

綫性規劃

張新越 編

廣東农垦管理干部學院

一九九一年十二月

目 录

引 论	1
第一章 线性规划问题及其数学模型	2
§ 1. 1 几个典型的线性规划问题	2
§ 1. 2 线性规划问题的数学模型	6
习题一	10
第二章 线性规划的图解法和消去法	12
§ 2. 1 两个变量的线性规划问题的图解法	12
§ 2. 2 线性规划问题的消去法	18
习题二	23
第三章 单纯形方法	25
§ 3. 1 对应于基B的单纯形表	26
§ 3. 2 判断	33
§ 3. 3 换基迭代	35
§ 3. 4 求第一个可行基的方法	41
习题三	56
第四章 对偶线性规划问题及对偶单纯形法	57
§ 4. 1 对偶线性规划问题	57
§ 4. 2 对偶问题的几个基本性质	65
§ 4. 3 对偶单纯形方法	70
习题四	75

第五章	线性规划问题的灵敏度分析	77
§ 5. 1	目标函数的系数的灵敏度分析	77
§ 5. 2	约束条件的常数项的灵敏度分析	81
§ 5. 3	添加新变量时的灵敏度分析	82
§ 5. 4	添加一个新的约束条件时的灵敏度分析	84
	习题五	86
第六章	运输问题的特殊解法	88
§ 6. 1	运输问题的数学模型及其特点	88
§ 6. 2	表上作业法	91
§ 6. 3	图上作业法	97
	习题六	105

引 论

在工农业生产、交通运输、财贸工作等各项经济活动中，必须提高经济效益。提高经济效益可以通过两种途径：一是技术方面的改进，二是靠管理现代化。

现代管理的重要特点之一是广泛采用运筹学方法解决企业的生产经营问题。运筹一词即“运用”和“筹划”的意思。运筹学方法能帮助企业的组织者与指挥者用科学的方法去安排生产和使用资源，以求自己所管理的企业取得最好的经济效益。

运筹学有许多分支，线性规划是其中一个重要分支。它产生于廿世纪三十年代。随着电子计算机的发展而得到迅速发展，应用日益广泛与深入。它也是管理科学最成熟和最有用的分支之一。线性规划所研究的问题可以归结成两大类：一类是在给定数量的人力、物力等资源下，如何充分运用这些资源，使完成的任务最多。另一类是在给定任务的情况下，如何统筹安排，尽量做到用最少的人力、物力等资源去完成这项任务。在经济领域中，这样的问题很多，如运输问题、生产的组织与计划问题、合理下料问题、配料问题、布局问题等等都可以运用线性规划的方法加以研究和解决。

第一章 线性规划问题及其数学模型

§ 1.1 几个典型的线性规划问题

〔例1〕设有两个砖厂 A_1, A_2 。产量分别为23万块与27万块。它们的产量供应 B_1, B_2, B_3 三个工地。其需要量分别为17万块, 18万块, 15万块。而自各产地到各工地的运价列表如下(表1-1)。

表1-1

运价(元/万块) 砖厂 \ 工地			
	B_1	B_2	B_3
A_1	50	60	70
A_2	60	110	160

问应如何调运, 才使总运费最省?

解: 设 x_{11}, x_{12}, x_{13} 分别表示由砖厂 A_1 运往工地 B_1, B_2, B_3 砖的数量(单位: 万块); x_{21}, x_{22}, x_{23} 分别表示由砖厂 A_2 运往工地 B_1, B_2, B_3 砖的数量。

因为由砖厂 A_1 运往三个工地砖的总数应为 A_1 的产量23万块, 即: $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 23$

同样由砖厂 A_2 运往三个工地的总数应为 A_2 的产量27万块, 即: $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 27$

另一方面, 两个砖厂供给 B_1 工地的砖的数量应等于 B_1 的需要量17万块, 即: $x_{11} + x_{21} = 17$

同理可得: $X_{12} + X_{22} = 18$

$$X_{13} + X_{23} = 15.$$

因此, 调运方案就是满足下面约束条件的一组变量 $X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{21}, X_{22}, X_{23}$ 的值:

$$\text{约束条件} \begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} = 23 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} = 27 \\ X_{11} + X_{21} = 17 \\ X_{12} + X_{22} = 18 \\ X_{13} + X_{23} = 15 \\ X_{11} \geq 0, X_{12} \geq 0, X_{13} \geq 0, X_{21} \geq 0, X_{22} \geq 0, X_{23} \geq 0 \end{cases}$$

显然, 可行的调运方案有很多个。

现在的问题就是要在这些很多个可行的方案中, 找一个运费最少的方案, 即使得

目标函数 $S = 50X_{11} + 60X_{12} + 70X_{13} + 60X_{21} + 110X_{22} + 160X_{23}$ 的值最少。记号“ $\min S$ ”表示函数 S 的最小值。

〔例2〕某工厂利用 A_1, A_2, A_3 三种原料, 生产 B_1, B_2, B_3, B_4 四种产品。每月可供应该厂原料 A_1 为 500 吨, 原料 A_2 为 300 吨, 原料 A_3 为 200 吨。生产一吨的不同产品可获得的利润以及生产一吨不同产品所消耗的原料数列表如下: (表1-2)

表1-2

原 料 \ 消耗 \ 产 品	B_1	B_2	B_3	B_4	每月原料供应量(吨)
A_1	1	1	2	2	500
A_2	0	1	1	3	300
A_3	1	2	1	0	200
利润(元/吨)	200	250	300	150	

问工厂每月应如何安排生产计划，使总利润最大？

解：设该厂每月生产 X_1 吨产品 B_1 ， X_2 吨产品 B_2 ， X_3 吨产品 B_3 ， X_4 吨产品 B_4 。（即以 X_j 表示生产产品 B_j ($j=1, 2, 3, 4$) 的计划数）

因为原料 A_1 每月的供应量为 500 吨，所以生产 B_1, B_2, B_3, B_4 这四种产品所消耗的原料 A_1 的总数量不能超过 500 吨。即有

$$X_1 + X_2 + 2X_3 + 2X_4 \leq 500$$

同理有：
$$X_2 + X_3 + 3X_4 \leq 300$$

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 200$$

显然，各种产品的数量不应是负数，因此有

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0$$

我们要求生产 B_1, B_2, B_3, B_4 产品的数量 X_1, X_2, X_3, X_4 要使获得的总利润，即

目标函数 $S = 200X_1 + 250X_2 + 300X_3 + 150X_4$ 最大。常用记号“ $\max S$ ”表示函数 S 的最大值。

（例 3）某生产队计划种大豆 120 亩，花生 40 亩，红薯 20 亩。安排这三种作物的 180 亩土地中，一类地占 60 亩，二类地占 50 亩，三类地占 70 亩。各类地上种各种作物所获得的收入（元/亩）如下面表 1—3，问如何布局，才能使总收入最高？

表 1—3

亩产值(元/亩) 作物 \ 土地类型	一类地 (B_1)	二类地 (B_2)	三类地 (B_3)	计 划 亩 数
大豆 (A_1)	900	750	600	120 亩
花生 (A_2)	800	600	500	40 亩
红薯 (A_3)	700	600	500	20 亩
各类土地总亩数	60 亩	50 亩	70 亩	180 亩

解：设作物 A_i ($i=1, 2, 3$) 在土地 B_j ($j=1, 2, 3$) 种植的亩数为 X_{ij} 。

因为 A_1 在 B_1, B_2, B_3 种植的亩数之和要等于 A_1 计划亩数 120 亩。即, $X_{11} + X_{12} + X_{13} = 120$

同理有, $X_{21} + X_{22} + X_{23} = 40$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} = 20$$

另一方面, A_1, A_2, A_3 在 B_1 种植的亩数之和要等于 B_1 土地的总亩数 60 亩。即,

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 60$$

同理有 $X_{12} + X_{22} + X_{32} = 50$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 70$$

同时, X_{ij} ($i=1, 2, 3, j=1, 2, 3$) 是表示种植面积不应是负数。故 $X_{ij} \geq 0$

我们要寻求一种布局方案, 使得总收入最大即使得:

$$\begin{aligned} \text{目标函数 } S = & 900X_{11} + 750X_{12} + 600X_{13} + 800X_{21} + 600X_{22} \\ & + 500X_{23} + 700X_{31} + 600X_{32} + 500X_{33} \end{aligned}$$

达到最大。

由以上三个例子可以看出, 虽然它们的具体内容有不同之处, 但从数学上说, 它们具有下列的共同特征:

(1) 每一个问题都用一组未知数 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 表示某一方案。这组未知数的一组定值就代表一个具体方案。通常这些未知数的取值是非负的。

(2) 存在一定的约束条件, 这些约束条件都可用一组线性等式或不等式来表达。

(3) 都有一个目标要求, 并且这个目标可表示为一组未知数的线性函数(称目标函数), 按研究的问题不同, 要求目标函数实现最大化或最小化。

我们把求一组变量，满足线性约束条件，而使线性目标函数达到极大（或极小）的问题，称为线性规划问题。

§ 1.2 线性规划问题的数学模型

线性规划问题的数学模型的一般形式是:

求一组变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的值满足

[illegible]

并使目标函数 $S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ 的值最小 (或最大)

利用求和记号“ Σ ”，我们可以把一般形式缩写记为：

$$\text{求 } \min S = \sum_{j=1}^n C_j X_j \text{ (或 } \max S = \sum_{j=1}^n C_j X_j \text{)}$$

满足
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (\geq, =) b_i & (i=1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 & (j=1, 2, 3, \dots, n) \end{cases}$$

其中 $a_{ij}, b_i, c_j (i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n)$ 为已知量。

题

$$\text{令 } C = (C_1, C_2, \dots, C_n) \quad A = (a_{ij}) \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$j=1, 2, \dots, n$$

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$$

则线性规划问题一般形式为

$$\max(\min) \quad S = CX$$

满足 $\begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$ (或 $\geq b$, 或 $= b$)

根据实际问题建立起来的线性规划模型，目标函数可以是求最大值，也可以是求最小值；约束条件可以带“ $\leq$ ”或“ $\geq$ ”的不等式，或者是等式。这种多样性会给讨论带来不便，为了便于以后单纯形方法的讨论，我们规定线性规划问题的标准形式，它有以下几个特点：

1. 所有变量都有非负约束。
2. 所有的约束条件（变量的非负约束除外）都是等式。
3. 目标函数是求最小值的。
4. 所有 $b_i \geq 0$ 。

线性规划问题的标准形式为

求 $\min S = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \cdots + C_n X_n$

满足

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n = b_m \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \dots, X_n \geq 0 \end{cases}$$

或者

$$\text{求 } \min S = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{满足 } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_j & (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n) \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

其中 $b_j \geq 0$

如果给出的线性规划模型不是标准形式，则可以按下述方法将它化为标准形式。

1. 若目标函数是 $\max S = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$

可令 $S' = -S$ ，目标函数 $\min S' = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \dots - c_n x_n$

2. 若问题中有 $b_i < 0$ ，可对等式（或不等式）两端乘 -1 。

3. 若约束条件某个式子是“ $\leq$ ”的不等式，可在左边加上一个非负变量（称松弛变量），将其转化为等式。

例如： $a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \dots + a_{kn} x_n \leq b_k$

加入松弛变量 $x_{n+k} \geq 0$ ，改为

$$a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \dots + a_{kn} x_n + x_{n+k} = b_k$$

若约束条件某个式子是“ $\geq$ ”的不等式，可在左边减去一个非负变量，将其转化为等式。

4. 若有一个变量 x_k 没有非负约束，可令 $x_k = x'_k - x''_k$ 其中 $x'_k \geq 0$ ， $x''_k \geq 0$ ，代入约束条件中，化为对全部变量都有非负限制。

例 1 化下面线性规划为标准形式

$$\max S = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 10 \\ 2X_1 - X_2 \geq 2 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

解：令 $S' = -S = -4X_1 - 3X_2$ ，则求目标函数 S 最大值的问题就可转化为求目标函数 S' 的最小值问题。

对于约束条件 $X_1 + X_2 \leq 10$ ，我们可以在不等式左端加上一个非负变量 X_3 ，使其化为等式：

$$X_1 + X_2 + X_3 = 10$$

类似地，约束条件 $2X_1 - X_2 \geq 2$ ，可以在不等式左端减去另一个非负变量 X_4 ，使其化为等式：

$$2X_1 - X_2 - X_4 = 2$$

于是，原线性规划的标准形式为：

$$\begin{aligned} \min S' &= -S = -4X_1 - 3X_2 \\ \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 10 \\ 2X_1 - X_2 - X_4 = 2 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

例2 化下面线性规划为标准形式

$$\begin{aligned} \max S &= -X_1 + 2X_2 \\ \begin{cases} 3X_1 - 8X_2 \leq 5 \\ X_1 - 3X_2 \geq 4 \\ X_1 \geq 0, X_2 \text{ 无非负限制} \end{cases} \end{aligned}$$

解：由于 X_2 无非负限制，可引入非负变量 $X_3 \geq 0, X_4 \geq 0$ ，并且令 $X_2 = X_3 - X_4$ ，将其代入目标函数和约束条件。引入松弛变量

$x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$ 将约束条件第一、二个不等式化为等式。于是原线性规划化为标准形式:

$$\min S' = -S = x_1 - 2x_3 + 2x_4$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 8x_3 + 8x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 - 3x_3 + 3x_4 - x_6 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

习 题 一

1. 写出下列问题的数学形式:

(1) 有两个煤厂 A、B, 每月分别进煤不少于 60 吨、100 吨, 它们担负供应三个居民区用煤任务, 这三个居民区每月需用煤分别为 45 吨、75 吨、40 吨, A 厂离这三居民区分别为 10 公里、5 公里、6 公里, B 厂离这三居民区分别为 4 公里、8 公里、15 公里, 问这两煤厂如何分配供煤, 才使运输量最少。

(2) 某工厂生产 A, B, C, 三种产品, 需要甲、乙两种设备, 设备甲每天生产产品 A 为 6 吨, 产品 B 为 2 吨, 产品 C 为 4 吨, 设备乙每天生产产品 A 2 吨, 产品 B 2 吨, 产品 C 12 吨。设备甲, 乙每天每台的运转费用分别为 200 元, 160 元, 产品 A, B, C 每天产量不小于 12 吨, 8 吨, 24 吨, 两种设备各配备几台, 才能使运转费用最低。

(3) 某木器厂生产圆桌和衣柜两种产品, 现有两种木料, 第一种有 72 立方米, 第二种有 56 立方米, 假设生产每种产品都需用两种木料, 生产一只圆桌和一个衣柜所需木料如下表所示。每生产一只

圆桌可获利润6元，生产一个衣柜可获利润10元，木品厂在现有木料条件下，圆桌和衣柜应各生产多少，才使获得利润最高。

产 品	木料（单位：立方米）	
	第 一 种	第 二 种
圆 桌	0.18	0.03
衣 柜	0.09	0.28

（4）某班有男同学30人，女同学20人，星期天准备去植树，根据经验，男同学一天平均每人挖坑20个，或栽培树30棵，或给25棵树浇水，女同学一天平均每人挖坑10个，或栽树20棵，或给15棵树浇水，问应怎样安排，才能使植树（包括挖坑、栽树、浇水）最多。

（5）某养鸡场养鸡一万只，用大豆和谷物两种饲料混合喂养。每天每只鸡平均吃混合饲料1斤，其中至少应有0.22斤的蛋白质和0.06斤钙。已知每一斤大豆中含50%的蛋白质和0.2%的钙，价格是0.2元，每一斤的谷物中含10%的蛋白质和0.1%的钙，价格是0.1元，问应如何混合饲料，才能使成本最低？

（6）某商店要制订明年第一季度某种商品的进货和销货计划，已知该店的仓库容量最多可储存该种商品500件，而今年年底有200件存货，该店在每月月初进货一次，已知各个月份~~和~~销售该种商品的单价如表所示：

月 份	一	二	三
买进单价	8	6	9
销售单价	9	8	10

2. 把下面线性规划数学模型化为标准形式

$$(1) \quad \min S = 2X_1 + 3X_2 + 5X_3$$

$$\text{满足} \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 \geq -5 \\ -6X_1 + 7X_2 - 9X_3 = 15 \\ 19X_1 - 7X_2 + 5X_3 \leq 13 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \max S = -X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

$$\text{满足} \begin{cases} X_1 - X_2 \geq -2 \\ X_1 + 2X_2 + X_3 = 6 \\ 4X_1 + 5X_2 - X_3 \leq 8 \\ X_1, X_3 \geq 0, X_2 \text{ 无符号限制} \end{cases}$$

第二章 线性规划的图解法和消去法

§ 2.1 两个变量的线性规划问题的图解法

例 1 用图解法求解线性规划问题

$$\max S = 2X_1 + 5X_2$$

$$\begin{cases} X_1 \leq 4 \\ X_2 \leq 3 \\ X_1 + 2X_2 \leq 8 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

解：我们把 x_1, x_2 看成平面直角坐标系中某个点的坐标，那么满足约束条件中每一个不等式的点集就是一个半平面。因为约束条件由5个不等式所组成，所以满足约束条件的点集是五个半平面的相交部分，即图2—1中凸多边形OABCD上任何一点的坐标，都同时满足约束条件中的五个不等式，凸多边形外任何一点的坐标都不能同时满足这五个不等式。我们把满足约束条件的一组变量的值，称为线性规划的一个可行解。所以凸多边形OABCD上的每个点的坐标都是这个线规划问题的一个可行解。凸多边形OABCD称为这一线性规划问题的可行解区域。

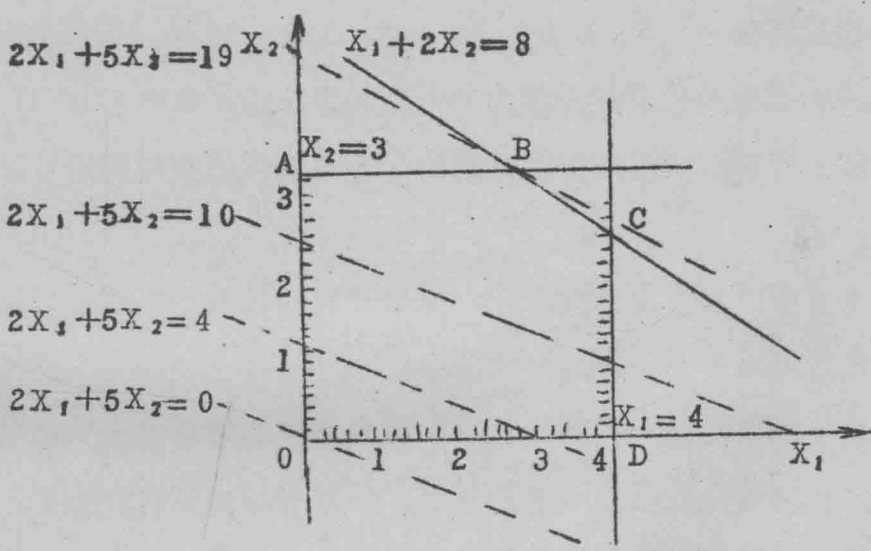


图2—1

为了求出此线性规划问题的最优解，即使目标函数 S 达到最优值的可行解。我们将 S 看作参数，则 $S = 2x_1 + 5x_2$ 表示坐标平面上的一族平行直线。例如：令 $S = 0$ ，则 $2x_1 + 5x_2 = 0$ 表示过原点 O 的一条直线。在这条直线上的任意一点的坐标都使目标函数值为零。我

们将这样的直线称为等值线（或等高线）。

再令 S 分别取 4, 10, 19 等, 作平行直线族, 由图 2-1 可以看出, 当 S 取值越大, 对应的等值线离原点越远。因此, 求这一线性规划问题的最优解, 只要在等值线中找到既与可行解区域有公共点, 又尽可能与原点距离远的那一条就可以了。从图 2-1 显然可见, 经过 B 点的那条等值线符合要求。即 B 点坐标既满足约束条件, 且使目标函数取得最大值。

解:
$$\begin{cases} x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

得最优解为 $x_1 = 2, x_2 = 3$

对应的目标函数的最大值为 $S = 2 \times 2 + 5 \times 3 = 19$

由例 1 可知, 利用图解法求解两个变量的线性规划问题可按以下步骤进行:

(1) 在平面直角坐标系中, 求出可行解区域。可行解区域是各约束条件所表示的半平面的公共部分;

(2) 求最优解: 将目标函数中的 S 看做参数等值线, 选取一条等值线, 使它与可行解区域有公共点, 并取得最大值或最小值。

例 2 用图解法求解线性规划问题:

$$\max S = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$