

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教辅

量子力学习题精解

(第二版)

张鹏飞 吴 强 柳盛典 编著



科学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教辅

量子力学习题精解

(第二版)

张鹏飞 吴 强 柳盛典 编著



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书与科学出版社 2015 年出版的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《量子力学》(第 3 版, 张永德著)配套, 涵盖教材中全部习题的解答, 内容包括量子力学物理基础、算符公设与 Schrödinger 方程公设的讨论、一维问题、中心场束缚态问题、量子力学的表象与表示、对称性分析及应用、电子自旋角动量、定态微扰论、电磁作用分析和重要应用、势散射理论、含时问题与量子跃迁、量子态描述与操控。我们力求解答详尽, 叙述清晰, 同时注重启发, 激发学生学习主动性, 积极引导学生活学活用, 引导学生思考以深入发掘物理内涵。

本书适合作为量子力学课程的学习辅导书或者教学参考书, 并可供教师及研究人员教学科研参考。

图书在版编目(CIP)数据

量子力学习题精解/张鹏飞, 吴强, 柳盛典编著. —2 版. —北京: 科学出版社, 2016

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教辅

ISBN 978-7-03-048830-5

I. ①量… II. ①张… ②吴… ③柳… III. ①量子力学-高等学校-题解
IV. ①O413.1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 134169 号

责任编辑: 昌盛 罗吉 陈曰德 / 责任校对: 张凤琴
责任印制: 白洋 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

保定市中国画美凯印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003 年 8 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2016 年 6 月第 二 版 印张: 24 1/4

2016 年 6 月第五次印刷 字数: 489 000

定价: 60.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

趁科学出版社计划出版《量子力学》第三版,我除了对原书进行全面修改外,同时也请张鹏飞博士对配套的《量子力学习题精解》(以下简称《精解》)进行修改,以便出版《精解》第二版。征得《精解》原作者吴强、柳盛典两位教授同意,受科学出版社支持,以及吴盛俊教授的帮助,现在修订完成了《精解》(第二版)。修订过程中,《精解》作者和我就《量子力学》中部分题目进行了一些讨论。新版《精解》在充分保留原有精彩解答和精华的基础上,对解答和叙述做了全面改写和补充,《精解》原有的插图也全部重新绘制。新版书包括了对新增习题的解答,对陆续发现的原先版本的不足之处也做了改进。

新版的《精解》在参考了国内外一些相关的优秀论著,充分吸收它们精华之后,作者结合自己的体会,对一些题的物理实质和内涵作了更多的剖析和发掘,解答更为详尽。对于部分典型题,给出了不止一种解答,或是进一步讨论说明,或是提供相关的背景材料。这些都使这本新版《精解》内容更为丰富。与第一版相比,尽管习题数量只增加 20 余道(总计为 278 题),但总篇幅却增加了大约一倍。

我们真诚希望本书能够对教师和学生有所助益,发挥应有作用。真诚希望初次接触量子力学的同学们能够正确使用此书。这里把我主编的《物理大题典》(科学出版社,2005 年)前言中的一段话录在下面:

.....

这里要强调指出,对于学生,确实有一个如何正确使用习题集的问题,有的同学,有习题集也不参考,咬牙硬顶,一个晚上自习时间只做了两道题,这种精神诚应嘉勉,但效率不高,也容易挫伤学习积极性,不利于培养学习兴趣;也有的同学,逮到合适解答提笔就抄,这样做是浮躁的、不踏实的。这两种学习方法都不可取。我们认为,正确使用习题集是一个“三步曲”过程:遇到一道题,先自己想一想,想出来了自己做最好;如果认真想了一些时间还想不出来,就不要老想了,不妨翻开习题集找答案,看懂之后,合上书自己把题目做出来;最后一步,要是参考习题集做出来的,就用一两分钟时间分析解剖一下,找找自己存在的不足,今后注意。如此“三步曲”下来,就既有效率又踏实了,本来,效率和踏实是一对矛盾,在这类“治学小道”之下,它俩就统一起来了,总之,正确使用之下的习题集肯定能够成为学生们有用的“爬山”工具。

虽然我们希望做到最好并且也尽了力,但限于我们的水平,估计本书不当之处在所难免。我们敬请同行专家和读者热心指正。

张永德

中国科学技术大学

2015 年 9 月 25 日

第一版前言

物理习题是锻炼物理思维的体操。做物理习题是学习物理课程中必要而又重要的环节。通过做习题，可以巩固、丰富已经掌握的东西，发现一些你还不理解或懂得不够的地方，或是某些问题的某些侧面；它有助于深化对基本概念、基本原理的理解，使学到的知识更加融会贯通；它能进一步锻炼处理问题的技巧，提高运用所学知识的能力；此外，它还有助于进一步拓宽知识面等。所以许多著名物理学家都十分重视习题，要求勤奋地做习题，多做习题，将它看成学习是否踏实的一种标志。一般地说，在四大力学的学习中，量子力学的学习有一种特殊的困难，这不仅在于量子力学中基本概念、基本原理和初学者的日常宏观观念差距很大，不容易理解，也在于量子力学的方法有时很新颖，其中包含不少物理和数学新技巧。于是，这种情况常常会造成：学生听课还都能懂，但做起题来有时却是“老虎啃天——无从下嘴”。这说明在学习量子力学中，做习题和上习题课的重要性，要求教师和学生必须更加重视做习题和上习题课这个环节。

在我写的《量子力学》中，吸收了美国一些著名大学研究生入学考试材料，参照书中内容也部分地拟定了一些，同时又参考了以往国内教学积累，一共编集了251道习题。出书后，一些老师提出，为教学方便，希望出版一本相应的习题解答。与此同时，科学出版社鄢德平先生也这样建议。于是我们便产生了针对那本《量子力学》的习题编写一本题解的想法。

这本题解是供同行老师们在教学中参考用的，它也适合于研究生作为复习量子力学之用。对于正在学习量子力学的本科同学，如能正确使用，它也很有益处。这里，我们向使用本书的本科生郑重建议：做习题时，千万不要不经思索就抄这本题解中的答案，应当有个小小的三部曲：第一，看到题目之后一定要思考几分钟，但也不必苦苦思索很长时间；第二，如仍不得要领，径直去看题解；第三，做完这道题后，反思几分钟，对自己做个分析和小结。这样，学习既踏实了，也有了高效率。本来，在看书、做题，以至阅读文献中，踏实和速度（效率）是一对矛盾。采用此类（以及其他合适的）方法是能够将两者统一起来的。这些无非是想说明：讲究学习方法（广义而言，讲究治学之道）至关重要。

成书期间，我的几位研究生：赵梅生、杨洁、赵博、张强承担了几乎全部求解任务和大部分计算机输入任务。烟台师范学院王立志同学也做了部分输入工作。经过吴强和柳盛典两位教授辛勤审校、修改和补充，终于完成了全书。为了尽力保证质量，审改补充工作是彼此交换、反复进行的；其中第十二章曾由我另一位学生郁

司夏博士协助审校；陈增兵教授也参加过题解的讨论；我则断断续续地参加了求解和讨论的全过程。

由于成书时间短促和我们见识所限，书中错误或不当之处在所难免，敬请同行专家和使用者们热心指正。我们真诚希望这本题解能有助于教学和学习，得到大家的认可。

张永德

中国科学技术大学

2002 年 11 月 15 日

目 录

前言

第一版前言

第 1 章 量子力学的物理基础	1
第 2 章 算符公设与 Schrödinger 方程公设的讨论	18
第 3 章 一维问题	55
第 4 章 中心场束缚态问题	92
第 5 章 量子力学的表象与表示	132
第 6 章 对称性分析及应用	161
第 7 章 电子自旋角动量	178
第 8 章 定态微扰论	219
第 9 章 电磁作用分析和重要应用	264
第 10 章 势散射理论	295
第 11 章 含时问题与量子跃迁	328
第 12 章 量子信息论的物理基础	352
附录 几个积分和级数公式	374
后记	379

第 1 章 量子力学的物理基础

题 1.1 在宏观世界里, 量子现象常常可以忽略. 对此就下列诸情况, 在数值上加证明:

- (1) 长 $l = 1\text{m}$, 质量 $m = 1\text{kg}$ 的单摆的零点振荡的振幅;
- (2) 质量 $m = 5\text{g}$, 以速度 10cm/s 向一刚性障碍物 (高 5cm , 宽 1cm) 运动的子弹的透射率;
- (3) 质量 $m = 0.1\text{kg}$, 以速度 0.5m/s 运动的钢球被尺寸为 $1 \times 1.5\text{m}^2$ 的窗子所衍射.

解答 (1) 单摆的小幅摆动为简谐振动, 其频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

谐振子的零点能为 $E = \frac{\hbar\omega}{2}$. 设单摆作零点振荡, 其振幅为 A . 当单摆振荡位移达到振幅对应的位置时, 势能达到最大等于振荡能量, 则

$$\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

这给出

$$A = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m}} \sqrt{\frac{l}{g}} = 0.58 \times 10^{-17}\text{m}$$

可见宏观振子的零点振荡实际上是不可能观测到的 (零点振荡的振幅也可通过波函数来计算).

(2) 如果把障碍物的宽度看成是势垒的厚度 a , 把子弹透射看成是越过障碍物所设置的重力势垒, 则透射概率 (公式参见第 3 章)

$$T \approx \exp \left\{ -\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)} \right\}$$

这里 $V_0 = mgH$, $E = mv^2/2$, 则

$$\begin{aligned} T &\approx \exp \left\{ -\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m \left(mgH - \frac{mv^2}{2} \right)} \right\} = \exp \left\{ -\frac{2ma}{\hbar} \sqrt{2gH - v^2} \right\} \\ &\approx \exp \left\{ -\frac{2 \times 5 \times 10^{-3} \times 10^{-2}}{1.054571726(47) \times 10^{-34}} \sqrt{2 \times 9.8 \times 5 \times 10^{-2} - 0.1^2} \right\} \\ &\approx e^{-9 \times 10^{31}} \end{aligned}$$

可见透射概率可以忽略.

(3) 入射钢球的 de Broglie 波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \approx 1.3 \times 10^{-30} \text{ cm}$$

方形窗的水平和垂直方向的衍射角分别为

$$\theta_h \approx \frac{\lambda}{D} \approx 1.3 \times 10^{-30} \text{ rad}$$

$$\theta_l \approx \frac{\lambda}{L} \approx 0.9 \times 10^{-30} \text{ rad}$$

可见衍射可以忽略.

题 1.2 用 $\hbar$, e , c , m_e (电子质量), m_p (质子质量) 凑出下列每个量, 给出粗略的数值估计:

- | | |
|-------------------------------|--------------------------|
| (1) Bohr 半径 (cm); | (2) 氢原子结合能 (eV); |
| (3) Bohr 磁子; | (4) 电子的 Compton 波长 (cm); |
| (5) 经典电子半径 (cm); | (6) 电子静止能量 (MeV); |
| (7) 质子静止能量 (MeV); | (8) 精细结构常数 α ; |
| (9) 典型的氢原子精细结构分裂 ΔE . | |

解答 (1) Bohr 半径^①

$$a_0 = \frac{[4\pi\epsilon_0]\hbar^2}{m_e e^2} = 0.529 \times 10^{-8} \text{ cm}$$

(2) 氢原子结合能

$$E = \frac{m_e c^4}{2[(4\pi\epsilon_0)^2]\hbar^2} = 13.605 \text{ eV}$$

(3) Bohr 磁子

$$\mu_B = \frac{e\hbar[c]}{2m_e c} = 9.273 \times 10^{-21} \text{ erg} \cdot \text{Gs}^{-1} / [5.788 \times 10^{-11} \text{ MeV} \cdot \text{T}^{-1}]$$

(4) 电子的 Compton 波长

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 2\pi\alpha a_0 = 2.426 \times 10^{-10} \text{ cm}$$

(5) 经典电子半径

$$r_e = \alpha^2 a_0 = \frac{e^2}{[4\pi\epsilon_0]m_e c^2} = 2.818 \times 10^{-13} \text{ cm}$$

^① 这里看上去不必要的中括号用以对电磁学量同时列出 Gauss 单位制与 SI 制两种表达式, 对前者忽略中括号, 对后者式中包含中括号中的因子, 下面一些地方均与此相同. 在微观物理中, 很多时候用 Gauss 单位制更方便.

(6) 电子静止能量

$$E_e = m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}$$

(7) 质子静止能量

$$E_p = m_p c^2 = 938.272 \text{ MeV}$$

(8) 精细结构常数

$$\alpha = \frac{e^2}{[4\pi\epsilon_0]\hbar c} = 7.297 \times 10^{-3} \approx 1/137$$

(9) 典型的氢原子精细结构能级分裂

$$\Delta E = \alpha^4 m_e c^2 = 1.8 \times 10^{-4} \text{ eV}$$

题 1.3 导出教材式 (1.12), 验算三个公式中的系数数值.**解答** 对非相对论性自由粒子

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (1.1)$$

这里 p , E 分别是其动量和能量, m 为质量. de Broglie 关系

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (1.2)$$

式中 h 为 Planck 常量. 由上两式可以导出

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \quad (1.3)$$

利用组合常量

$$\begin{aligned} hc &= 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \times 2.998 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ &= 1.241 \times 10^4 \text{ eV} \cdot \text{\AA} = 12.41 \text{ keV} \cdot \text{\AA} \end{aligned} \quad (1.4)$$

容易验算

$$\begin{aligned} \frac{h}{\sqrt{2m_e}} &= \frac{hc}{\sqrt{2m_e c^2}} = 12.26 \text{ \AA} \cdot \text{eV}^{1/2} \\ \frac{h}{\sqrt{2m_n}} &= \frac{hc}{\sqrt{2m_n c^2}} = 0.286 \text{ \AA} \cdot \text{eV}^{1/2} \end{aligned}$$

这样

$$\lambda_e = \frac{12.26}{\sqrt{E}}, \quad \lambda_n = \frac{0.286}{\sqrt{E}} \quad (1.3')$$

对于光子而言

$$\lambda_\gamma = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{E} \quad (1.5)$$

同样利用组合常量 (1.4), 给出

$$\lambda_\gamma = \frac{1.241 \times 10^4}{E} \quad (1.5')$$

上面式 (1.3') 与 (1.5') 合起来就是教材式 (1.12), 其中 E (对 $m \neq 0$ 的实物粒子, E 为其动能) 的单位为 eV, λ 的单位是 $\text{\AA}$.

题 1.4 室温 ($T \sim 300\text{K}$) 下中子速度为 2200m/s , 计算它的 de Broglie 波长; 求出同温度下电子速度, 计算电子的 de Broglie 波长.

解答 由于题给中子速度远小于光速, 故可以用非相对论公式计算其动能

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{2} m_n v_n^2 = \frac{1}{2} \times 1.674\,927\,351 \times 10^{-27} \times 2200^2 \text{ J} \\ &\doteq 4.05 \times 10^{-21} \text{ J} \doteq 2.53 \times 10^{-2} \text{ eV} \end{aligned}$$

其中用到能量单位换算关系, $1\text{eV} = 1.602\,176\,565 \times 10^{-19} \text{ J}$. 将上面结果代入教材中式 (1.11), 可得

$$\lambda_n = \frac{0.286}{\sqrt{E_n}} = \frac{0.286}{\sqrt{2.53 \times 10^{-2}}} \doteq 1.8(\text{\AA})$$

同温度下由能量均分定理知电子动能为

$$\begin{aligned} E_e &= \frac{1}{2} m_e v_e^2 = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \times 1.380\,6488(13) \times 10^{-23} \times 300 \text{ J} \\ &\doteq 6.21 \times 10^{-21} \text{ J} \doteq 3.88 \times 10^{-2} \text{ eV} \end{aligned}$$

其中 $k = 1.380\,6488(13) \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ 称为 Boltzmann 常量. 由上式也可算得电子的速度为

$$v_e = \sqrt{\frac{2E_e}{m_e}} = \sqrt{\frac{3 \times 1.380\,6488(13) \times 10^{-23} \times 300}{9.109\,382\,91 \times 10^{-31}}} = 1.17 \times 10^5 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

由式 (1.11), 可得电子的 de Broglie 波长

$$\lambda_e = \frac{12.26}{\sqrt{E_e}} = \frac{12.26}{\sqrt{3.88 \times 10^{-2}}} \doteq 62(\text{\AA})$$

题 1.5 指出下列实验中, 哪些实验表明了辐射场的粒子性? 哪些实验主要证明能量交换的量子性? 哪些实验主要表明物质粒子的波动性?

- (1) 光电效应; (2) 黑体辐射谱; (3) Franck-Hertz 实验;
(4) Compton 散射; (5) Davisson-Germer 实验.

简述理由.

解答 光电效应和 Compton 散射说明了光场的粒子性. 光电效应表明每个光子的能量为 $\hbar\omega$, Compton 散射更进一步说明光子的动量为 $\hbar/\lambda$, 并且说明光子与物质相互作用时, 满足动量守恒与能量守恒.

黑体辐射谱与 Franck-Hertz 实验说明, 黑体 (常描述为一谐振子体系) 与辐射场的能量交换过程、电子与原子的碰撞过程, 能量交换是量子化的, 即原子的能级是量子化的.

Davisson-Germer 实验 (电子在晶体中发生衍射), 则主要表现出电子的波动性, 验证了 de Broglie 波长与动量的关系, $\lambda = h/p$.

题 1.6 考虑如下实验：一束准平面波电子射向刻有 A、B 两缝的平板，板外是一装有检测器阵列的屏幕。利用检测器能定出电子撞击屏幕的位置。在下列各种情形下，画出入射电子强度随屏幕位置变化的草图，给出简单解释。

- (1) A 缝开启, B 缝关闭;
- (2) B 缝开启, A 缝关闭;
- (3) 两缝均开启。

解答 三种情形电子强度随屏幕位置变化的示意图分别如下面图 (1)~(3)[为了视觉上明显起见, 图中缝宽和双缝间距都大大夸大了; 同时为了视觉上谐调起见, 第 (3) 图双缝干涉随屏幕位置变化图的强度坐标与其余两个强度随屏幕位置变化图相比缩小了 4 倍]。

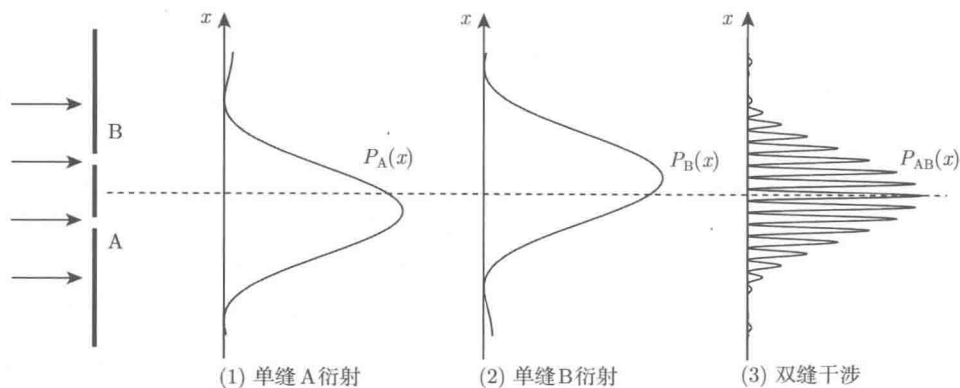


图 1.1 单缝衍射与双缝干涉的强度分布

当 A 缝单独开启时, 屏幕上的电子强度分布 $P_A(x)$ 为电子 de Broglie 波在 A 缝的单缝衍射强度分布; 同理, B 缝单独开启时, 屏幕上形成 B 缝的电子单缝衍射强度分布 $P_B(x)$; 两缝同时开启时, 屏幕上的电子强度分布 $P_{AB}(x)$ 并非前两种情况强度分布的简单叠加, 而是出现了干涉效应, 即 $P_A(x) + P_B(x) + \text{干涉项}$, 从而显示出电子的波动性。

题 1.7 讨论以下波函数的归一化问题:

(1) 粒子在一维无限深势阱中运动, 设 $\psi(x) = A \sin \frac{\pi x}{a} (0 \leq x \leq a)$, 求 A 使波函数归一;

(2) 设 $\psi(x) = A \exp \left\{ -\frac{1}{2} \alpha^2 x^2 \right\}$, α 为已知实常数, 求归一化常数 A;

(3) 设 $\psi(x) = \exp\{ikx\}$, 粒子的位置概率分布如何? 能否归一?

(4) 设 $\psi(x) = \delta(x)$, 粒子的位置概率分布如何? 能否归一?

解答 (1) 由于在全空间 (一维) 发现粒子的概率为 1, 应有

$$\int \psi^*(x) \psi(x) dx = \int_0^a |A|^2 \left(\sin \frac{\pi x}{a} \right)^2 dx = 1$$

由此可得 $|A|^2 = \frac{2}{a}$. 不妨取 A 为正实数, 则 $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$.

(2) 同理有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |A|^2 \exp(-\alpha^2 x^2) dx = 1$$

完成 Gauss 积分得

$$|A|^2 = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\pi}}$$

不妨取 A 为正实数, 则 $A = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\pi}}$.

(3) 相对概率密度 $p(x) = e^{-ikx} e^{ikx} = 1$, 即在空间中任何位置处处相等, 为等概率分布.

若沿用上面的方法来求归一化系数, 则会出现

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 e^{-ikx} e^{ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 dx = \infty \cdot |A|^2$$

可见波函数不满足平方可积. 因此波函数不能有限归一, 只能按照 Dirac 所建议的如下归一到 δ 函数

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \exp(-ik'x) \exp(ikx) dx = \delta(k - k')$$

(4) $\psi(x) = \delta(x - x_0)$ 是粒子的位置本征函数, 此波函数描述的粒子的位置概率分布为

$$P(x) = \begin{cases} 1, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases}$$

即, 在 $x = x_0$ 处可测得粒子, 在其他位置测不到粒子. 位置本征函数复数平方在全空间的积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \delta(x - x_0) dx = \delta(0) \rightarrow \infty$$

可见波函数不满足平方可积. 因此波函数不能有限归一, 也只能如下归一到 δ 函数

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \delta(x - x'_0) dx = \delta(x_0 - x'_0)$$

题 1.8 设在球坐标中, 粒子波函数为 $\psi(r, \theta, \varphi)$, 试求:

- (1) 在球壳 $(r, r + dr)$ 中找到粒子的概率;
 (2) 在 (θ, φ) 方向的立体角 $d\Omega$ 中找到粒子的概率.

解答 (1) 设题目所给的波函数 $\psi(r, \theta, \varphi)$ 在全空间平方可积, 也就是

$$\iiint |\psi(r, \theta, \varphi)|^2 r^2 dr d\Omega = \mathcal{N}^2 < +\infty$$

这里 $\mathcal{N}^2$ 为题给波函数的模平方. 这样在球壳 $(r, r + dr)$ 中找到粒子的概率为

$$dp(r) = \frac{1}{\mathcal{N}^2} \left(\int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\psi(r, \theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi \right) r^2 dr$$

- (2) 在 (θ, φ) 方向的立体角 $d\Omega$ 中找到粒子的概率为

$$dp(\theta, \varphi) = \frac{1}{\mathcal{N}^2} \left(\int_0^\infty |\psi(r, \theta, \varphi)|^2 r^2 dr \right) d\Omega$$

题 1.9 对下列波函数所描述的粒子, 分别求出位置和动量的不确定度, 并验证不确定性关系:

- (1) 平面波 $\psi(x) = \exp(ikx)$;
 (2) 位置本征态 $\psi(x) = \delta(x - x_0)$;
 (3) Gauss 型波包 $\psi(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2\right\}$;
 (4) $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left(-\frac{|x|}{L}\right)$.

提示 注意 (4) 中 $\psi(x)$ 在 $x = 0$ 处性状. 最好避免直接求其二阶导数.

解答 (1) 力学量 Ω 的不确定度, 指 Ω 在某一量子态 ψ 下的不确定度

$$\Delta_\psi \Omega = \sqrt{\langle \Omega^2 \rangle_\psi - \langle \Omega \rangle_\psi^2} \quad (1.6)$$

其中 $\langle \Omega \rangle_\psi = \int \psi^*(x) \Omega \psi(x) dx$, 并且假设 ψ 已经归一化. 按不确定性关系, 力学量 Ω_1 、 Ω_2 在 ψ 态下的不确定度满足:

$$(\Delta_\psi \Omega_1)(\Delta_\psi \Omega_2) \geq \left| \frac{1}{2} \langle [\Omega_1, \Omega_2] \rangle_\psi \right| \quad (1.7)$$

平面波 $\exp(ikx)$ 是动量 $p = \hbar k$ 的本征态, 此波函数描述的粒子具有确定的动量 p , 所以动量的平均值也为 p , 均方偏差 $\Delta_\psi p = 0$.

再求 $\langle \hat{x} \rangle_\psi$ 、 $\langle \hat{x}^2 \rangle_\psi$. 由于相对概率密度 $p(x) = e^{-ikx} e^{ikx} = 1$, 即在空间中任何位置处处相等, 为等概率分布. 对任意的 x , 必有一等概率的 $-x$, 所以

$$\langle \hat{x} \rangle_\psi = 0 \quad (1.8)$$

由于平面波 $\exp(ikx)$ 不是平方可积, 难以用通常函数表示粒子空间位置绝对概率分布. 为计算 $\langle \hat{x}^2 \rangle_\psi$, 我们采用变通的办法. 先对箱归一化波函数计算, 再令箱子趋于无穷大. 此时取波函数为在 $-L \leq x \leq L$ 等概率分布, 绝对概率为 $p = 1/(2L)$, 因而

$$\langle \hat{x}^2 \rangle_{\psi, L} = \int_{-L}^L \frac{1}{2L} x^2 dx = \frac{1}{3} L^2 \quad (1.9)$$

因而

$$\langle \hat{x}^2 \rangle_\psi = \lim_{L \rightarrow \infty} \langle \hat{x}^2 \rangle_{\psi, L} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{3} L^2 \rightarrow \infty \quad (1.10)$$

可见 $\langle \hat{x}^2 \rangle_\psi$ 为二阶无穷大. 故有 $\Delta_\psi x = \infty$.

此时 $(\Delta_\psi \hat{x})(\Delta_\psi \hat{p})$ 为零乘以无穷大的不定型.

(2) 与第 (1) 小题类似, $\delta(x - x_0)$ 是位置的本征态, 其本征值为 x_0 , 处于这种量子态的粒子具有确定的位置 x_0 , 所以有 $\Delta_\psi x = 0$.

对于 $\langle p \rangle_\psi$ 与 $\langle p^2 \rangle_\psi$, 可转到动量空间求解,

$$\psi(k) = \int \delta(x - x_0) e^{ikx} dx = e^{ikx_0} \quad (1.11)$$

这与坐标表象平面波的波函数形式相同. 故按前面结果写出

$$\langle \hat{p} \rangle_\psi = 0 \quad (1.12)$$

而 $\langle \hat{p}^2 \rangle_\psi$ 为二阶无穷大. 故有 $\Delta_\psi p = \infty$.

注意 动量本征态与位置本征态是两种理想模型, 是真实的物理波包无限展宽和无限压缩的两种极限结果. 它们是有用的概念, 但并非是物理上真实的量子状态.

(3) 因为 $\langle \hat{x} \rangle_\psi$, $\langle \hat{p} \rangle_\psi$ 的积分式中被积函数为奇函数, 故对 $(-\infty, +\infty)$ 范围积分给出

$$\langle \hat{x} \rangle_\psi = \langle \hat{p} \rangle_\psi = 0 \quad (1.13)$$

下面求 $\langle \hat{x}^2 \rangle_\psi$, $\langle \hat{p}^2 \rangle_\psi$. 将题给波函数归一化,

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2\right\}$$

这样

$$\langle \hat{x}^2 \rangle_\psi = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int e^{-\alpha^2 x^2} x^2 dx = \frac{1}{2\alpha^2} \quad (1.14)$$

其中用到了附录中积分公式 (2), 而

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{p}^2 \rangle_\psi &= \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int e^{-\alpha^2 x^2/2} \left(-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) e^{-\alpha^2 x^2/2} dx \\
 &= \frac{\alpha \hbar^2}{\sqrt{\pi}} \int \left[\frac{d}{dx} e^{-\alpha^2 x^2/2} \right]^2 dx \\
 &= \frac{\alpha^5 \hbar^2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-\alpha^2 x^2} x^2 dx \\
 &= \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2}
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

所以有 $(\Delta_\psi \hat{x})(\Delta_\psi \hat{p}) = \hbar/2$. 因此称 $\psi(x) = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2\right\}$ 为最小不确定波包.

(4) 同样因为被积函数为奇函数对 $(-\infty, +\infty)$ 范围积分, 给出 $\langle \hat{x} \rangle_\psi = 0$. 而

$$\langle \hat{x}^2 \rangle_\psi = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x/L} x^2 dx = \frac{2}{L} \int_0^\infty e^{-2x/L} x^2 dx = \frac{L^2}{2} \tag{1.16}$$

故有 $(\Delta_\psi \hat{x}) = \frac{L}{\sqrt{2}}$.

下面求 $(\Delta_\psi \hat{p})$. 因为

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{-|x|/L} = \left[\frac{1}{L} - \frac{2}{L} \theta(x) \right] e^{-|x|/L} \tag{1.17}$$

其中

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

为阶跃函数, 故有

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-|x|/L} = -\frac{2}{L} \delta(x) e^{-|x|/L} + \frac{1}{L^2} e^{-|x|/L}$$

因此,

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{p} \rangle &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-|x|/L} \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right] \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-|x|/L} dx \\
 &= -i\hbar \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{L} e^{-|x|/L} \left[\frac{1}{L} - \frac{2}{L} \theta(x) \right] e^{-|x|/L} dx = 0
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

并有

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{p}^2 \rangle &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{L} e^{-|x|/L} \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) e^{-|x|/L} dx \\
 &= \hbar^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{L} \left[\frac{2}{L} \delta(x) - \frac{1}{L^2} \right] e^{-2|x|/L} dx \\
 &= \frac{2\hbar^2}{L} |\psi(0)|^2 - \frac{\hbar^2}{L^2} = \frac{\hbar^2}{L^2}
 \end{aligned} \tag{1.19}$$