后数学家简介、英文数学题、C题及书末微积分简史由蔡光兴、郑列、朱永松、许松林、方瑛收集整理,并做了全书的统稿工作,其他编委参与了习题及习题答案的编写,最后由蔡光兴教授定稿。

由于编者水平有限,加上时间仓促,本书不妥之处在所难免,恳请广大读者提出批评、建议,以便再版时修订。

编者

2004年8月

目 录

第 1 章 函数与 Mathematica 入门	1
1.1 集合	1
1.2 函数	7
1.3 经济中常用的函数	17
1.4 Mathematica 入门	21
本章重要概念英文词汇	24
数学家简介	25
习题一	25
第 2 章 极限与连续	28
2.1 极限	28
2.2 极限的运算法则	36
2.3 无穷小比较	43
2.4 函数的连续性	47
本章重要概念英文词汇	54
数学家简介	54
习题二	55
第 3 章 导数与微分	59
3.1 导数概念	59
3.2 求导法则和基本初等函数导数公式	67
3.3 微分	78
本章重要概念英文词汇	84
数学家简介	84
习题三	85
第 4 章 中值定理与导数应用	91
4.1 中值定理	91
4.2 导数的应用	97
4.3 泰勒公式	109
4.4 函数的最大值和最小值	112
4.5 函数的凹凸性与拐点	115
4.6 函数图形的描绘	117
4.7 曲率	121
本章重要概念英文词汇	123

数学家简介	124
习题四	125
第 5 章 导数在经济学中的应用	128
5.1 导数在经济分析中的应用	128
5.2 函数极值在经济管理中的应用举例	137
本章重要概念英文词汇	145
数学家简介	145
习题五	146
第 6 章 不定积分	149
6.1 不定积分的概念和性质	149
6.2 换元积分法	154
6.3 分部积分法	163
6.4 几种特殊类型函数的积分、实例	167
本章重要概念英文词汇	171
数学家简介	171
习题六	172
第 7 章 定积分	176
7.1 定积分的概念	176
7.2 定积分的性质	180
7.3 微积分基本公式	182
7.4 定积分的换元积分法	186
7.5 定积分的分部积分法	188
7.6 定积分的近似计算	189
7.7 广义积分与 Γ 函数	191
本章重要概念英文词汇	196
数学家简介	196
习题七	197
第 8 章 定积分的应用	202
8.1 平面图形的面积	202
8.2 体积	206
8.3 平面曲线的弧长	208
8.4 定积分在经济问题中的应用举例	209
本章重要概念英文词汇	211
数学家简介	211
习题八	213
第 9 章 微分方程	215
9.1 微分方程的基本概念	215
9.2 一阶微分方程	216

9.3 可降阶的高阶微分方程	222
9.4 二阶常系数线性微分方程	224
9.5 差分方程简介	230
9.6 微分方程在经济分析中的应用举例	239
本章重要概念英文词汇	241
数学家简介	242
习题九	243
第 10 章 无穷级数	247
10.1 常数项级数	247
10.2 数项级数的收敛性判别法	249
10.3 幂级数	255
10.4 函数展开成幂级数	260
10.5 函数的幂级数展开式的应用	266
本章重要概念英文词汇	270
数学家简介	270
习题十	270
第 11 章 多元函数微积分	274
11.1 空间解析几何简介	274
11.2 多元函数	278
11.3 偏导数	282
11.4 全微分	284
11.5 多元复合函数的求导法则	285
11.6 多元函数的极值与最值	289
11.7 最小二乘法	294
11.8 二重积分	295
本章重要概念英文词汇	306
数学家简介	307
习题十一	307
参考答案	314
附录 I 微积分学简史	331
附录 II 积分表	337

第 1 章 函数与 Mathematica 入门

在数学、自然科学、经济学和管理科学的研究中,我们经常会遇到函数关系.所谓函数关系,就是变量之间的依赖关系.函数作为各种变量依存关系的一种抽象化的结果,是我们现阶段学习和研究的主要对象.

在本章中,我们将首先引入集合的概念,并在此基础上介绍函数的有关概念以及几种常用的经济函数,最后还要介绍关于 Mathematica 软件的基本知识.

1.1 集 合

1.1.1 集合的概念

集合是数学中一个原始的基本概念,它在现代数学中起着非常重要的作用.所谓集合,就是指具有某种特定属性的事物的总体,或是某些确定对象的总汇.构成集合的每一事物或对象皆称为该集合的元素.集合也简称为集.

下面看几个集合的例子.

例 1.1 某学校的全体在校学生.

例 1.2 方程 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 的所有实根.

例 1.3 全体偶数.

例 1.4 圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 上所有的点.

由有限个元素构成的集合称为有限集合,如例 1.1、例 1.2;由无限多个元素构成的集合称为无限集合,如例 1.3、例 1.4.

通常我们用大写字母 A, B, C, \dots 表示集合,而用小写字母 a, b, c, \dots 表示集合的元素.如果 a 是集合 A 中的元素,则记为 $a \in A$,读为 a 属于 A ;如果 a 不是集合 A 的元素,则记为 $a \notin A$,读作 a 不属于 A .

一个集合一经给定,那么对于任何事物或对象都能够判定它是否属于这个给定的集合.

集合的表示方法有列举法和描述法.

(1) 列举法.是指按任意顺序列出集合中所有元素,并用括号 $\{ \}$ 括起来.

例 1.5 由 a, b, c, d 四个元素组成的集合 A 可以表示为

$$A = \{a, b, c, d\} \quad \text{或} \quad A = \{b, c, d, a\}$$

例 1.6 由方程 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 的根构成的集合 A 可以表示为

$$A = \{4, -1\}$$

用列举法表示集合时,必须列出集合中的所有元素,不能遗漏和重复.

(2) 描述法.是把集合中元素所具有的共同属性描述出来,用

$$A = \{x \mid x \text{ 具有的共同属性}\}$$

表示.

例 1.7 设 A 为全体偶数的集合,可表示为

$$A = \{x \mid x = 2n, n \text{ 为整数}\}$$

例 1.8 设 A 为圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 上的点的集合,可表示为

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ 且 } x, y \text{ 为实数}\}$$

例 1.9 设 A 为方程 $x^2 + 1 = 0$ 的实根构成的集合,由于在实数范围内方程无解,所以 A 中不可能有任何元素,这种不含任何元素的集合称为空集,记为 \emptyset ,所以

$$A = \{x \mid x^2 + 1 = 0 \text{ 且 } x \text{ 为实数}\} = \emptyset$$

习惯上,全体自然数的集合记为 \mathbf{N} ,全体整数的集合记为 \mathbf{Z} ,全体有理数的集合记为 \mathbf{Q} ,全体实数的集合记为 \mathbf{R} .

应该注意的是,空集 \emptyset 不能同仅含有元素“0”的集合 $\{0\}$ 相混淆.

子集概念也是集合常用的.如果集合 A 中的每一个元素都是集合 B 的元素,即如果 $a \in A$,则 $a \in B$,那么 A 就是 B 的子集,记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$,读为 A 包含于 B 或 B 包含 A .

例 1.10 设 \mathbf{N} 为全体自然数集, \mathbf{Q} 为全体有理数集, \mathbf{R} 为全体实数集,那么 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

例 1.11 设 $A = \{x \mid 2 \leq x < 100\}, B = \{x \mid 2 \leq x \leq 50\}, C = \{x \mid x \leq 50\}$,显然, $B \subset A$ 且 $B \subset C$,但 A 不是 C 的子集, C 也不是 A 的子集.

特别,若两个集合 A 和 B 同时有 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A = B$.

例 1.12 设

$$A = \{x \mid x \text{ 为大于 } 1 \text{ 小于 } 4 \text{ 的整数}, B = \{x \mid x \text{ 为小于 } 5 \text{ 的质数}\}$$

$$C = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 的根}\}$$

因为三个集合 A, B, C 中都只包含 2 和 3 两个数,所以 $A = B = C$.

对于子集还可有以下结论:

- (1) $A \subset A$,即集合 A 是其自身的子集.
- (2) $\emptyset \subset A$,即空集是任意集合的子集.
- (3) 若 $A \subset B, B \subset C$,则 $A \subset C$,即集合的包含关系具有传递性.

1.1.2 集合的运算

如同数的各种运算一样,集合之间也有其特定的运算,下面将给出集合的并、交、补三种基本运算,并借助于图形直观描述集合之间的关系.这里,集合用一个平面区域表示,集合内的元素以区域内的点表示.如图 1-1 表示集合 A 与 B 的关系是 $A \subset B$.

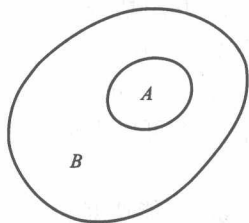


图 1-1

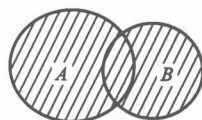


图 1-2

定义 1.1 由集合 A 与 B 中的所有元素构成的集合称为集合 A 与 B 的并, 记为 $A \cup B$, 读为 A 与 B 的并, 如图 1-2 阴影所示. 也可表示为

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

显然 $A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$, 并且 $A \cup \emptyset = A, A \cup A = A$. 特别, 当 $A \subset B$ 时, $A \cup B = B$.

定义 1.2 由集合 A 与 B 的公共元素构成的集合称为 A 与 B 的交, 记为 $A \cap B$, 读为 A 与 B 的交, 如图 1-3 阴影所示. 也可表示为

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

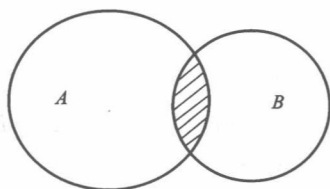


图 1-3

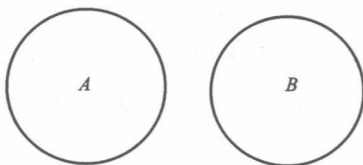


图 1-4

显然 $A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$, 并且 $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap A = A$. 特别, 当 $A \subset B$ 时

$$A \cap B = A$$

例 1.13 设 $A = \{x \mid -1 < x < 2\}, B = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$, 则

$$A \cup B = \{x \mid -1 < x \leq 3\}, \quad A \cap B = \{x \mid 1 \leq x < 2\}$$

例 1.14 设 A 为全体正整数集合, B 为全体负整数集合, C 为全体整数集合, 则

$$A \cup B = \{x \mid x \text{ 为正整数或负整数}\}, \quad A \cap B = \emptyset$$

$$A \cup C = C \quad \text{且} \quad B \cap C = B$$

这里 $A \cap B = \emptyset$, 称 A 与 B 是分离的, 如图 1-4 所示.

定义 1.3 由属于集合 A 而不属于集合 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的差, 记为 $A - B$, 如图 1-5 所示阴影部分, 也可表示为

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

例 1.15 若 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$, 则

$$A - B = \{1, 3\}, \quad B - A = \{6, 8\}$$

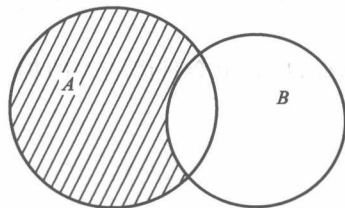


图 1-5

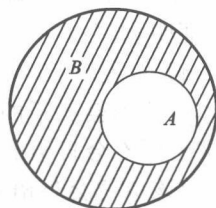


图 1-6

定义 1.4 若集合 A 为集合 B 的子集, 则由属于 B 而不属于 A 的所有元素构成的集合称为集合 A 关于集合 B 的补集, 记为 A_B^c , 也常简记为 A^c , 如图 1-6 阴影部分. 也可表示为

$$A_B^c = \{x \mid x \in B \text{ 且 } x \notin A\}$$

显然

$$A \cup A_B^c = B, \quad A \cap A_B^c = \emptyset, \quad A_B^c \subset B$$

特别, 由于 $A \subset B$, 则 $B - A = A_B^c$.

例 1.16 在例 1.14 中的集合 A, B, C , 由 $A \subset C, B \subset C$, 则

$$A_C^c = B \cup \{0\}, \quad B_C^c = A \cup \{0\}$$

并有

$$C - A = B \cup \{0\}, \quad C - B = A \cup \{0\}$$

即

$$C - A = A_C^c, \quad C - B = B_C^c$$

集合运算有如下性质:

(1) 交换律: ① $A \cup B = B \cup A$; ② $A \cap B = B \cap A$.

(2) 结合律: ① $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; ② $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(3) 分配律: ① $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

$$\text{② } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(4) 对偶律: ① $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$; ② $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

下面证明结合律 ① 和对偶律 ②, 其他结论可以类似证明.

结合律 ① 的证明:

如果 $x \in (A \cup B) \cup C$, 则 $x \in A \cup B$ 或 $x \in C$, 即 $x \in A$ 或 $x \in B$ 或 $x \in C$, 因而 $x \in A$ 或 $x \in B \cup C$, 所以 $x \in A \cup (B \cup C)$, 由此可得

$$(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$$

类似可证

$$A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$$

所以

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

对偶律 ② 的证明:

如果 $x \in (A \cap B)^c$, 则 $x \notin A \cap B$, 故 $x \notin A$ 与 $x \notin B$ 至少有一个成立. 当 $x \notin A$ 时, 有 $x \in A^c$; 当 $x \notin B$ 时, 有 $x \in B^c$. 因此总有 $x \in A^c \cup B^c$, 则可得 $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$.

如果 $x \in A^c \cup B^c$, 则 $x \in A^c$ 与 $x \in B^c$ 至少有一个成立, 即 $x \notin A$ 与 $x \notin B$ 至少有一个不成立. 故 $x \notin A \cap B$, 即 $x \in (A \cap B)^c$, 所以 $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$.

综合以上证明, 有 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

例 1.17 设 A 表示某单位会英语的人的集合, B 表示会日语的人的集合, 那么

A^c 表示该单位不会英语的人的集合;

B^c 表示该单位不会日语的人的集合;

$A - B$ 表示该单位会英语而不会日语的人的集合;

$B - A$ 表示该单位会日语而不会英语的人的集合;

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ 表示英语和日语都不会的人的集合;

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ 表示不会英语或不会日语的人的集合.

1.1.3 实数与数轴

人们对于数的认识是逐步深入的, 首先是自然数, 然后发展到整数、有理数, 再进一步

发展到无理数.

自然数集 \mathbf{N} 关于加法运算是封闭的, 即若 $a \in \mathbf{N}, b \in \mathbf{N}$, 则必有 $a+b \in \mathbf{N}$. 但在 \mathbf{N} 中, 减法运算却不是封闭的, 这样就有了整数集 \mathbf{Z} . 在整数集 \mathbf{Z} 中, 加法、减法和乘法运算是封闭的, 但对除法运算却不封闭, 因而引出了有理数集 \mathbf{Q} . 对于有理数集

$$\mathbf{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q}, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}, p \text{ 与 } q \text{ 互质} \right\}$$

四则运算总是封闭的. 有理数除了以分数形式表示, 还可以表示为有限小数或无限循环小数形式. 随着科学技术的发展及数学研究的进一步深入, 出现了诸如圆周率 π 的计算及开方运算如 $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ 等, 无理数因此应运而生.

有理数和无理数统称为实数, 所有的实数都可以在一条直线上形象地表示出来. 设有一条水平直线, 在直线上取定一点 O 称为原点, 规定一个正方向, 习惯上规定由原点向右的方向为正方向, 再规定一个长度称为单位长度. 这种具有原点、正方向和单位长度的直线称为数轴, 如图 1-7 所示.

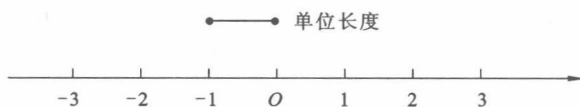


图 1-7

任何一个有理数 p/q , 都可以在数轴上找到一个点与之对应, 这个点称为有理点, 它是有理数 p/q 的几何表示, 而有理数 p/q 则为该有理点的坐标. 同时, 对于任意两个有理数 a, b ($a < b$), a 与 b 之间至少可以找到一个有理数 c , 使 $a < c < b$, 如 $c = (a+b)/2$; 同样, 在 a 与 c 之间也至少可以找到一个有理数 d , 使 $a < d < c$; 依此类推, 可以看到 a 与 b 之间总可以找到无穷多个有理数, 即有理数具有稠密性. 对应地, 在数轴上任意两个有理点之间也有无穷多个有理点存在, 也就是说, 有理点在数轴上是处处稠密的.

尽管有理点在数轴上处处稠密, 但是否能充满整个数轴呢? 例如, 以 1 个单位长度作为边长的正方形, 其对角线长度为 $\sqrt{2}$ 个长度单位, 可以证明, $\sqrt{2}$ 是无理数, 在数轴上可以作 $\sqrt{2}$ 个长度单位的线段 OB , 如图 1-8 所示.

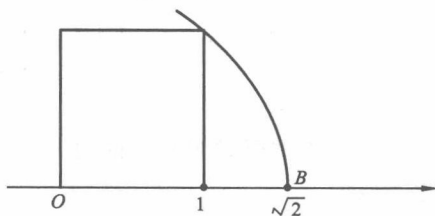


图 1-8

可见, 数轴上确实还存在诸如此类的非有理点——无理点, 如 $\sqrt{2}+1, \sqrt{3}, \pi, \dots$ 对应的点. 所有

的无理点填补了有理点之外的“空隙”. 可以证明, 实数充满了整个数轴而不再留有“空隙”, 也就是说, 实数不仅具有稠密性, 也具有连续性. 这样, 数轴上的点与实数之间建起了一一对应的关系, 每一个实数必是数轴上某点的坐标; 反之, 数轴上的每一点的坐标必是一个实数. 所以, 在今后的学习中, 常将实数与其在数轴上的对应点不加区别地混用, 如点 a 和实数 a 是相同的意思.

1.1.4 区间、邻域

区间是用得较多的一类数集,在数学中常用区间表示一个变量的变化范围.

设 a 和 b 都是实数,且 $a < b$,数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间,记为 (a, b) ,如图 1-9(a) 所示,即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

a 和 b 为开区间的端点,且 $a \notin (a, b), b \notin (a, b)$.

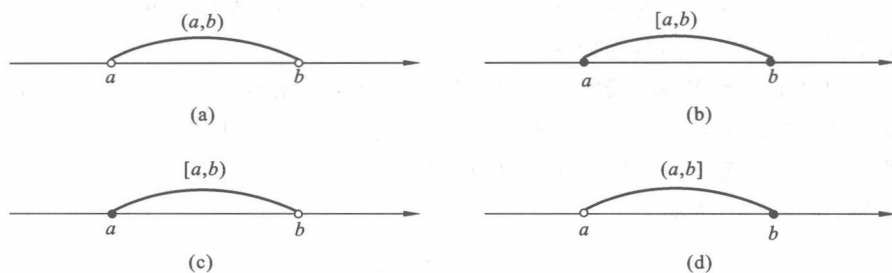


图 1-9

数集 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间,记为 $[a, b]$,如图 1-9(b) 所示,即

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

a 和 b 也称为闭区间的端点,这里 $a \in [a, b], b \in [a, b]$. 类似可以给出半开区间,如图 1-9(c)、(d) 所示.

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}, (a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

以上 4 种区间都称为有限区间,区间长度均为 $b - a$,在数轴上这些区间是长度有限的线段. 此外,还有 5 种所谓无穷区间,引入记号 $+\infty$ (读为正无穷大) 及 $-\infty$ (读为负无穷大),则可定义无穷区间如下

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}, [a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}, (-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}, \quad \text{即全体实数集合 } \mathbf{R}$$

以后在不需辨明所讨论的区间是否包含端点以及是否有限区间时,我们就简单地称之为区间.

邻域是一类较为特殊的区间,也是一个常用的概念.

设 x_0 与 δ 是两个实数,且 $\delta > 0$,数集

$$\{x \mid |x - x_0| < \delta\}$$

称为点 x_0 的 δ 邻域,记为 $U(x_0, \delta)$,点 x_0 称为该邻域的中心, δ 为该邻域的半径. 由于 $|x - x_0| < \delta$,即 $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$,所以

$$U(x_0, \delta) = \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$$

因此, $U(x_0, \delta)$ 就是开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,这个开区间以点 x_0 为中心,半径为 δ ,长度为 2δ ,如图 1-10(a) 所示.

有时用到邻域时需要把邻域中心点去掉,点 x_0 的 δ 邻域去掉中心点 x_0 后,称为点 x_0