

软集合理论与决策

Soft Set Theory with Applications in Decision Making

龚科 肖智 刘永 著



科学出版社

软集合理论与决策

龚科 肖智 刘永 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

软集合理论作为新兴的解决不确定性问题的数学工具,近几年得到了飞速的发展,其优良的参数化特性使得软集合理论具有较强的适应性.本书从软集合及其在决策问题中应用的角度,按照较确定到较不确定的递进关系,介绍了基于模糊软集合的外贸出口量组合预测方法、双射软集合及其在外贸出口量决策规则获取中的应用、异或软集合及其在不完备信息系统约减中的应用、模糊双射软集合及其在内河岸线资源评价中的应用、考虑误分度的双射软集合及其在决策规则获取中的应用等理论与方法.本书的研究成果将丰富软集合理论的文献,为进一步深入研究软集合及拓展其在决策问题中的应用提供一些参考.

本书可供高等院校相关专业的师生以及从事数据分析及数学建模的研究人员参考和阅读.

图书在版编目(CIP)数据

软集合理论与决策/龚科,肖智,刘永著. —北京:科学出版社,2017.1
ISBN 978-7-03-050880-5

I. ①软… II. ①龚… ②肖… ③刘… III. ①数学方法—研究
IV. ①01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 295452 号

责任编辑:韩卫军/责任校对:彭珍珍
责任印制:余少力/封面设计:墨创文化

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

四川煤田地质制图印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017年1月第一版 开本:787×1092 1/16

2017年1月第一次印刷 印张:8 1/4

字数:200 000

定价:75.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前言

经济、管理、工程、环境、医学等领域的复杂问题所涉及的数据并不总是完全清晰的,其中包含了多种不确定性,而用于建模、推理和计算的传统工具主要是面向结构化、确定的数据.一些面向不确定、不清晰数据的不确定建模工具弥补了传统方法的局限.这些理论和工具主要是:概率论、模糊集理论、盲数理论、区间数学理论、粗糙集理论等.俄罗斯科学家 Molodtsov 认为这些理论有各自的不足:这些理论中用于参数确定的工具很少,即大量的参数无法确定,是使用这些理论的瓶颈.出现这些缺陷的原因则是表达参数的理论不充分,为了避免上述缺点, Molodtsov 在 1999 年给出了软集合的定义及理论,它能够有效地处理不确定、模糊及没有被清楚定义的对象.运用软集合理论描述或设置对象的方式与传统的数学方法有很大的不同.在软集合理论中不需要建立关于对象的数学模型、定义模型精确解的概念,它可以对对象的最初描述使用近似特征,不需要引入精确解,而且可以根据自己的喜好使用任意形式的参数形式,使得在处理不确定性问题时可以克服传统数学方法,如概率论、区间数学、模糊集合等的一些缺陷.另外,由于用软集合理论对对象进行近似描述时没有任何限制性条件,所以该理论使用起来非常方便,极易实践.它通过建立具有软约束和软目标的分析模型,以及采用软计算方法求解,具有易于处理、鲁棒性强、能更好地与现实系统相协调的优点.

软集合理论最近两年获得了飞速的发展,已经逐步扩展到模糊软集合、Vague 软集合、区间模糊软集合、粗模糊软集合、异或软集合,这些研究为软集合对多种不确定信息问题的描述打好了理论基础.同时,软集合在应用方面也获得了快速的发展.其中,参数约减作为软集合的重要应用领域得到了学者的一些关注.软集合将论域的幂集映射到参数集,通过该映射来描述对象.其参数可为多种形式,如文字、数据、描述逻辑表达式等;信息可为定量、语言、模糊、粗糙等信息.同时,论域幂集与参数映射的引入,使得数据的不完备性、不规则性能够通过软集合表示.这使得利用软集合作为数据描述工具,进行多种信息融合的分析与决策成为可能.

基于软集合理论的决策作为软集合理论及应用的一个分支,是近几年学者所关注的重要方面.本书提出基于模糊软集合的组合预测方法、双射软集合、异或软集合、模糊双射软集合、考虑误分度的双射软集合等理论与方法,并将其应用到外贸进出口时间序列分析、决策规则获取、内河岸线资源评估、不完备数据下的决策规则获取等决策问题领域,丰富了软集合理论的文献,同时也将为进一步面向大数据的分析及其在经济、管理、生物、工程等领域的应用提供理论及实践的借鉴.

本书共 9 章,首先阐述研究的背景和意义,并给出软集合理论的相关基础及文献综述;其次介绍软集合理论在时间序列分析中的应用;然后介绍双射软集合及其扩展在决策规则获取、评价问题、不完备信息分析等方面的应用;最后对本书进行总结,并探讨进一步的研究方向.

本书由龚科副教授任主编,负责全书的撰写和统稿,肖智教授作为顾问为本书的撰写提供了很多修改意见,刘永博士参与了第7,8章的编写.第7,8章的主要内容是龚科副教授在工作期间指导研究生王盼盼等完成的.本书得到国家自然科学基金项目(项目编号:71301180)、教育部人文社会科学基金项目(项目编号:12YJC630053)、博士后科学基金特别资助项目(项目编号:2015T80974)、博士后科学基金面上项目(项目编号:2014M560711)、重庆市自然科学基金项目(项目编号:cstcjjja30007)、重庆市教委科学技术基金项目(项目编号:KJ110414)的资助.同时,本书还得到重庆交通大学经济与管理学院的资助.本书涉及的成果得到了重庆大学经济与工商管理学院肖智教授、重庆交通大学经济与管理学院许茂增教授、电子科技大学经济与管理学院彭怡教授、内华达大学拉斯维加斯分校 Reza 教授和邓宏辉教授的指导和帮助.龚科副教授指导的硕士生王盼盼等也参与了本书部分研究工作.在此,向他们表示诚挚的谢意!

由于时间紧迫,作者学识有限,难免存在不妥之处,望广大同行、读者及时给予指正,并探讨可能的合作(龚科副教授的电子邮箱是 gks_cn@163.com).

作 者

2016年6月

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 研究的背景和意义	1
1.2 研究内容	2
1.3 研究思路和方法	3
1.4 创新之处	4
1.4.1 基于模糊软集合的外贸出口量时间序列组合预测模型	4
1.4.2 双射软集合及其在外贸出口量预测中的应用	5
1.4.3 异或软集合及其在外贸出口量预测中的应用	5
1.4.4 模糊双射软集合及其在内河岸线资源价值评价中的应用	5
1.4.5 考虑误分度的双射软集合及其决策规则获取	6
第 2 章 软集合相关基础理论	7
2.1 软集合初步	7
2.2 模糊软集合	9
第 3 章 基于模糊软集合的外贸出口量组合预测方法	12
3.1 引言	12
3.2 基于模糊软集合的组合预测模型	13
3.2.1 组合预测模型的定义	13
3.2.2 基于模糊软集合理论的权系数确定方法	13
3.2.3 算法	14
3.2.4 算法时间复杂度分析	15
3.2.5 算例	15
3.3 模型效果验证	22
3.4 本章小结	24
第 4 章 双射软集合及其决策规则获取应用	25
4.1 引言	25
4.2 双射软集合	26
4.2.1 双射软集合的定义	27
4.2.2 双射软集合的运算	28
4.2.3 两个双射软集合的依赖度	29
4.2.4 双射软集合决策系统	29
4.2.5 双射软集合决策系统约减	31
4.2.6 双射软集合的重要度	32
4.2.7 核双射软集合	32

4.2.8 诱导规则	32
4.3 双射软集合相关概念在管理领域中的含义	33
4.3.1 逻辑上的双射软集合	33
4.3.2 非逻辑上的双射软集合	34
4.3.3 一个双射软集合的决策例子	34
4.3.4 考虑元素权重的双射软集合决策系统参数约减	36
4.3.5 考虑元素权重的约减算法	37
4.4 双射软集合与经典信息系统的关系	38
4.4.1 经典信息系统的软集合形式	38
4.4.2 等价关系的表示	39
4.4.3 相关运算	39
4.5 基于双射软集合的外贸出口量预测方法	40
4.5.1 算法	40
4.5.2 算例分析	41
4.5.3 算例的预测过程	45
4.6 考虑近期数据优先的双射软集合外贸出口量预测方法	45
4.6.1 算法	45
4.6.2 算例分析	46
4.7 与其他方法的比较	48
4.8 本章小结	49
第5章 异或软集合及其在不完备信息下的决策规则获取	51
5.1 引言	51
5.2 异或软集合	51
5.2.1 异或软集合的定义	52
5.2.2 异或软集合的运算	54
5.2.3 异或软集合的依赖度	55
5.2.4 异或软集合决策系统	56
5.2.5 异或软集合决策系统的约减	57
5.2.6 核异或软集合	57
5.2.7 异或软集合决策系统诱导规则	58
5.2.8 一个异或软集合的应用例子	58
5.3 基于异或软集合的外贸出口量预测方法	62
5.3.1 算法	62
5.3.2 算例数据	62
5.3.3 算例分析	63
5.4 基于改进的异或软集合的不完备信息系统约减	65
5.4.1 不完备决策信息系统的异或软集合表示	66

5.4.2 改进的依赖度	67
5.4.3 基于异或软集合的不完备信息系统参数约减	68
5.4.4 算法	71
5.4.5 算例分析	71
5.5 本章小结	74
第6章 模糊双射软集合	75
6.1 引言	75
6.2 概念与运算	76
6.2.1 模糊双射软集合的概念	78
6.2.2 模糊双射软集合之间的依赖度	81
6.3 模糊双射软决策系统参数约减方法	82
6.3.1 模糊双射软决策系统的约减	82
6.3.2 模糊双射软决策系统的决策规则	86
6.3.3 最优截取水平 λ 的确定	87
6.4 考虑权重的模糊双射软决策系统参数约减方法	88
6.4.1 考虑权重的模糊双射软决策系统参数约减的定义与算法	88
6.4.2 两种模糊双射软决策系统参数约减方法的比较	89
6.5 本章小结	91
第7章 基于模糊双射软集合的内河岸线资源评价模型	92
7.1 引言	92
7.2 内河岸线资源评价指标体系的建立	93
7.2.1 指标选取原则	93
7.2.2 内河岸线资源评价指标体系	94
7.3 选取模糊双射软集合作为评价方法的依据	97
7.3.1 内河岸线资源数据及评价指标的特点	97
7.3.2 选取模糊双射软集合作为评价方法的依据	98
7.4 基于模糊双射软集合的内河岸线资源评价模型的构建	98
7.4.1 算法	98
7.4.2 数据获取	99
7.4.3 数据处理	99
7.4.4 模糊双射软集合向双射软集合的转化	102
7.4.5 评价过程	103
7.4.6 结果分析	104
7.5 本章小结	106
第8章 考虑误分度的双射软集合及其决策规则获取	107
8.1 引言	107
8.2 考虑误分度的双射软集合决策规则获取	108

8.2.1 考虑误分度的双射软集合.....	108
8.2.2 考虑误分度的双射软集合决策系统的依赖度.....	109
8.2.3 考虑误分度的双射软集合决策系统的参数约减.....	111
8.3 算例分析	112
8.4 本章小结	113
第 9 章 主要结论及进一步的研究方向	114
9.1 主要结论	114
9.2 进一步的研究方向.....	115
参考文献.....	117

第1章 绪 论

1.1 研究的背景和意义

Molodtsov^[1]提出了软集合理论这一新的不确定数学工具,第一次较系统地介绍了软集合的一些基本理论及其应用,并将软集合理论作为处理不确定、模糊和不能精确定义的对象的一种通用的数学工具.同时,Molodtsov 还对软集合的运算进行了研究,并在此基础上提出了软积分、软微分、软极限、软概率等概念.Maji 等^[2]进一步详细阐述了软集合相关定义和基本运算性质,使得软集合决策理论与方法的产生成为可能,并定义了软集合的等价、并集、子集、超集,以及软集合的二元运算,如 AND, OR, 交集,补集以及 De Morgan 法则.Ali 等^[3]对文献[2]的一些运算和定义进行了纠正,定义了新的软集合的严格交集和严格并集等运算,进一步完善了软集合的基本定义及运算.这标志着经典软集合理论的初步建立.

软集合理论近几年在不同类型的不确定数据的表示上获得了较大的发展.在软集合与模糊集结合方面,Majumdar 和 Samanta^[4]定义了广义模糊软集合,Yang 等^[5]提出了区间模糊软集合,Nazmul 等^[6]提出了梯形模糊软集合.软集合同时还被扩展到拓扑^[7]、D-S 证据理论模糊软集合^[8]、直觉模糊软集合^[9]、Vague 软集合^[10-12]、粗软集合^[13].在群、环、BCK/BCI、格等代数结构上,也有学者在研究^[14-23]软集合.软集合理论的优势使得软集合的应用领域逐步扩大,目前已经应用在 uni-int 问题^[24, 25]、组合预测^[26]、不完备数据处理^[27]、医疗诊断^[8, 28]、供应商选择^[29]、聚类分析^[30]等领域.

软集合的参数约减是软集合研究领域的一个重要分支.Maji 等^[31]提出软集合参数约减的定义.Chen 等^[32]提出新的软集合参数约减定义.Kong 等^[33]分析了软集合的次优选择和附加参数的问题,提出标准参数约减的算法.邹艳等^[34]提出一种基于最优对象不变的软集合参数约减.Gong 等^[35]提出双射软集合及其运算、双射软集合决策系统、基于双射软集合参数约减的规则挖掘,并将其应用于消费者汽车选购倾向挖掘.Xiao 等^[36]提出异或软集合及其运算,并对文献[37]提出的集值信息系统约减方法进行改进,将其应用于不完备集值信息系统决策规则挖掘.肖智等^[38]提出基于双射软集合决策系统的参数约减和决策规则挖掘,并将其与粗糙集方法进行比较.Gong 等^[39]对双射软集合进行扩展,提出一种基于模糊双射决策系统的参数约减方法,挖掘模糊信息的决策规则.Deng 和 Wang^[40]提出一种对象-参数方法,用来预测不完备模糊软集合中的未知信息,这有利于识别大数据中可能缺失或错误的信息.Feng 等^[41]提出一种区间模糊软集合的参数约减.Ma 等^[42]对 Kong 等^[33]提出的算法进行改进,提出一种新的标准参数约减算法.Ali^[43]利用 Pawlak 的近似空间于软集合中,提出一种软集合的约减方法,该方法是对参数进行约减,而不是对参数的子集进行约减,因此更适合于大数据问题的约减.

国内对软集合的研究尚处于起步阶段,关于软集合的相关论文主要是运用软集合做信息识别、评价决策等问题.孙玉真和姚炳学^[44]阐述了软集合的相关概念和性质后,给出了软群的定义,并对软群的软同态做了进一步研究.邹艳等提出一种基于最优对象不变的软

集合参数约减. 邹艳和肖智^[45]定义了软集合理论中的差运算、选择运算和投影运算, 探讨了关系代数和软集合的关系, 运用关系代数的选择、投影、并、差等运算实现了软集合参数约减算法. 孙智勇和刘星^[46]提出一种基于模糊软集合的税收组合预测方法. 肖智等^[38]提出一种基于双射软集合决策系统的参数约减方法. 缪彬和魏巍^[47]提出一种基于双射软集合决策系统的改进的参数约减方法.

1.2 研究内容

本书围绕着软集合理论在决策中的应用这一主题进行研究, 研究框架如图 1.1 所示. 全书共 9 章, 研究的主要内容如下.

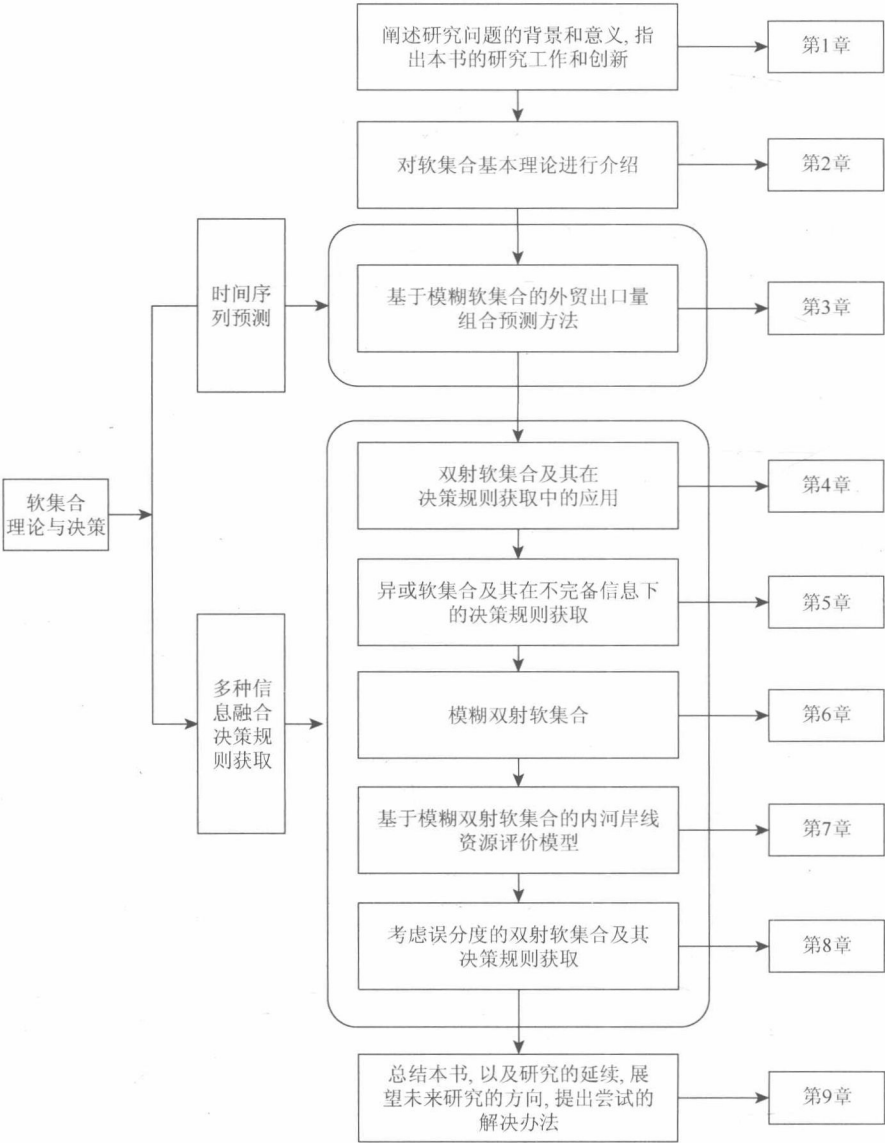


图 1.1 本书研究框架

第1章, 绪论. 主要介绍本书的研究背景, 并引出研究的问题, 明确研究的目的和意义, 提出研究的思路和方法, 最后阐述本书的创新之处.

第2章, 软集合相关基础理论. 首先, 为了方便读者阅读和了解软集合理论, 对软集合的基本定义、运算及模糊软集合进行介绍; 然后, 对软集合理论的研究现状进行分析和评述.

第3章, 基于模糊软集合的外贸出口量组合预测方法. 提出基于模糊软集合的外贸时间序列组合预测模型. 为验证模型的有效性, 对前人提出的组合预测方法进行综述及比较分析, 并采用多种实际的外贸出口量时间序列进行实验比较.

第4章, 双射软集合及其在决策规则获取中的应用. 提出双射软集合, 定义其运算, 证明其性质及在管理领域的涵义及潜在应用; 考虑外贸出口量预测的定性信息因素, 提出基于双射软集合的外贸出口预测方法, 并进行算例分析; 进一步考虑近期数据优先的双射软集合外贸出口量预测方法与算法及相应的算例分析; 最后, 对所提出的方法和其他传统方法进行比较.

第5章, 异或软集合及其在不完备信息下的决策规则获取中的应用. 在双射软集合的基础上, 考虑异或信息, 提出异或软集合及其运算并证明其性质; 并考虑外贸出口量预测的定性信息中包含异或信息的情况, 进一步提出基于异或软集合的外贸出口量预测方法, 且用算例说明预测方法的原理.

第6章, 进一步拓展了双射软集合的概念, 考虑模糊性, 提出双射软集合的一种子类型——模糊双射软集合, 定义模糊双射软集合之间的严格 AND、松散 AND 运算; 并在此基础上, 研究模糊双射软集合参数之间的关系, 提出模糊双射软集合参数依赖度的概念, 定义模糊双射软集合决策系统, 提出基于依赖度的模糊双射软集合决策系统参数约减方法. 同时, 考虑元素权重, 提出考虑依赖度的模糊双射软集合决策系统参数约减方法, 并用算例对两种方法进行对比.

第7章, 在第6章的基础上, 模糊双射软集合对软集合进行扩展, 通过计算各指标之间的依赖度获取指标的重要度, 整个岸线资源评价体系可以转化为一个模糊双射软集合决策系统, 提出基于模糊双射软集合的岸线资源价值评价模型.

第8章, 为了使参数依赖度方法能有效处理含噪声的双射软集合决策系统参数约减, 本章引入误分度来刻画噪声强度, 提出一种考虑 β -误分度的双射软集合决策系统参数约减方法. 最后, 将文献的数据增加了 8 个对象作为算例, 对考虑 β -误分度的算法和文献[48]的算法进行比较.

第9章, 结论与研究展望. 总结全书, 指出本书研究的局限性与不足, 并对后续研究进行展望.

1.3 研究思路和方法

本书按照从特殊到一般、从较确定到较不确定信息的思路, 首先, 研究双射软集合(较确定)的性质和运算, 提出基于双射软集合的参数约减方法; 然后, 考虑存在异或信息(不完备信息)的情况, 提出基于异或软集合的参数约减方法; 最后, 进一步将以上研究内容推广

到考虑更加不确定的模糊软集合和区间模糊软集合。
本书研究采取图 1.2 所示的研究思路。

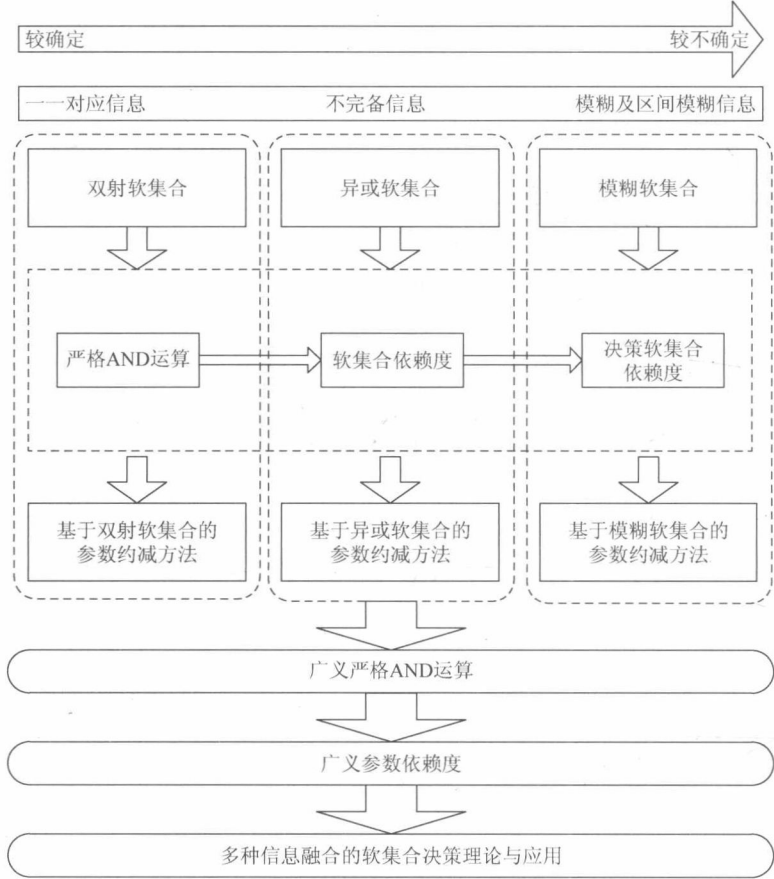


图 1.2 技术路线图

1.4 创新之处

1.4.1 基于模糊软集合的外贸出口量时间序列组合预测模型

组合预测中采用的单个预测是对时间序列的描述, 这些描述以精度的形式反映出来, 可认为是模糊的(精度高、低等). 组合预测方法的关键在于如何确定组合预测的权重.

鉴于此, 本书提出基于模糊软集合的外贸时间序列组合预测模型^①. 为验证模型的有效性, 对前人提出的组合预测方法进行综述及比较分析, 并采用多种实际的外贸出口量时间序列进行实验比较. 结果表明, 本方法提高了预测的精度, 算法时间复杂度低、鲁

① 本模型主要成果已发表在 *Journal of Computational and Applied Mathematics*.

棒性高,并且对组合预测数据的限制条件小,能够满足政府对外贸出口预测的需求。

1.4.2 双射软集合及其在外贸出口量预测中的应用

基于定量信息的 ARIMA、灰色预测、支持向量机回归、多元回归分析、主成分分析法、因子分析等现有外贸出口量预测分析方法不能处理考虑外贸出口的定性信息,如贸易壁垒、政策因素等;而软集合的参数集(每个参数是一个词或者是一个句子),既能够描述定量信息,也可描述这些定性信息。

因此,本书提出双射软集合^①,定义其运算,证明其性质,分析其在管理领域的涵义及潜在应用。考虑外贸出口量预测的定性信息因素,利用双射软集合决策系统的约减,提取预测规则,提出基于双射软集合的外贸出口预测方法,并进行算例分析。进一步考虑近期数据优先的双射软集合外贸出口量预测方法,进行相应的算例分析。最后,对本书提出的方法和其他传统方法进行比较。结果表明,传统的考虑定量信息的方法不能用于考虑外贸定性信息的多种信息融合的外贸出口量预测问题,而基于双射软集合的外贸出口预测方法能够处理多种信息融合的外贸出口量预测问题,对样本的要求低,限制条件少,得到的预测规则直观。

1.4.3 异或软集合及其在外贸出口量预测中的应用

在影响外贸的定性信息中,常常存在多种信息同时作用,但是不能确定到底是哪种信息的情况,这样的信息称为异或信息。基于双射软集合的外贸出口预测方法不能处理这样的信息。

因此,本书在双射软集合的基础上,考虑异或信息,提出异或软集合及其运算,并证明其性质^②。考虑外贸出口量预测的定性信息中包含异或信息的情况,进一步提出基于异或软集合的外贸出口量预测方法,并用算例说明预测方法的原理。算例结果表明,异或软集合在双射软集合的基础上,考虑异或信息,进一步扩大方法的适用范围(可处理异或信息),能够获得相应的预测规则。通过预测规则,在给定未来的一些信息后,可以预测外贸出口量。

1.4.4 模糊双射软集合及其在内河岸线资源价值评价中的应用^③

传统的内河岸线资源评价方法,如限制因素法、主成分分析法、聚类分析法、灰色系统法等,考虑的数据为定量、确定的数据,不能直接处理定性信息,且对样本有一定的限制性要求。而一些定性评价指标难以直接量化,如政策因素、对生态环境的影响等。此时,传统内河岸线资源评价方法不适用。而软集合对对象的最初描述为近似描

① 双射软集合主要成果已发表在 *Computers and Mathematics with Applications*。

② 异或软集合主要成果已发表在 *Computers and Mathematics with Applications*。

③ 模糊双射软集合主要成果发表在 *Applied mathematical modelling*。

述, 参数设置无限制, 可以是文字、数据、谓词、描述逻辑等形式, 能直接描述定性、定量信息.

因此, 在双射软集合的基础上, 考虑模糊信息, 提出模糊双射软集合概念. 对软集合参数之间的关系进行深入研究, 得出模糊双射软集合的性质和严格 AND 运算. 在严格 AND 运算的基础上, 定义模糊双射软集合之间的依赖度、模糊双射软集合决策系统的依赖度、模糊双射软集合决策系统的约减、参数重要度、决策规则, 提出一种基于依赖度的模糊双射软集合决策系统参数约减算法.

1.4.5 考虑误分度的双射软集合及其决策规则获取

双射软集合决策系统约减的方法都是基于参数依赖度的, 其中, 参数依赖度的计算方式基于完全分类, 在某些极端条件下, 例如, 在试卷分析中, 99 个数学好且英语好的同学能够分类到总成绩好中, 而仅有 1 个数学好且英语好的同学不能划分到该决策类中, 则以上方法认为该案例中数学好且英语好与总成绩好的依赖关系不存在, 这使得依赖关系不能很好地反映实际情况.

因此, 为了使参数依赖度方法能有效处理含噪声的双射软集合决策系统参数约减, 本书引入误分度^[22]来刻画噪声强度, 在可容忍的噪声强度范围内, 重新定义双射软集合决策系统参数约减算法, 以提高决策系统的容错能力. 通过引入误分度, 重新定义双射软集合之间的依赖度, 提出一种考虑 β -误分度的双射软集合决策系统参数约减方法.

第2章 软集合相关基础理论

2.1 软集合初步

定义 2.1^[1] (F, E) 是论域 U 上的一个软集合当且仅当 F 是 E 到 U 的所有子集的一个映射.

换种定义方式: 设 U 是初始论域, E 是参数集. 集合 U 的幂集为 $P(U)$, 当且仅当 F 是 E 到 U 的所有子集的一个映射时, 称 (F, E) 是 U 上的一个软集合. 每个 $F(e), e \in U$ 都可以看作是软集合 (F, E) 中 e -元素的集合, 或者是软集合 (F, E) 中 e -近似元素的集合.

为生动地解释软集合的定义, 可考虑如下例子.

例 2.1^[2, 49] 假设软集合 (F, E) 描述了 X 先生打算购买的房子的特点.

U 是考虑的房子集合.

E 是参数集, 每个参数是一个词或者是一个句子, 用于描述房子的特点. 其中, 参数分别代表昂贵、漂亮、木头、便宜、绿化好、现代的、维护良好、维护不好.

在这个例子中, 可以定义一个软集合来指出哪些房子是昂贵的房子、漂亮的房子等.

值得注意的是, F 可以是随意的, 也可以通过某些评判标准来确定. 其中某些参数的 $F(e)$ 可以为空, 且它们之间的交集也可以非空. 也就是说可能不存在绿化好的房子, 也可能存在漂亮又便宜的房子. 这里可假设 U 中有六种房子, 且

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

其中, e_1 表示参数“昂贵”, e_2 表示参数“漂亮”, e_3 表示参数“木头”, e_4 表示参数“便宜”, e_5 表示参数“绿化好”.

假设

$$\begin{aligned} F(e_1) &= \{h_2, h_4\}, & F(e_2) &= \{h_1, h_3\}, & F(e_3) &= \{h_3, h_4, h_5\} \\ F(e_4) &= \{h_1, h_3, h_5\}, & F(e_5) &= \{h_1\} \end{aligned}$$

软集合 (F, E) 是定义在 U 上的参数化族 $\{F(e_i), i=1, 2, \dots, 5\}$, 并且给出了近似描述一个对象的集合. 考虑映射 F , 这里是 $\text{house}(\cdot)$ 表示待填充到其中的参数 $e \in E$. 因此, 表示 $\text{house}(\text{昂贵})$ 的函数值为集合 $\{h_2, h_4\}$.

这样, 我们可将软集合 (F, E) 视作如下的近似集合:

$$(F, E) = \text{昂贵的房子} = \{h_2, h_4\}$$

$$\text{漂亮的房子} = \{h_1, h_3\}$$

$$\text{木头房子} = \{h_3, h_4, h_5\}$$

$$\text{便宜的房子} = \{h_1, h_3, h_5\}$$

$$\text{绿化好的房子} = \{h_1\}$$

这里每个近似都有两部分:

- (i) 参数 p ;
- (ii) 近似值域 v (或者简单地称为值域 v).

例如, 对于近似“昂贵的房子 = $\{h_2, h_4\}$ ”, 我们有如下的表示:

- (i) 参数名称为“昂贵”;
- (ii) 近似值域或者是值域为 $\{h_2, h_4\}$.

这样, 软集合 (F, E) 可被视为如下的近似集合:

$$(F, E) = \{p_1 = v_1, p_2 = v_2, \dots, p_n = v_n\}$$

为了满足软集合在计算机中的存储, 可用表 2.1 的形式表示这个软集合.

表 2.1 软集合的表格形式

U	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
h_1	0	1	0	1	1
h_2	1	0	0	0	0
h_3	0	1	1	1	0
h_4	1	0	1	0	0
h_5	0	0	1	1	0
h_6	0	0	0	0	0

例 2.2^[1] Zadeh 的模糊集^[50]可被认为是一种特殊的软集合. 假设 A 是一个模糊集, 且 μ_A 是模糊集 A 的隶属度函数, 即 μ_A 是论域 U 在 $[0, 1]$ 上的映射.

考虑隶属度函数 μ_A 的 α 水平截集如下:

$$F(\alpha) = \{x \in U \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in [0, 1] \quad (2.1)$$

如果已知 F 的参数化族, 则隶属度函数 $\mu_A(x)$ 可以用如下的式子代替:

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= \sup_{\alpha \in [0, 1]} \alpha \\ &\quad x \in F(\alpha) \end{aligned} \quad (2.2)$$

因此, Zadeh 的模糊集 A 可定义为软集合 $(F, [0, 1])$.

定义 2.2^[2] 软集合 (F, E) 所有值的分类称为软集合的值分类 (value class), 并且表示为 $C_{(F, E)} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 显然, $C_{(F, E)} \subseteq P(U)$.

定义 2.3^[2] 对于定义在论域 U 上的软集合 (F, A) 和 (G, B) , 若满足下列条件:

- (1) $A \subset B$,
- (2) $\forall \varepsilon \in A$, $F(\varepsilon)$ 与 $G(\varepsilon)$ 是同样的近似关系,

则称 (F, A) 是 (G, B) 的软子集, 记为 $(F, A) \tilde{\subset} (G, B)$

定义 2.4 定义在论域 U 上的两个软集合 (F, A) 与 (G, B) 的并集, 记为 (H, C) , 其中 $C = A \cup B$, 且 $\forall \varepsilon \in C$,

$$H(\varepsilon) = \begin{cases} F(\varepsilon), & \varepsilon \in A - B \\ G(\varepsilon), & \varepsilon \in B - A \\ F(\varepsilon) \cup G(\varepsilon), & \varepsilon \in A \cap B \end{cases} \quad (2.3)$$