21世纪统计学系列教材

Statistics

21世纪统计学系列教材

Applied Stochastic Processes

应用随机过程

（第四版）

张 波 商 豪 编著

中国人民大学出版社

Statistics 21世纪统计学系列教材

Applied Stochastic Processes

应用随机过程

（第四版）

张 波 商 豪 编著

中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目（CIP）数据

应用随机过程/张波等编著. —4 版. —北京：中国人民大学出版社，2016.6
21 世纪统计学系列教材
ISBN 978-7-300-22835-8

Ⅰ.①应… Ⅱ.①张… Ⅲ.①随机过程-高等学校-教材 Ⅳ.①O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 087135 号

21 世纪统计学系列教材
应用随机过程（第四版）
张 波 商 豪 编著
Yingyong Suiji Guocheng

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京七色印务有限公司	**版　　次**	2001 年 5 月第 1 版
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本		2016 年 6 月第 4 版
印　　张	16.5 插页 1	**印　　次**	2016 年 6 月第 1 次印刷
字　　数	355 000	**定　　价**	36.00 元

总　序

改革开放以来，高等统计教育有了很大的发展。随着课程设置的不断调整，有不少教材出版，同时也翻译引进了一些国外优秀教材。作为培养我国统计专门人才的摇篮，中国人民大学统计学系自 1952 年创建以来，走过了风风雨雨，一直坚持着理论与应用相结合的办学方向，培养能够理论联系实际、解决实际问题的高层次人才。随着新知识经济和网络时代的到来，我们在教学科研的实践中，深切地感受到，无论是自然科学领域、社会科学领域的研究，还是国家宏观管理和企业生产经营管理，甚至人们的日常生活，信息需求量日益增多，信息处理技术更加复杂，作为信息技术支柱的统计方法，越来越广泛地应用于各个领域。

面对新的形势，我们一直在思索，课程设置、教材选择、教学方式等怎样才能使学生适应社会经济发展的客观需要。在反复酝酿、不断尝试的基础上，我们决定与统计学界的同仁，共同编写、出版一套面向 21 世纪的统计学系列教材。

这套系列教材聘请了中科院院士、中国科技大学陈希孺教授，上海财经大学数量经济研究院张尧庭教授，中国科学院数学与系统科学研究所冯士雍研究员等作为编委。他们长期任中国人民大学的兼职教授，一直关心、支持着统计学系的学科建设和应用统计的发展。中国人民大学应用统计科学研究中心 2000 年已成为国家级研究基地，这些专家是首批专职或兼职研究人员。这一开放性研究基地的运作，将有利于提升我国应用统计科学研究的水平，也必将进一步促进高等统计教育的发展。

这套教材是我们奉献给新世纪的，希望它能促进应用统计教育水平的提高。这套教材力求体现以下特点：

第一，在教材选择上，主要面向经济类统计学专业。选材既包括统计教材也包括风险管理与精算方面的教材。尽管名为统计学系列教材，但并不求大、求全，而是力求精选。对于目前已有的内容较为成熟、适合教学需要、公认的较好的教材，并未列入本次出版计划。

第二，每部教材的内容和写作，注意广泛吸收国内外优秀教材的成果。教材力求简明易懂、内容系统和实用，注重对统计方法思想的阐述，并结合大量实际数据和实例说明统计方法的特点及应用条件。

第三，强调与计算机的结合。为着力提高学生运用统计方法分析解决问题的能力，教材所涉及的统计计算，要求运用目前已有的统计软件。根据教材内容，选择使用 SAS、SPSS、TSP、STATISTICA、EViews、MINITAB、Excel 等。

感谢中国人民大学出版社的同志们，他们怀着发展我国应用统计科学的热情和提高统计教育水平的愿望，经过反复论证，使这套教材得以出版。感谢参与教材编写的同行专家、统计学系的教师。愿大家的辛勤劳动能够结出丰硕的果实。我们期待着与统计学界的同仁，共同创造应用统计辉煌的明天。

易丹辉

于中国人民大学

前 言

近几十年来，随机过程无论在理论上还是在应用上都有蓬勃的发展。它的基本知识和方法，不仅是数学、概率统计专业所必需的，也是通信、控制、生物、社会科学、工程技术及经济等领域的应用与研究所需要的。高等院校的学生、工程技术人员、金融工作者更迫切需要学习和掌握随机过程的有关知识。随机过程所包含的内容丰富而深远，由于面向不同的读者群体，不同教材所选取的内容和难度都有所不同。本着为广大非数学专业学生授业解惑的初衷，本书着重于对随机过程基本知识和基本方法的介绍，特别注重实际应用的分析讲解，尽量回避测度论水平的严格证明。一般读者只要具有高等数学及概率论的基础知识，便可阅读和理解本书的大部分内容。本书各章都配有一些与社会、经济、管理以及生物等专业相关的例子和习题，以帮助学生加深对基本理论的理解，提高应用随机过程解决问题的能力。为便于有兴趣的读者进一步学习，书后列出了一些参考文献。

在前三版的基础上，第四版增加了一章的内容——Markov 链 Monte Carlo 方法。Monte Carlo 方法即随机模拟方法的别称，在金融学、经济学、计算物理学等多个领域有广泛的应用。静态 Monte Carlo 方法是通过构造独立同分布的随机数来计算积分的 Monte Carlo 方法。动态 Monte Carlo 方法则是通过构造 Markov 链的极限平稳分布来模拟计算积分的方法，称为 Markov 链 Monte Carlo 方法。新增的第 11 章简要介绍了常见的 Metropolis-Hastings 算法、Gibbs 抽样方法以及 MCMC 方法在贝叶斯估计中的应用。同时，针对前三版出现的一些印刷错误进行更正，并更新了一些符号。

全书可分为五个部分。第一部分（第 1，2，3，5 章）是预备知识和随机过程最基本的内容，一般教材都包含这部分内容；第二部分（第 4 章）是更新过程，这一内容在许多教材中都没有单独讨论，考虑到它在人口理论和保险论中的应用，将其单独作为一章讲授；第三部分（第 6，7，8 章）分别介绍经典的鞅论、Brown 运动与随机积分；第四部分（第 9，10 章）介绍随机过程在金融和保险精算中的应用；第五部分

（第 11 章）则相对独立，介绍 Markov 链 Monte Carlo 方法及其在贝叶斯估计中的简单应用。书末附上了全部习题的详细解答，供读者参考。

笔者得以完成本书，首先要感谢许多同仁的鼓励、支持和帮助。易丹辉教授、顾岚教授在百忙之中审阅了初稿并提出了许多宝贵意见，纠正了一些不妥之处。张景肖教授和肖宇谷副教授对本书提出了许多修正意见。蒋远营博士和徐美萍博士为本书的修订倾注了大量的心血，对新增内容提出了修改意见，挑选新例题，反复验算习题，字斟句酌。还有许多读者反馈给笔者非常珍贵的修正意见。在此，对同仁和读者表示诚挚的谢意！此外，还要感谢中国人民大学应用统计科学研究中心和统计学院的支持，将本书列入学院十二五规划教材。

教师教学服务说明

中国人民大学出版社工商管理分社以出版经典、高品质的工商管理、财务会计、统计、市场营销、人力资源管理、运营管理、物流管理、旅游管理等领域的各层次教材为宗旨。

为了更好地为一线教师服务，近年来工商管理分社着力建设了一批数字化、立体化的网络教学资源。教师可以通过以下方式获得免费下载教学资源的权限：

在“人大经管图书在线”（www. rdjg. com. cn）注册，下载“教师服务登记表”，或直接填写下面的“教师服务登记表”，加盖院系公章，然后邮寄或传真给我们。我们收到表格后将在一个工作日内为您开通相关资源的下载权限。

如您需要帮助，请随时与我们联络：

中国人民大学出版社工商管理分社

联系电话：010－62515735，62515749，62515987

传　　真：010－62515732，62514775　　　　电子邮箱：rdcbsjg@crup. com. cn

通讯地址：北京市海淀区中关村大街甲 59 号文化大厦 1501 室（100872）

教师服务登记表

<table>
<tr><td>姓 名</td><td></td><td>□先生　□女士</td><td>职　　称</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>座机/手机</td><td colspan="2"></td><td>电子邮箱</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>通讯地址</td><td colspan="2"></td><td>邮　　编</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>任教学校</td><td colspan="2"></td><td>所在院系</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="3">所授课程</td><td>课程名称</td><td>现用教材名称</td><td>出版社</td><td>对象（本科生/研究生/MBA/其他）</td><td>学生人数</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">需要哪本教材的配套资源</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="2">人大经管图书在线用户名</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="6">院/系领导（签字）：
院/系办公室盖章</td></tr>
</table>

目　录

第 1 章 Chapter 1 预备知识

随机过程通常被视为概率论的动态部分。在概率论中研究的随机现象，都是一个或有限多个随机变量的规律性。在讨论中心极限定理时也不过是对随机变量序列的讨论。但在实际问题中，我们还需要研究一些随机现象的发展和变化过程，即随时间不断变化的随机变量，而且所涉及的随机变量通常是无限多个，这就是随机过程的研究对象。随机过程以概率论作为其主要的基础知识，为此，我们首先对本书中经常用到的概率论基本知识作简要的回顾。

1.1 概率空间

随机试验是概率论的基本概念，试验的结果事先不能准确地预言，但具有如下三个特征：

（1）可以在相同的条件下重复进行；

（2）每次试验的结果不止一个，但预先知道试验的所有可能的结果；

（3）每次试验前不能确定哪个结果会出现。

随机试验的可能结果称为样本点或基本事件，记为 ω。样本点的全体称为样本空间，记为 Ω。样本空间 Ω 称为必然事件，空集 $\varnothing$ 称为不可能事件。Ω 的子集 A 由基本事件组成，通常称为事件。但是在实际问题中，人们通常不是对样本空间的所有子集都感兴趣，而是关心某些事件及其发生的可能性大小。我们用下面的概念来刻画这种事件。

定义 1.1.1 设 Ω 是一个样本空间（或任意一个集合），$\mathscr{F}$ 是 Ω 的某些子集组成的集合族。如果满足

（1）$\Omega \in \mathscr{F}$；

（2）若 $A \in \mathscr{F}$，则 $A^c = \Omega \setminus A \in \mathscr{F}$；

(3) 若 $A_n\in\mathscr{F}$ $(n=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$。

则称 $\mathscr{F}$ 为 Ω 上的一个 σ 代数，$(\Omega,\mathscr{F})$ 称为可测空间。

如果 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的一个 σ 代数，则

(1) $\varnothing\in\mathscr{F}$;

(2) 若 $A_n\in\mathscr{F}$ $(n=1,2,\cdots)$，则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$。

以 Ω 的某些子集为元素的集合称为（Ω 上的）集类。对于 Ω 上的任一非空集类 $\mathscr{C}$，存在包含 $\mathscr{C}$ 的最小 σ 代数，即 $\{\bigcap\mathscr{H}|\mathscr{H}$ 为包含 $\mathscr{C}$ 的 σ 代数$\}$，称为由 $\mathscr{C}$ 生成的 σ 代数，记为 $\sigma(\mathscr{C})$。

定义 1.1.2 设 $\Omega=\mathbb{R}$。由所有半无限区间 $(-\infty,x)$，$x\in\mathbb{R}$ 生成的 σ 代数称为 $\mathbb{R}$ 上的 Borel σ 代数，记为 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$，其中的元素称为 Borel 集合。类似地，可定义 $\mathbb{R}^n$ 上的 Borel σ 代数 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$。

定义 1.1.3 设 $\{A_n,n=1,2,\cdots\}$ 为一集合序列。令

$$\limsup_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k;\quad \liminf_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$$

分别称其为 $\{A_n\}$ 的上极限和下极限（上极限有时也记为 $\{A_n,\text{ i.o.}\}$）。显然有

$$\limsup_{n\to\infty}A_n=\{w|\ \forall\, n\in\mathbb{N},\exists\, k\geqslant n,\text{使 } w\in A_k\}=\{w|w\text{ 属于无穷多个 }A_n\}$$

$$\liminf_{n\to\infty}A_n=\{w|\ \exists\, n\in\mathbb{N},\forall\, k\geqslant n,\text{有 } w\in A_k\}=\{w|w\text{ 至多不属于有限多个 }A_n\}$$

从而恒有

$$\liminf_{n\to\infty}A_n\subset\limsup_{n\to\infty}A_n$$

若

$$\liminf_{n\to\infty}A_n=\limsup_{n\to\infty}A_n$$

则称 $\{A_n\}$ 的极限存在，并用 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 表示，即令

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\liminf_{n\to\infty}A_n=\limsup_{n\to\infty}A_n$$

特别地，若对每个 n，有 $A_n\subset A_{n+1}$（相应地，$A_n\supset A_{n+1}$），则称 $\{A_n\}$ 为单调增（相应地，单调降）序列。对单调增或单调降序列 $\{A_n\}$，我们分别令 $A=\bigcup\limits_n A_n$ 或 $A=\bigcap\limits_n A_n$，称 A 为 $\{A_n\}$ 的极限，通常记为 $A_n\uparrow A$ 或 $A_n\downarrow A$。

下面我们来看一个例子。

例 1.1.1

设某人反复地抛掷硬币，观察硬币朝上的面是正面还是反面。$\Omega=\{$所有由抛掷结果“正面”和“反面”组成的序列$\}$，$\mathscr{F}=\{\Omega$ 的所有子集$\}$，记 A_n 为第 n 次抛掷的结

果是“正面”的事件，则

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{\text{有无限多个抛掷结果是“正面”}\}$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{\text{除有限多个外，抛掷结果都是“正面”}\}$$

定义 1.1.4　设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 是可测空间，$P(\cdot)$ 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的实值函数。如果

(1) $P(\Omega)=1$；

(2) $\forall A\in\mathscr{F}$，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(3) 对两两互不相容事件 A_1，A_2，…（即当 $i\neq j$ 时，$A_i\cap A_j=\varnothing$），有

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

则称 P 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的概率，$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 称为概率空间，$\mathscr{F}$ 中的元素称为事件，$P(A)$ 称为事件 A 的概率。

由定义易知事件的概率有如下性质：

(1) 若 A，$B\in\mathscr{F}$，则 $P(A\cup B)+P(A\cap B)=P(A)+P(B)$。

(2) 若 A，$B\in\mathscr{F}$，且 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$（可减性）。

(3) 若 A，$B\in\mathscr{F}$，且 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$（单调性）。

(4) 若 $A_n\in\mathscr{F}$，$n\geqslant 1$，则 $P\Big(\bigcup\limits_{n\geqslant 1}A_n\Big)\leqslant\sum\limits_{n\geqslant 1}P(A_n)$（次 σ 可加性）。

(5) 若 $A_n\in\mathscr{F}$ 且 $A_n\uparrow A$，则 $P(A)=\lim\limits_{n\to\infty}P(A_n)$（从下连续）。

(6) 若 $A_n\in\mathscr{F}$ 且 $A_n\downarrow A$，则 $P(A)=\lim\limits_{n\to\infty}P(A_n)$（从上连续）。

如果概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 的 P 零测集（即零概率事件）的每个子集仍为事件，则称为完备的概率空间。为了避免 P 零测集的子集不是事件的情形出现，我们把概率测度完备化。令 $\mathscr{N}$ 表示 Ω 的所有 P 零测集的子集的全体，由 $\{\mathscr{F},\mathscr{N}\}$ 生成的 σ 代数（即包含 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{N}$ 的最小 σ 代数）称为 $\mathscr{F}$ 的完备化，记为 $\overline{\mathscr{F}}$。$\overline{\mathscr{F}}$ 中的每个集合 B 都可以表示为 $B=A\cup N$，其中 $A\in\mathscr{F}$，$N\in\mathscr{N}$，且 $A\cap N=\varnothing$。定义

$$\overline{P}(B)=\overline{P}(A\cup N)=P(A)$$

则 P 就被扩张到 $\overline{\mathscr{F}}$ 上。

容易验证，$\overline{P}$ 是 $\overline{\mathscr{F}}$ 上的概率测度，集函数 $\overline{P}$ 称为 P 的完备化。本书假定 P 是完备的概率测度。

1.2　随机变量与分布函数

定义 1.2.1　设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是（完备的）概率空间，X 是定义在 Ω 上取值于实数集 $\mathbb{R}$ 的函数，如果 $\forall x\in\mathbb{R}$，$\{w:X(\omega)\leqslant x\}\in\mathscr{F}$，则称 X 是 $\mathscr{F}$ 上的随机变量，简称随机变量。函数

$$F(x)=P\{\omega: X(\omega)\leqslant x\},\quad -\infty<x<\infty$$

称为随机变量 X 的分布函数。

注：在上面的定义中，如果 X 是广义实值函数，即 X 可以取∞，则需要加上条件：X 是几乎处处有限的，即 $P\{\omega: |X(\omega)|=\infty\}=0$ 。否则，会出现按上面定义的分布函数是假分布的情况。

定义 1.2.2 两个随机变量 X 与 Y，如果满足 $P\{\omega\in\Omega]: X(\omega)\neq Y(\omega)\}=0$，则称它们是等价的。

两个等价的随机变量可视为同一个。

定理 1.2.1 下列命题等价：

(1) X 是随机变量；

(2) $\{\omega: X(\omega)\geqslant x\}\in\mathscr{F},\forall x\in\mathbb{R}$；

(3) $\{\omega: X(\omega)>x\}\in\mathscr{F},\forall x\in\mathbb{R}$；

(4) $\{\omega: X(\omega)<x\}\in\mathscr{F},\forall x\in\mathbb{R}$。

为简单起见，习惯上将 $\{\omega: X(\omega)\geqslant x\}$ 记为$\{X\geqslant x\}$，其他记号类似。

定理 1.2.2 (1) 若 X，Y 是随机变量，则 $\{X<Y\}$，$\{X\leqslant Y\}$，$\{X=Y\}$ 及 $\{X\neq Y\}$ 都属于$\mathscr{F}$；

(2) 若 X，Y 是随机变量，则 $X\pm Y$ 与 XY 亦然；

(3) 若 $\{X_n\}$ 是随机变量序列，则 $\sup\limits_n X_n$，$\inf\limits_n X_n$，$\limsup\limits_{n\to\infty} X_n$ 和$\liminf\limits_{n\to\infty} X_n$ 都是随机变量。

映射 $\boldsymbol{X}$：$\Omega\to\mathbb{R}^d$，表示为 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_d)$，若对所有的 $k(1\leqslant k\leqslant d)$，$X_k$ 都是随机变量，则称 $\boldsymbol{X}$ 为随机向量。

复值随机变量 Z 定义为两个实值随机变量 X 和 Y 的线性组合 $X+iY$。

给定随机变量 X，可以生成 Ω 上的 σ 代数，即包含所有形如 $\{X\leqslant x\}$，$x\in\mathbb{R}$ 的最小 σ 代数，记为 $\sigma(X)$。类似地，可定义由随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 生成的 σ 代数 $\sigma(X_1,X_2,\cdots,X_n)$。

在实际中，常用的随机变量有两种类型：离散型随机变量和连续型随机变量。

离散型随机变量 X 的概率分布用如下分布列描述：

$$p_k=P\{X=x_k\},\quad k=1,2,\cdots$$

其分布函数为：

$$F(x)=\sum_{x_k\leqslant x}p_k$$

连续型随机变量 X 的概率分布用概率密度 $f(x)$ 描述，其分布函数为：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t$$

对于随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_d)$，它的联合分布函数定义为：

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_d)=P\{X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_d\leqslant x_d\}$$

这里 $d\geqslant 1$，$x_k\in\mathbb{R}(k=1,2,\cdots,d)$。

定理 1.2.3　若 $F(x_1,x_2,\cdots,x_d)$ 是随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的联合分布函数，则

(1) $F(x_1,x_2,\cdots,x_d)$ 对每个变量都是单调不减的；

(2) $F(x_1,x_2,\cdots,x_d)$ 对每个变量都是右连续的；

(3) 对 $i=1,2,\cdots,d$，$\lim\limits_{x_i\to-\infty}F(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_d)=0$，$\lim\limits_{x_1,x_2,\cdots,x_d\to+\infty}F(x_1,x_2,\cdots,x_d)=1$。

如果 $f(x_1,x_2,\cdots,x_d)=\dfrac{\partial^d F}{\partial x_1\,\partial x_2\cdots\partial x_d}$ 对所有的 $(x_1,x_2,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d$ 存在，则称函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_d)$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的联合概率密度函数，并且

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_d)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_d}f(t_1,t_2,\cdots,t_d)\mathrm{d}t_d\cdots\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1$$

设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_d)$ 为 X_1，X_2，…，X_d 的联合分布函数，$1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_n\leqslant d$，则 $X_1,X_2,\cdots,X_{k_n}$ 的边际分布函数定义为：

$$\begin{aligned}&F_{k_1,k_2,\cdots,k_n}(x_{k_1},x_{k_2},\cdots,x_{k_n})\\=&F(\infty,\cdots,\infty,x_{k_1},\infty,\cdots,\infty,x_{k_2},\infty,\cdots,\infty,x_{k_n},\infty,\cdots,\infty)\end{aligned}$$

下面是一些常见的分布。

1. **退化分布**：若随机变量 X 只取常数 c，即

$$P\{X=c\}=1$$

则 X 并不随机，但我们把它看作随机变量的退化情况更为方便，因此称之为退化分布，又称单点分布。

2. **Bernoulli 分布**：在一次试验中，设事件 A 出现的概率为 $p(0<p<1)$，不出现的概率为 $1-p$，若以 X 记事件 A 出现的次数，则 X 的可能取值仅为 0，1，其对应的概率为：

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},\quad k=0,1$$

这个分布称为 Bernoulli 分布，又称两点分布。

3. **二项分布**：在 n 重 Bernoulli 试验中，设事件 A 在每次试验中出现的概率均为 p $(0<p<1)$，以 X 记在 n 次试验中事件 A 出现的次数，则 X 的可能取值为 0，1，…，n，其对应的概率为：

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n$$

称为以 n 和 p 为参数的二项分布，简记为 $X\sim B(n,p)$。

Bernoulli 分布可以看作 $n=1$ 时的二项分布，这对应于一次独立试验的情形。

4. **Poisson 分布**：若随机变量 X 可取一切非负整数值，且

$$P\{X=k\}=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\quad k=0,1,\cdots$$

式中，$\lambda>0$，称 X 服从参数为 λ 的 Poisson 分布，记为 $X\sim P(\lambda)$。

5. **几何分布**：在 Bernoulli 试验序列中，设事件 A 在每次试验中出现的概率均为 p $(0<p<1)$，以 X 记事件 A 首次出现的试验次数，则 X 的可能取值为 1，2，…，其对应的概率为：

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1},\quad k=1,2,\cdots$$

称为几何分布。

几何分布是一种等待分布，具有无记忆性。在离散型分布中，只有几何分布具有这种特殊的性质。

6. **Pascal 分布**：在 Bernoulli 试验序列中，设事件 A 在每次试验中出现的概率均为 p $(0<p<1)$，以 X 记事件 A 第 r 次出现的试验次数，则 X 的可能取值为 r，$r+1$，…，其对应的概率为：

$$P\{X=k\}=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r},\quad k=r,r+1,\cdots$$

称为 Pascal 分布。

对 Pascal 分布略加推广，即去掉 r 是正整数的限制，就得到负二项分布。

7. **负二项分布**：对于任意实数 $r>0$，称

$$P\{X=k\}=\binom{k+r-1}{k}p^r(1-p)^k,\quad k=0,1,2,\cdots$$

为负二项分布。

负二项分布通常用于替换 Poisson 分布。同 Poisson 分布一样，它也在非负整数上取值，但因为它包含两个参数，所以相比 Poisson 分布其变化更灵活。Poisson 分布的方差和均值相等，但负二项分布的方差大于均值，这说明当某类数据集观测到的方差大于均值时，负二项分布要比 Poisson 分布更合适。

8. **离散均匀分布**：如果分布列为：

$$p_k=\frac{1}{n},\quad k=1,2,\cdots,n$$

则称为离散均匀分布。

9. **连续均匀分布**（简称均匀分布）：如果密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}(b-a)^{-1}, & 若\ a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & 其他\end{cases}$$

式中，$a<b$，则称为区间 $[a,b]$ 上的均匀分布。

10. **正态分布**：如果密度函数为：