

《现代数学教育丛书》

初中数学习题研究

戴再平 曹存富 夏昌华编著

K D S X J Y C S

XIANDAI SHUXUE JIAOYU CONGSHU

湖南教育出版社

《现代数学教育丛书》

201032531-55

初中数学学习题研究

戴再平 曹存富 夏昌华 编著

顾问 张孝达

主编 曹才翰

副主编 贾云山 郭维亮 吴占华

湖南教育出版社

初中数学习题研究

戴再平 曹存富 夏昌华编著

责任编辑：欧阳维诚

湖南教育出版社出版发行

湖南省新华书店经销 湖南省新华印刷二厂印刷

850×1168毫米 32开 印张：5.375 字数：140,000

1996年11月第1版 1996年11月第1次印刷

ISBN7-5355-2426-5/G·2421

定价：6.35元

本书若有印刷、装订错误，可向承印厂调换

编者的话

实现九年制义务教育,提高全民族的素质,对实现我国四个现代化建设,具有深远的战略意义,一切教育部门、学校、教师都要为此而奋斗。正是出于这个目的,我们特编辑、出版一套《现代数学教育丛书》,为大面积提高数学教学质量,全面实现学生素质水平的提高,高质量实施九年义务教育,做一些我们应该做的事。

本丛书特邀请数学教育专家、中学特级教师、高级教师撰写。本丛书力争做到以下几点:

1. 选题紧紧围绕九年义务教育有关内容和中学实际。如对九年义务教育初中数学大纲、教材的理解,初中数学教学目标与评价,初中数学习题研究,初中数学教学结构与环节等,以及在实施九年义务教育过程中值得研究的问题。

2. 具有一定的理论高度。由于理论是指导实践的,正确的理论也是从实践中总结出来的,本丛书力争结合具体的初中数学内容,介绍国内外现代数学教育理论。特别是介绍国内经实践证明有效,且有一定理论水平的教学原理、环节与方法。以期转变观念,适应现代教学的要求。

3. 具有可操作性。本丛书力戒空泛议论,努力做到使读者看得见、摸得着,可操作。这样,各本书都要结合读者熟悉的教學事例来阐述,使读者感到亲切及理解所述内容,并可进行操作,进而引发出读者自己的经验。

由于编写这套丛书是一种新的尝试,书中的缺点、错误在所难免,恳切盼望读者不吝批评指正。

目 录

第一章 绪论	(1)
第二章 初中数学习题的类型的研究	(5)
第三章 初中数学习题的结构的研究	(22)
第一节 条件必须是充分的、相容的	(23)
第二节 条件必须是独立的、最少的	(29)
第三节 叙述必须是清晰的	(34)
第四章 初中数学习题的解法的研究	(36)
第一节 常规习题的解法	(38)
第二节 非常规习题的解法	(54)
第五章 初中数学解题错误的研究	(65)
第一节 知识性错误	(67)
第二节 逻辑性错误	(70)
第三节 策略性错误	(79)
第四节 心理性错误	(84)
第六章 初中数学习题的编制的研究	(92)
第一节 编制初中数学习题的原则	(92)
第二节 从成题出发	(94)
第三节 从基本量出发	(108)
第四节 从结论出发	(113)
第五节 从实际问题出发	(119)
第七章 初中数学开放题	(132)
第一节 什么是数学开放题	(132)
第二节 数学开放题教学的案例与设计	(139)
第三节 数学开放题的编制	(153)

第一章 绪 论

数学习题是初中数学的重要组成部分，“解题”是数学教学的基本活动形式。当代最著名的数学教育家波利亚指出：“中学数学教学的首要任务就是加强解题训练。”他还认为“掌握数学意味着什么呢？这就是说善于解题，不仅善于解一些标准的题，而且善于解一些要求独立思考、思路合理、见解独到和有发明创造的题。”我国中学数学界普遍重视解题，这一方面是我国优秀的历史文化传统使然，在长达二千年的传统数学的发展过程中，我国的数学教育都重视解题教学。大约成书于公元一世纪的辉煌的数学典籍《九章算术》不仅是数学研究与创造的源泉，而且成为历代学者编写数学教材的范本，《九章算术》收集了方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股九类共 246 个问题，这些问题几乎反映当时社会生活的各方面的实际问题，记载了世界上最先进的有理数与正负数的运算法则、比例算法以及线性方程组的解法，即使对于几何问题的处理，也是着重于通过数量来表达的那种属性，归结为代数问题来解决。“我国的古代数学基本上遵循了一条从生产实践中提炼出数学问题，经过分析综合，形成概念与方法，并上升到理论阶段，精炼成极少数一般性原理，进一步应用于多种多样的不同问题。从问题而不是从公理出发，以解决问题而不是以推理论证为主旨”的道路（吴文俊）；另一方面，近百余年以来，我国数学教育先学日本，后学英美，解放后全面学习苏联，在博采众长的基础上于 60 年初形成自己的体系，这一数学教育体系重视基础知识的教学与基本技能的训练，而后者主要是

通过练习培养学生的计算能力、逻辑推理能力与空间想象能力,在教法方面则主张精讲多练,可以说在中国数学教育体系中,解题的地位是十分突出的.特别是1978年后,由于高等学校入学考试,高中、中专入学考试以及数学竞赛的推动,中学师生对解题技巧、解题方法的研究已蔚然成风,其中一部分数学教师在此基础上,已经从解法分类深入到解题策略和思维过程的探索,在数学习题的一般理论方面,取得不少成果.

80年代以来,我国每年发表的研究数学习题的文章的数量极其可观.以1991年国内三种有代表性的数学教育杂志为例:

单位:篇

杂志 文章分类	中学数学 (江苏)	数学通讯	中学数学 研究	合计	占总数%
1991年全年	323	182	160	665	100.0
试 题	21	19	56	96	14.4
解题研究	245	131	74	450	67.7
教材教法	34	8	20	62	9.3
教育论文	17	22	9	48	7.2
其 它	6	2	1	9	1.4

由上表可见,研究数学习题的文章(包括表中“试题”和“解题研究”两项)占这三种杂志全年发表的文章总数的82.1%.又根据张友余编的《中国中等数学文摘(1980)》(陕西科学技术出版社1983年3月第1版),1980年我国中学数学教育文献共2140篇.1985年,仅据28种中学数学专业期刊统计,发表的文章就有3625篇,注意到近几年来中学数学专业期刊种数基本稳定,因此我们估计,加上其他散见于各种报刊、杂志、书籍之中的文章,我国每年公开发表的中学数学教育文献当在5000篇左右,按上述比例折算,其中研究数学习题的文章约为4000篇之谱.通过对这些

文章的分析,我们发现,我国研究数学习题的文章数量虽多,但是存在着两个明显的不足:一是内容集中在对考题的解法及解法分类方面,很少从哲学、社会学的高度对解题并通过解题对整个数学教育进行反思和审视,当国际上数学教育观念发生重大的变化,“问题解决”已被公认为是数学教育的核心的时候,在我国的中学数学期刊上却仍然没有“问题解决”的地位,绝大多数文章仍在不厌其详地探讨各种考题的精致的解法技巧,具有实际意义的数学应用题、开放题仍旧与数学教学无缘;二是内容多是低层次的反覆,缺乏理论上的深度,如在地区性甚至全国性的刊物、试题中不断出现错题,在不应出现成题的场合,如数学竞赛试题,中考试题中的灵活题,屡次出现成题.这些现象与其说是有关人员的疏忽,还不如说是有关人员缺少评价数学习题科学性的理论和编制数学习题理论的指导.

舆论方面未能提供正确的导向以及理论的贫乏与学校环境中缺少研究氛围,又要应付上一级学校的招生考试,使得相当一部分中学数学教师长期沉缅于解题之中,忘记了解答数学习题本身并不是目的,而是一种训练手段,他们热衷于向学生传授细微末节的技巧,要求学生熟记习题类型,使得“数学的教学,逐渐流于无意义的单纯的演算习题的训练,固然,这可以发展形式演算的能力,但却无助于提高独立思考的能力.”(柯朗)社会和现代科学技术的迅速发展,日益使我们认识到,对于公民的数学素质的要求已不限于会应付考试、会解几道难题,社会要求21世纪的未来公民能用数学知识和数学观念,创造性地去观察、解释实际生活中数量关系、空间形式和数据信息,解决经济发展和科学技术中的实际问题,形成合理的思维习惯和良好的数感.为了扭转上述问题,在转变数学教育观念的同时,应该加强对数学习题的类型、结构、方法等理论问题的研究,使得教师掌握比较系统的有关数学习题的理论知识,以利于数学教师素质的提高.

本书就是在“初中数学习题”这个领域,从学科本身的特点

以及广大初中数学教师的实践经验出发，运用现代教学论、现代认知心理学、思维科学、系统科学等现代科学成果，通过科学的概括与整理，力求作出较为系统的、规律的叙述，特别是对于在“问题解决”教学占有重要地位的数学开放题，将单独设章加以研究。

我国的初中数学教学内容与不少国家相比较，具有程度较深、理论严谨等特点，所以关于解题研究方面的深度和广度在世界上是可以和任何国家相媲美的。我国初中 13 岁学生在国际教育成就评价 (IAEP) 数学测试 (1991) 中，以平均 80 分的成绩在参加测试的 21 个国家 (地区) 中名列第一，更显示出我国初中数学解题教学中蕴含着丰富而卓有成效的经验，但是，如何紧密地联系我国实施义务教育后数学教育发展变化的实际情况，不懈地追踪解题教学中涌现的新问题，以国际上关于“问题解决”的新经验充实我国关于初中数学习题的研究工作，对我们来说还是一件相当繁重而有意义的任务。

第二章 初中数学习题的类型的研究

什么叫数学习题？为熟悉和掌握教学计划、教学大纲对学生的要求，发展学生的智力和能力而设计的问题系统都是习题。以数学为内容，或者虽不以数学为内容，但必须运用数学知识和方法才能解决的习题，称为数学习题。具体地说，初中数学习题是根据数学科学、心理学特别是初中学生的认知规律而设计的，符合初中数学教学大纲对学生的要求的那些习题。它应该兼顾科学的科学性和初中生的年龄特征，它是以帮助初中学生掌握和巩固数学基本知识和基本技能，培养学生的能力，发展学生的智力为目的的问题系统，通过解答这些习题，可以使学生认识到数学的实际应用价值和教育文化价值，并且从中获得学习的报偿和数学美的享受。

为了深入而具体地对初中数学习题进行研究，有必要将众多的数学习题的题型加以归类。从不同的角度区分初中数学习题的类型并作一些探讨，一方面可以加深对各类数学习题的结构、功能及配置原则的认识，另一方面也必然联系到编制和运用某一类型数学习题的教育指导思想以及内容的价值取向。

一、我国传统的题型分类

在我国历史上，成书于公元一世纪的《九章算术》，既是一本杰出的数学专著，也可以说是一本以实际问题集形式出现的数学教科书。《九章算术》是按实际问题所涉及的领域不同来分类的。在以后的近两千年时间里，它一直成为数学教材的典范。如北周

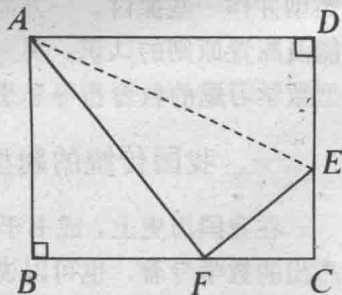
甄鸾编著的《五曹算经》，秦九韶所著的《数书九章》，莫不继承《九章算术》的风格，所以我们说自古以来我国就有一套数学题型的分类方法. 19世纪60年代以后，我国开始出现了具有现代意义的数学教育. 百余年来，在大量翻译日本、欧美等国数学教材的基础上，我国也形成了自己的数学学习题分类，主要有以下几种：

(一) 以知识内容为标准划分

初中数学习题，以其所涉及的数学知识内容为标准来划分，可分为代数题和几何题两大类. 代数题还可以分为代数式、方程、不等式、函数、统计初步等. 解方程还可以再细分为解整式方程、分式方程、无理方程等. 解不等式还可以细分为解一元一次不等式、一元二次不等式等.

一个数学习题，如果所涉及的知识只是某一学科（如代数或几何）甚至某一单元，称为单一题；如果所涉及的知识超出某一单元或学科，则称之为综合题. 单一题有利于学生及时消化和巩固刚刚学到的数学基础知识和基本技能，为以后解答综合题打下牢固的基础，在课堂练习、课后作业和单元测验中常被采用. 综合题有利于培养学生综合地、灵活地运用不同单元、不同学科的数学知识来分析和解决问题的能力，有利于培养学生思维的广阔性、多向性. 因此，在期末复习、考试，毕业复习、考试，乃至于升学考试、数学竞赛中常被采用.

例 1 如图 2—1，折叠长方形（四个角都是直角，对边相等）的一边 AD ，点 D 落在 BC 边的点 F 处. 已知 $AB=8\text{cm}$ ， $BC=10\text{cm}$ ，求 EC 的长.



此例融合了代数和平面几何两个不同学科的有关知识，是一个较好的综合题.

让我们看下面这个题目：

图 2—1

例 2 解方程： $ax^2+bx+c=0$ ，其中：(1) a 是 -5 的相反数；(2) b 是函数 $y=-x^2+2x+7$ 的最大值；(3) c 是某直角三角形斜边的长，其两直角边分别是 1 和 $2\sqrt{2}$ 。

此题实际上由四个小题组成：由 (1) 求 a ；由 (2) 求 b ；由 (3) 求 c ；然后代入 a 、 b 、 c 的值，解方程 $ax^2+bx+c=0$ 。把这四个问题生硬地扯在一起，互相之间缺乏内在的有机的联系，因而不能算是真正的综合，只是单纯的堆砌。用这样的题作考题，就可能发生这样的情况：因为前面某一小题解错或解不出来，而失去解后面几个小题的机会，从而造成不必要的失分。这种只作形式上的堆砌，缺乏内在联系的所谓综合题是我们在教学中应避免采用的。

(二) 以习题的形式为标准划分

形式是习题的外部特征。数学习题的形式和它的解法常常是有联系的。本世纪 50 年代，许莼舫先生曾将几何习题按其外部形式分为证明题、计算题、作图题和轨迹题四类，这被当时的数学教育界公认为一种很好的分类法。对于刚刚迈进数学殿堂的初中学生来说，以形式定题型，以题型定解题程序，有利于他们数学能力的发展，可使其思维指向有序化，解题过程规范化。例如，对于一个已被判定为证明题的几何习题，学生只须按以下的步骤去完成就行了。

1. 已知。即弄清题目所给的条件，并结合图形将其条理化。
2. 求证。即弄清题目所要证明的结论。
3. 分析。综合运用分析法（执果索因）和综合法（由因导果），寻找证明结论的思路。这一过程常略去不写，但它是证明几何题的关键步骤。
4. 证明。将已探明的证题思路严谨地、认真地、完整地写出来。一般是一条由条件到结论的逻辑推理链。

这种以外部形式为标准对习题分类的方法，也用于初中代数。传统上，将代数习题分为求解题与求证题两大类。求解题包括：求

代数式的值；化简代数式；对代数式施行加、减、乘、除、乘方等运算；对多项式进行因式分解；解方程和方程组；解不等式和不等式组；列方程（组）或不等式（组）解应用题；求函数表达式；求函数的定义域和值域；求函数的增、减区间，最大、最小值等等。求证题主要包括：证明恒等式、条件等式和简单的不等式。

二、国外的题型分类简介

国外对数学习题的分类，有些与我国传统上的分类是一致的。如前苏联的Л. М. 弗里特曼、E. H. 杜列茨基、B. Я. 斯捷欣柯提出的三分法，实际上也是一种按习题的外部特征来划分数学习题的方法。按照这种方法，全部数学习题被分为三大类。

1. 求解题。其要求是求出、寻找、识别某种未知数。这里的未知数可能是量、关系式、某种对象、物体，它的位置或形状等等。这类习题包括：求各种表达式的值；解方程或方程组；文字计算题；几何计算题；求已知函数的特殊点（极值点、零点等）和特殊区间（如单调区间）。

2. 证明题或说明题，待解决的是证实某一论断的正确性，或检验其真假，或者说明某一对象、某一个事实为什么成立。这一类习题包括：证明恒等式和不等式；几何证明题；确定几何图形的形状；已知表达式（或图形）的性质，确定其方程；证明表达式（或图形、事件）的某种性质（如存在性、唯一性等）。

3. 变换题或求作题。凡在习题中要求变换某种表达式，要求将它化简为其它形式，要求作出某一几何图形（或表达式）满足给定的条件等等，都属于这一类。包括：化表达式为标准形式；化简各种表达式；多项式的因式分解；对表达式施行各种运算；作已知函数的图像；作满足给定条件的几何图形；由已知的几何图形，经过某种变换作出新的符合给定条件的几何图形。

与我国传统的按形式对数学习题进行分类相比较，上述三分

法显然更加完善和严谨.它不仅包括了对中学阶段的所有代数、几何习题的分类,甚至某些大学基础课程(如在新的高中数学课程标准中已列入教学内容的微积分初步)的习题也被包括了.

自从美籍生物学家贝塔朗菲于1947年发表划时代的著作《一般系统论》以来,系统科学就迅速发展起来,它为现代科学技术提供了崭新的思想和方法,有力地推动了现代科学技术的发展.根据系统论的观点,凡是由若干个相互联系、相互作用的要素组成的,具有特定功能的有机整体,都是一个系统.这种观点于80年代初期被前苏联学者B. A. 奥加涅相、Ю. M. 柯罗亚金、Г. Л. 卢坎金等人引进到对数学习题的分类研究中来.

将数学习题看作一个系统: $\{Y, O, P, Z\}$. 其中: Y——习题条件; O——解题依据; P——解题方法; Z——习题结论. 分析四个要素中已知要素的多少,可以将习题分为以下四类.

1. 标准性题: 四个要素都是已知的.

例3 求证: $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

对于已学过乘法公式 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 和非负数 $a^2 \geq 0$ 知识的初中学生来说:

Y: 左边是 $a^2 + b^2$, 右边是 $2ab$;

O: 乘法公式 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, 非负数 $a^2 \geq 0$;

P: 利用上述依据,再将 $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ 移项;

Z: 左边 \geq 右边.

四要素皆为已知,故为标准性题.

2. 训练性题: 四个要素中仅有一个是解题者所不知道的.

例4 分解因式: $2x^2 - 7x + 6$.

对于已学过十字相乘法的初中学生来说,除了结论 Z 未知外,其余三要素 Y, O, P 均已知,故为训练性题.

例5 计算 $\frac{2x + 4}{x^2 - 4x + 4} \div \frac{x^3 + 8}{2x - 4} \cdot (x^2 - 4)$.

对于学过分式的四则运算的初中学生来说,也是训练性题.

3. 探索性题：四个要素中有两个是解题者所不知道的.

例 6 已知： $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，四边形 $ACDE$ 和 $CBFG$ 是在 $\triangle ABC$ 外的正方形， $\triangle ABC$ 的高 CH 所在的直线交 DG 于点 M . 求证：(1) $DG = AB$ ；(2) $CM = \frac{1}{2}DG$.

此题中，解题依据 O 和解题方法 P ，对于初二学生来说，都是未知的，只有 Y (已知条件) 和 Z (结论) 是已知的，故为探索性题.

例 7 设 S_x 是 x_1, x_2, \dots, x_n 的标准差， S_y 是 $3x_1+5, 3x_2+5, \dots, 3x_n+5$ 的标准差，求证： $S_y = 3S_x$.

本题与例 6 相类似，仅有 Y (已知条件) 和 Z (结论) 是已知要素，也是探索性题.

4. 问题性题：四个要素中仅有一个是解题者所知道的.

例 8 给定一个直角三角形的铁片，两直角边为 a, b ，且 $a \geq b$. 现在要用它来剪出尽可能大的两个相等的圆铁片，问圆的半径应为多大？

将问题数学化，可知有以下三种情形，如图 2—2. 即题中的已知条件 Y 也未直接给出，更不用说 O, P, Z 了，可知是问题性题.

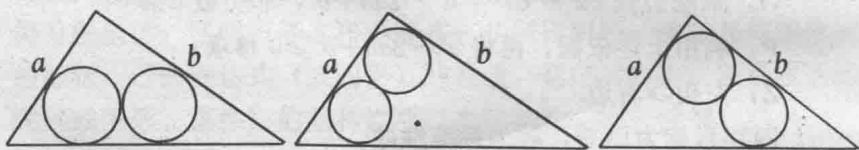


图 2—2

例 9 剧院的坐位排成 p 排和 q 列 (横行为排，纵行为列)，共可坐 pq 位观众. 每一坐位上都坐着一个小学生，他们的身高各不相同. 老师在每一排中挑选一个个子最矮的学生，在他们之中又挑选一个个子最高的学生，其身高等于 a ；然后在每一列中挑选一

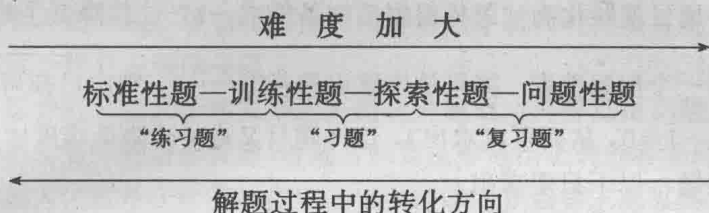
个个子最高的学生，在他们之中又挑选一个个子最矮的学生，其身高等于 b 。试比较 a 与 b 的大小。

本题同样只给出已知条件 y ，其它解题依据 O ，解题方法 P 和习题结论 Z 一无所知，属于问题性题。

用要素分析法对数学习题进行分类的意义是：

首先，它有助于教师掌握习题难度，根据学生的实际情况和教学要求作出适当处理。

一般说来，有如下规律：



这里的“练习题”、“习题”、“复习题”系指我国现行中学教材（包括九年制义务教育的初中数学教材）中相应层次的习题。

标准性题和训练性题，已知要素较多，一般有定向的解题方法，可称为收敛性习题，常用来巩固学生所学的知识，强化学生的思维定势。

探索性题和问题性题，未知要素较多，通常不具有定向的解题方法，可称为发散性习题，常用于培养学生思维的灵活性，有助于发展学生的智力。

其次，它有助于教师在数学中对解题过程作微观分析，突出解题中的探索过程。

在指导学生解题的过程中，教师要运用启发式，注意对习题作定向转化。例如帮助学生分析已知条件 Y ，提示解题依据 O 和解题方法 P ，引导学生导出结论 Z ，总的目标是逐步降低习题的难度层次，创设适合学生认知水平的教学情景。

例 10 已知 $x^2 + 3xy - y^2 = 0$ ，求 $\frac{x^2 + y^2}{xy}$ 的值。

对于多数初中学生来说，这可以算是一道问题性题。除已知条件 Y: $x^2+3y-y^2=0$ 之外，其余的解题依据 O，解题方法 P 以及习题结论 Z 都不知道，但当教师启发学生，根据已知条件，得出

$$y^2=x^2+3xy, \text{ (或 } x^2=y^2-3xy\text{)}$$

代入所求式有

$$\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x^2+(x^2+3xy)}{xy} = \frac{2x}{y} + 3.$$

于是题目就转化为“怎样根据已知条件求 $\frac{x}{y}$?”这就降低了难度，成为一个探索性题。如果学生意识到若设 $\frac{x}{y}=t$ ，则由已知可得 $t^2+3t-1=0$ ，从而可以求出 t ，这样题目又进一步降低难度成为训练性题。以下只要求出

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2},$$

代入

$$\frac{x^2+y^2}{xy} = 2t+3 = -3 \pm \sqrt{13}+3 = \pm \sqrt{13}.$$

题目就迎刃而解。

第三，教师掌握了这种要素分析分类法，也可以在教学中通过增加未知要素个数的方法来提高习题的难度，加强对学生思维灵活性的训练，从而进一步发展学生的智力，培养学生的能力。

譬如，可将例 4 改编为：

例 11 给出整数 a 的两个适当数值，并用十字相乘法分别分解因式： $2x^2-7x+a$ 。

这就由一道训练性题变为一道探索性题，其难度显然增加了。

三、当前我国初中数学考试中常用的三种题型

1978 年以后，我国的数学教育在习题教学方面，出现了两大趋势。一是数学能力的培养在习题教学中受到重视，传统的题型