成人高等教育财经专业精品教材系列

线性代数

陈晓兰 郝秀梅 主编

Linear Algebra

△ ◇ ◎ ○ △ ◇ ◎ ○ △ ◇

◇ ◎ ○ △ ◇ ◎ ○ △ ◇ ◎

▽ ◇ ◎ ○ ▽ ◇ ◎ ○ ▽ ◇

◇ ◎ ○ △ ◇ ◎ ○ △ ◇ ◎

经济科学出版社
Economic Science Press

成人高等教育财经专业精品教材系列

线性代数

Linear Algebra

陈晓兰 郝秀梅 主编

郭洪峰 副主编

经济科学出版社
Economic Science Press

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/陈晓兰，郝秀梅主编．—北京：经济科学出版社，2015.12

成人高等教育财经专业精品教材系列

ISBN 978 -7 -5141 -6522 -7

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①陈…②郝…　Ⅲ.①线性代数－成人高等教育－教材　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第011659号

责任编辑：柳　敏　李晓杰
责任校对：靳玉环
责任印制：李　鹏

线性代数

陈晓兰　郝秀梅　主　编
郭洪峰　副主编
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲28号　邮编：100142
总编部电话：010－88191217　发行部电话：010－88191522
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
天猫网店：经济科学出版社旗舰店
网址：http://jjkxcbs.tmall.com
固安华明印业有限公司印装
710×1000　16开　14.75印张　270000字
2016年1月第1版　2016年1月第1次印刷
印数：0001—5000册
ISBN 978 -7 -5141 -6522 -7　定价：32.00元
（图书出现印装问题，本社负责调换。电话：010－88191502）

前　　言

在“十二五”即将结束、“十三五”面临开局之际，为适应国家提升高校教学水平和创新能力、大力发展继续教育、推动普通高校继续教育改革发展的要求，山东财经大学在原有山东省成人高等教育品牌专业特色课程系列教材的基础上，组织编写了这一新的成人高等教育财经专业精品教材系列。

该系列教材立足大众创业、万众创新，建设创新型国家的经济社会发展需要，紧扣财经类专业课程设置和教学大纲，科学、系统地涵盖了专业教学的基本内容，其中主要包括专业基础课和专业主干课程教材。这些教材适用于经济、管理学科，尤其是经济学、会计学、金融学等专业成人教育的教学，对指导和帮助学生获取本专业的基础理论和专业知识具有较强的针对性。

该系列教材的编写依托雄厚的学科专业实力和师资资源，主编、副主编及参编人员均为长期从事高校继续教育教学、科研和管理的专家、教授及一线教学骨干，教材在内容的设计方面较好地体现了实践性、应用性和对策性等特点，同时，该系列教材注重创新，力求把最新的理论发展、专业知识和政策信息纳入其中，内容上融入了编撰者多年来从事专业理论教学研究的优秀成果，其中不乏许多获省部级以上奖励的成果，从而较好地实现了教材系统性和科学性、创新性和实践性的有机结合。该系列教材在使用范围和地域上，具有广泛的适应性。

《线性代数》是成人高等教育财经专业精品系列教材之一。随着社会的进步、科学技术的发展和高等教育水平的不断提高，数学已经渗透到经济、信息、人文社科等各个领域。人们越来越深刻地意识到过去对于数学认识上的不足，也越来越深刻地认识到数学教育在高等教育中的重要性。数学不仅仅是基础、是工具，更为重要的，数学是一种语言——可以说是一种宇宙的语言，她简洁明了地描绘了事物的本质；数学是一种文化——是人类精神愉悦的一种境界；数学是一种思维——一种创造性的思维。数学教育是培养大学生理性思维品质和思辨能力的重要载体，是开发大学生潜在能动性和创造力的重要基础。因此，大学数学类课程不仅是理工类学生的必修课程，而且已经成为财经类专业教学计划中重要的基础

课程。正是针对高等财经类院校的特点，在多年教学实践的基础上，我们组织编写了本部《线性代数》教材。

在本书的编写过程中，我们特别强调了以下几个方面：

第一，突出线性代数的基本思想和基本方法。

突出基本思想和基本方法的目的在于让学生在学习过程中较好地了解各部分内容的内在联系，在总体上把握线性代数的思想方法；有助于学生掌握基本概念，理顺概念之间的联系，提高学习效果。对于本教材的一些理论性很强的内容，我们着重分析基本概念、基本思想和基本方法，不过分强调严格的数学证明，而更多的是让学生体会线性代数的本质和线性代数的价值。叙述上尽可能详尽而又突出重点，力求通俗易懂、深入浅出。在内容的安排和概念的引入等方面既保证课程体系的科学性和完整性，又尽可能联系直观背景。

第二，教材内容的编排更强化基本能力培养，更适合大家的思维习惯。

本书的例题、习题较多，每章不仅编排了（A）、（B）两组习题，还增加了各章自测题，其用意就是让学生在掌握基本概念的基础上，熟悉运算过程，精通解题技巧，提高解决问题的能力。本书注重在内容的编排上循序渐进，使读者由感性到理性有一个渐进的过程。尽管《线性代数》作为大学数学的经典内容之一，结构和内容都已经非常完善和成熟，但是，我们还是在内容的编排和衔接等细微之处，注重且顺应了人们从具体到抽象的思维习惯，增加了教材的可读性和便于读者自学的特点。

第三，编写了利用计算机解决数学问题的内容。

为了让学生更集中精力了解和熟悉运算规则，掌握基本概念和基本方法，本书的例题和习题涉及的矩阵和行列式的阶数都较低，数字也比较简单，尽管如此，运算量也是比较大的。为此，本书增加了数学软件及其应用部分的内容，旨在使读者初步了解 Mathematica 软件，并会利用它进行线性代数中的一些基本运算，本部分可作为选学内容，并不会影响本教材的系统性和完整性。

另外，为了便于读者对所学内容的巩固和自测，本书在每一章的习题中增加了客观性题目，包括填空题、单项选择题和判断题。

本书应讲授除带星号（*）以外的所有章节，个别定理、性质的证明，可视面授时间作适当删节。

本教材既可作为成人继续教育、高职高专的教学用书，也可作为参加高等教育自学考试的教学和自学参考用书。

本教材主要由山东财经大学以下人员分工撰写：马玉林教授撰写第1章，脱秋菊副教授撰写2.1节、2.2节、2.3节，王继强副教授撰写2.4节、2.5节、

2.6节，刘纪芹教授撰写第3章，郝秀梅教授撰写第4章，陈晓兰教授撰写5.1节、5.2节、5.3节，刘太琳教授撰写5.4节，韩建新教授撰写第6章，本教材由陈晓兰教授提出总体编写框架、统稿及审定，郭洪峰教授撰写2.7节及综合自测题设计、负责全书习题校对并协助统稿审阅。

在本书的编写过程中，我们参阅、借鉴了大量文献资料，并得到有关部门和有关专家、学者的指导与帮助，在此表示诚挚的谢意。特别感谢山东财经大学继续教育学院和经济科学出版社的大力支持。

限于编者的学识，书中不当以致谬误之处，恐在所难免，诚请同行专家及读者不吝指教。

编　者

2015年9月

目　　录

第 1 章　行列式 …… 1

1.1　n 阶行列式 …… 1
1.2　行列式的基本性质 …… 7
1.3　行列式按行（或列）展开 …… 12
1.4　行列式计算举例 …… 15
1.5　克莱姆法则 …… 18
数学家简介 …… 25
习题 1 …… 25
第 1 章自测题 …… 30

第 2 章　矩阵 …… 35

2.1　矩阵的概念 …… 35
2.2　矩阵的运算 …… 38
2.3　几种特殊的矩阵 …… 45
2.4　逆矩阵 …… 47
2.5　矩阵的初等变换 …… 53
2.6　矩阵的秩 …… 59
2.7　分块矩阵 …… 63
数学家简介 …… 67
习题 2 …… 68
第 2 章自测题 …… 73

第 3 章　n 维向量 …… 78

3.1　n 维向量及其运算 …… 78

3.2 向量间的线性关系 …… 83
3.3 向量组的秩 …… 93
数学家简介 …… 101
习题 3 …… 102
第 3 章自测题 …… 105

第 4 章 线性方程组 …… 108

4.1 线性方程组的初等变换 …… 108
4.2 线性方程组有无解的判定 …… 111
4.3 齐次线性方程组 …… 119
4.4 线性方程组解的结构 …… 122
数学家简介 …… 130
习题 4 …… 131
第 4 章自测题 …… 135

第 5 章 矩阵的特征值与特征向量 …… 140

5.1 矩阵的特征值与特征向量 …… 141
5.2 相似矩阵 …… 149
5.3 实对称矩阵的对角化 …… 160
5.4 实二次型 …… 170
数学家简介 …… 183
习题 5 …… 183
第 5 章自测题 …… 186

第 6 章 数学软件及其应用 …… 191

6.1 Mathematica 简介 …… 191
6.2 线性代数基本问题的软件实现 …… 195

习题参考答案 …… 202
自测题参考答案 …… 211
综合自测题 …… 218
综合自测题参考答案 …… 223
参考书目 …… 225

第1章　行　列　式

主要内容

本章通过求解二元、三元线性方程组引入二阶、三阶行列式，进而给出 n 阶行列式的定义；详细讨论了行列式的性质、行列式按行（列）展开定理及异乘变零定理，介绍了运用性质计算行列式的解法技巧；最后介绍了运用行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

重点难点

行列式的性质与行列式的计算，利用克莱姆法则求解 n 元线性方程组以及齐次线性方程组解的问题.

在自然科学、工程技术和管理科学中，有许多问题往往归结为线性方程组的求解问题. 行列式的概念是在寻求线性方程组的求解方法的过程中发展起来的，是求解线性方程组的一种重要工具. 17 世纪晚期，由日本数学家关孝和与德国数学家莱布尼茨各自独立提出，18 世纪开始，行列式开始作为独立的数学概念被研究，19 世纪以后，行列式理论进一步得到发展和完善. 另外，行列式还是本教材后续章节研究矩阵及向量组的线性相关性等的一种重要工具.

1.1　n 阶行列式

1.1.1　二阶行列式

考虑含有两个未知量 x_1、x_2 的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

利用加减消元法可得：

$$\begin{cases}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}\\(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}\end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，该方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

从上述两个解的形式可以看出，分子、分母都由方程组中的四个系数两两相乘再相减得到。为了便于记忆，我们引入二阶行列式定义：

称符号 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ 为**二阶行列式**．它表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，其中数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 叫做**行列式的元素**，横排叫做**行**，竖排叫做**列**．元素 a_{ij} 的第一个下标 i 表明该元素在第 i 行，第二个下标 j 表明该元素在第 j 列．在行列式里，把从左上角 a_{11} 处到右下角 a_{22} 处的对角线叫做**主对角线**，把从右上角 a_{12} 处到左下角 a_{21} 处的对角线叫做**次对角线**．因此，二阶行列式的值等于主对角线上两个元素的乘积减去次对角线上两个元素的乘积．这就是二阶行列式的计算法则．二阶行列式的计算也可用图 1－1 所示"**对角线法则**"来记忆：

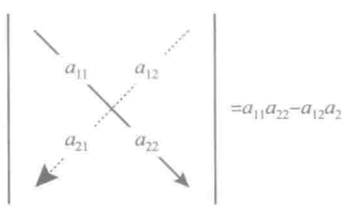

图 1－1

例 1.1.1 $D=\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix}=1\times4-2\times3=-2.$

利用二阶行列式的定义，式（1.2）可以表示为：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D} \tag{1.3}$$

其中 $D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\b_2 & a_{22}\end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\a_{21} & b_2\end{vmatrix}$.

当 $D\neq0$ 时，式（1.3）即为二元一次线性方程组的唯一解.

例 1.1.2 解二元线性方程组：

$$\begin{cases}2x_1-3x_2=4\\x_1+2x_2=9\end{cases}$$

解 由于 $D=\begin{vmatrix}2&-3\\1&2\end{vmatrix}=2\times2-(-3)\times1=7\neq0$，方程组有唯一解.

$$D_1=\begin{vmatrix}4&-3\\9&2\end{vmatrix}=4\times2-(-3)\times9=35,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&4\\1&9\end{vmatrix}=2\times9-4\times1=14.$$

因此，可得方程组的唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{35}{7}=5,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{14}{7}=2.$$

1.1.2 三阶行列式

对于含有三个未知量 x_1，x_2，x_3 的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1.4}$$

可以进行类似二元线性方程组的讨论，为此引入三阶行列式定义，我们称符号

$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$ 为**三阶行列式**，它表示代数和

$$\begin{aligned}&a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}\\&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}\tag{1.5}$$

其中，行列式的横排、纵排分别成为它的行和列，a_{ij} 称为行列式的元素（i，$j=1$，2，3）. 显然，三阶行列式的行数和列数相等，都是 3，并且共含有 3^2 即 9 个元素.

由上述定义可知，三阶行列式表示 6 项的代数和，每一项均为不同行不同列的三个元素之积再赋之以正负号，其规律性也可利用图 1－2 中的“对角线法则”来表示. 图中沿各实线相连的三个元素的积取正号；沿各虚线相连的三个元素的

积取负号. 它们的代数和就是式(1.5)所表示的三阶行列式.

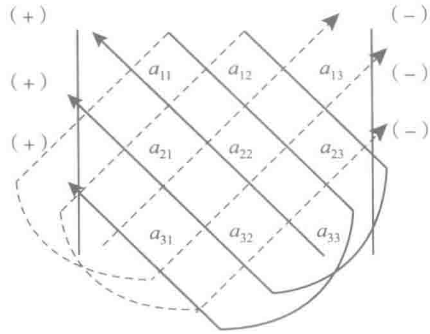

图 1−2

例 1.1.3 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\times2\times2+(-1)\times1\times3+0\times0\times(-1)-(-1)\times2\times(-1)-0\times1\times2-1\times0\times3=-1.$

例 1.1.4 当 x 取何值时, $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}=0$.

解 原方程可化为 $D=2x^2-4x=0$, 解之得, $x=0$ 或 $x=2$.

利用加减消元法可求得方程组(1.4)的解, 其结果同样可用三阶行列式表示:

当 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq0$ 时, 方程组(1.4)有唯一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}, \tag{1.6}$$

其中, $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

一般称 D 为方程组（1.4）的系数行列式．而 D_1 则是把 D 的第一列元素依次换成了常数项 b_1、b_2、b_3，同时其它各列保持不变所构成的三阶行列式，D_2，D_3 也有类似的特点．

比较二元线性方程组和三元线性方程组的求解式（1.3）和式（1.6），我们可以发现二者类似．在以后的学习中，我们将二、三元线性方程组求解的结论推广到 n 元线性方程组的情况，也可以得到类似的结论，即克莱姆法则．

1.1.3 n 阶行列式

我们已经讨论了二、三阶的行列式．为了统一起见，定义 $|a_{11}| = a_{11}$，并称其为一阶行列式（注意：这里不是绝对值）．在此基础上，下面来定义 n 阶行列式．

定义 1.1.1 假定 $n-1$ 阶行列式已定义，则定义 n 阶行列式为

$$D = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

其中，右端第一个行列式为将 a_{11} 所在的行和列划去后剩下元素所构成的 $n-1$ 阶行列式，第二个行列式为将 a_{12} 所在的行和列划去后剩下元素所构成的 $n-1$ 阶行列式，…，第 n 个行列式是将 a_{1n} 所在的行和列划去后，剩下元素所构成的 $n-1$ 阶行列式，并且各 $n-1$ 阶行列式前所取符号由 $(-1)^{1+j}$，$(j=1, 2, \cdots, n)$ 决定，即各 $n-1$ 阶行列式前符号为正负相间．

当 $n=2$，3 时，就得到二、三阶行列式，且与前面的定义相同．

这样，我们给出了任意阶行列式的定义．与二、三阶行列式类似，行列式 D

中的数 a_{ij} 称为元素，将元素 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn} 所在的斜线称为 D 的**主对角线**，又把 $a_{1,n}$，$a_{2,n-1}$，…，$a_{n,1}$ 所在的斜线称为 D 的**次对角线**.

注意：用数学归纳法可以证明 n 阶（$n>1$）行列式 D 展开后共有 $n!$ 项，其中一半为正，一半为负，且每项都是 n 个不同元素的乘积，这 n 个元素位于 D 中不同的行和不同的列.

例 1.1.5 求 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

解 由行列式定义，有

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0\times(-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=1\times4+0+(-1)\times5=-1.$$

例 1.1.6 主对角线上方的元素全为零的行列式称为**下三角形行列式**，试求下三角行列式的值.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 根据行列式定义，有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

即下三角形行列式的值等于其主对角线上所有元素的乘积.

特别地，主对角线两侧元素均为零的行列式叫做对角形行列式，易得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

读者可自行证明.

1.2 行列式的基本性质

利用行列式的定义，但可以计算任意行列式的值. n 阶行列式共有 $n!$ 项，计算它需要做 $n!$ 个乘法. 当 n 的值比较大时，计算量是相当大的，直接用定义来计算是一个相当麻烦的问题，因此本节中我们将进一步研究行列式的一些性质，利用这些性质来简化行列式的计算.

1.2.1 行列式的性质

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为 D 的**转置行列式**，记作 D^T（或 D'），即，若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则 $D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

性质 1.2.1 行列式与它的转置行列式相等. 即 $D=D^T$.

易证，对任何行列式 D，均有 $(D^T)^T=D$.

性质 1.2.1 说明，在行列式中行和列的地位是相同的或对称的，所以行列式有关行的性质对列也同样成立，反之亦然.

例 1.2.1 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=-3$，$D^T=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=-3$.

例 1.2.2 以下行列式称为**上三角形行列式**，证明

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 由性质 1.2.1，有

$$D=D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

性质 1.2.2 交换行列式两行（列），行列式变号.

例如 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2$，$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2$.

推论 若行列式中有两行（列）相同，则行列式的值等于零.

证 设 D 中有两行相同，则交换这两行后得行列式 D_1 仍为 D，即 $D=D_1$. 又由性质 1.2.2 有 $D_1=-D$，因此 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 1.2.3 行列式中某一行（列）的元素同乘 k，等于数 k 乘该行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

该性质也可表述为行列式某行（列）的公因子可以提取到行列式外.

例如 $\begin{vmatrix} -15 & 30 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=15\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=15\times(-7)=-105.$

推论 1 若行列式中有一行（列）的元素全为零，则该行列式的值为零.

证 设行列式 D 的第 i 行元素全为零，则从这一行中提出公因子零，由性质 1.2.3 得 $D=0\cdot D=0$.

推论 2 若行列式中有两行的对应元素成比例，则该行列式为零.

性质 1.2.4 若行列式的某一行（列）中所有元素都是两项之和，则该行列式可以表示为两个行列式相加，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例 1.2.3 $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 202 & -99 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 200+2 & -100+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 200 & -100 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$=100\times\begin{vmatrix}4&2\\2&-1\end{vmatrix}+0=-800.$$

例 1.2.4 计算下列行列式:

$$D=\begin{vmatrix}1&3&302\\-4&3&297\\2&2&203\end{vmatrix}.$$

解 由性质 1.2.3 的推论和性质 1.2.4，有

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}1&3&302\\-4&3&297\\2&2&203\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&300+2\\-4&3&300-3\\2&2&200+3\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}1&3&300\\-4&3&300\\2&2&200\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&3&2\\-4&3&-3\\2&2&3\end{vmatrix}=0+5=5.\end{aligned}$$

性质 1.2.5 行列式某一行（列）的所有元素同乘数 k 加到另一行（列）的相应元素上，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{j1}+ka_{i1}&a_{j2}+ka_{i2}&\cdots&a_{jn}+ka_{i2}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

1.2.2 利用行列式性质计算行列式

由例 1.1.6 和例 1.2.2 可以看出，上、下三角形行列式的计算非常容易，因此，利用行列式的性质，把原行列式化为上（下）三角形行列式或对角形行列式，再求出行列式的值，是计算行列式的基本方法之一.

化为上三角形行列式的步骤是:

如果第一列的第一个元素为零，先将第一行与其它行交换，使得第一列第一个元素不为零；然后把第一行乘适当的数加到其它各行，使得第一列除第一个元素外其它元素都为零；再用同样的方法处理除去第一行和第一列后余下的低一阶的行列式，如此继续下去，直至使它成为上三角形行列式，这时主对角线上元素的乘积就是所求行列式的值.