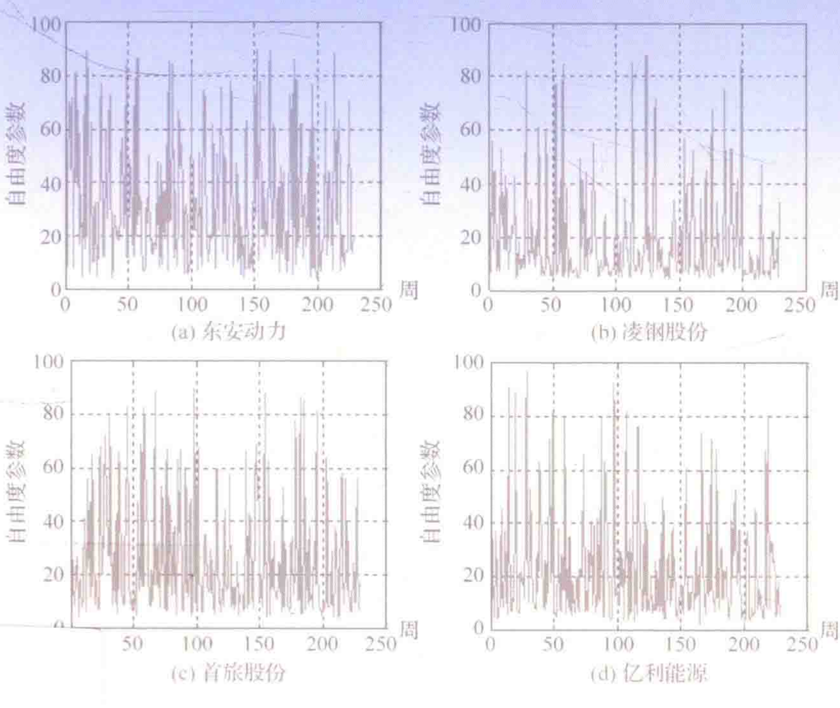
基于高阶矩的投资组合优化研究

彭胜志 著



中国林业出版社

教育部人文社会科学研究青年基金项目研究成果
（项目编号：12YJC790150）

基于高阶矩的投资组合优化研究

彭胜志　著

中国林业出版社

图书在版编目（CIP）数据

基于高阶矩的投资组合优化研究 / 彭胜志著 . —北京：中国林业出版社，2016. 6
ISBN 978-7-5038-8606-5

Ⅰ. ①基… Ⅱ. ①彭… Ⅲ. ①金融投资 - 研究 - 中国
Ⅳ. ①F830. 59

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 146363 号

出版 中国林业出版社（100009 北京西城区刘海胡同 7 号）
网址 lycb. forestry. gov. cn
E-mail forestbook@ 163. com **电话** 010-83143543
发行 中国林业出版社
印刷 北京北林印刷厂
版次 2016 年 6 月第 1 版
印次 2016 年 6 月第 1 次
开本 880mm × 1230mm 1/32
印张 5
字数 150 千字
印数 1 ~ 1000 册
定价 35. 00 元

前　言

马克维茨的均值-方差模型具有重要的意义，它使金融学摆脱了以往纯粹的描述性研究和单凭经验操作的状态，为现代投资组合理论的发展奠定了基础。均值-方差模型与期望效用原则具有一致性的充分必要条件为投资者的效用函数是二次函数或者风险资产的收益率服从正态分布。然而遗憾地是，该充分必要条件并不具有现实意义。国内外众多实证研究已经表明，风险资产收益率并不服从正态分布而投资者的效用函数也不是二次的。鉴于此，投资者在进行投资组合优化决策时应考虑高阶矩的影响，否则便会产生次优决策。目前，国内外很多学者已经对基于高阶矩的投资组合优化问题进行了研究，这些研究主要可以分为直接法和间接法。所谓直接法是将投资组合收益率的高阶矩或将包括高阶矩在内的各阶矩构成的函数直接作为目标函数的优化方法；而所谓间接法是通过期望效用函数的泰勒级数展开将最大化投资者期望效用的投资组合优化问题转化为基于高阶矩的投资组合优化问题的方法。虽然现有的研究已经比较系统深入，但仍存在诸多需要完善之处。本书以前人研究成果为基础，对基于高阶矩的投资组合优化问题进行扩展研究，使得基于高阶矩的投资组合优化研究更加系统完善，并使其真正成为投资者进行投资组合优化决策时可供参考的方法和工具。

本书的主要内容有四个部分。首先，在直接法下，对均值-方差-偏度-峰度框架下的投资组合优化问题进行扩展研究，提出求解高阶投资组合优化问题的半定规划松弛算法，解决了问题的高阶性和非凸性所带来的模型求解困难问题。其次，在间接法下，对基于高阶矩的投资组合优化问题进行扩展研究，在 HARA 效用函数的背景下，研究了泰勒级

数对效用函数的收敛条件，使得泰勒级数成为期望效用函数的合理近似，从而保证投资组合优化问题的近似解收敛于真实解，进而将间接法下基于高阶矩的投资组合优化研究从指数型效用函数扩展到 HARA 效用函数范围。再次，解决了基于高阶矩的动态投资组合优化研究中所遇到的条件协偏度阵和条件协峰度阵难于估计的问题，实现了基于高阶矩的投资组合优化研究由静态向动态方向的扩展。构建了多元风险资产收益率分布时变模型，并提出模型识别、参数估计、模型检验方法和条件协偏度矩阵、条件协峰度矩阵的估计方法；然后利用所构建的模型研究高阶动态投资组合优化问题，构建了高阶动态投资组合优化模型并提出模型求解方法。最后，以前四阶矩为基础，进一步深化基于高阶矩的投资组合优化研究，提出考虑投资组合收益率完全分布信息的投资组合优化方法，将基于高阶矩的投资组合优化研究从只考虑前四阶矩向考虑投资组合收益率完全分布信息方向扩展。为了获得投资组合收益率分布的近似解析式，以投资组合收益率的前四阶矩为基础，提出基于 Gram-Charlier 展开的投资组合收益率分布近似模型，并对基于 Gram-Charlier 展开的投资组合收益率分布近似模型的有效性进行分析；然后根据所提出的基于 Gram-Charlier 展开的收益率分布近似模型进行投资组合优化研究，将相对熵作为投资组合收益率近似分布与目标分布之间距离的量化指标，从而构建最小化相对熵的投资组合优化模型并提出模型的求解方法。本书在继承现有研究成果的基础上，突破现有研究的局限性，使得基于高阶矩的投资组合优化研究更加系统深入，因而具有重要的理论价值与应用价值。

最后，谨向为本书写作提供了帮助和支持的各位老师及我的家人表示衷心的感谢！

著 者

2016 年 6 月

目　录

第一章

绪　论

1.1 选题背景与问题提出

1.1.1 选题背景

1952 年哈利·马克维茨在《金融杂志》上发表了题为《投资组合选择》的学术论文，首次将风险资产的期望收益与代表风险的方差结合起来研究资产组合选择问题，提出了均值—方差投资组合模型，自此，有关投资组合优化问题的讨论主要是在收益与风险的二维框架内展开的。马克维茨(1952)认为，在选择最优投资组合时，给定组合的预期收益，理性投资者会选择使风险达到最小的投资组合，或者给定组合的风险，理性投资者选择使预期收益达到最大的投资组合，因而建立了如下的均值—方差模型：

$$\operatorname*{Min}_{\{x\}} x^T \{\sigma_{ij}\}_{n\times n} x \quad s.t.\ x^T\mu = a, x^T[1] = 1 \tag{1-1}$$

或

$$\operatorname*{Max}_{\{x\}} x^T\mu \quad s.t.\ x^T \{\sigma_{ij}\}_{n\times n} x = b, x^T[1] = 1 \tag{1-2}$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 为投资组合中风险资产投资份额向量，$\{\sigma_{ij}\}_{n\times n}$ 为风险资产收益率的协方差矩阵，$\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)^T$ 为风险资产的期望收益率向量，a 为给定的投资组合期望收益水平，b 为给

定的投资组合方差，[1] 为 n 阶单位列向量[1]。

马克维茨的均值—方差模型具有划时代的意义，它使金融学摆脱了以往纯粹描述性的研究和单凭经验操作的状态，数量研究方法开始进入金融领域，从而为现代投资组合理论的发展奠定了基础。然而尽管如此，对均值—方差模型有效性的质疑却纷至沓来。均值—方差模型与期望效用原则具有一致性的充分必要条件为投资者的效用函数是二次函数或者风险资产的收益率服从正态分布[2,3]。然而遗憾的是，该充分必要条件并不具有现实意义。首先，国内外众多实证研究已经表明，风险资产收益率并不服从正态分布，而是具有非对称性和尖峰厚尾等明显的非正态分布特征。Samuelson（1970）很早就通过实证分析指出风险资产收益率分布具有非对称和尖峰厚尾特征[4]。Campbell 和 MacKinlay（1997）也指出风险资产收益率分布具有非对称性和尖峰厚尾特征，并且发现对于同一股票而言，月收益率数据相比年收益率数据，具有更加明显的非正态特征，而日收益率数据相比月收益率数据，具有更明显的非正态特征，即越是高频的数据，收益率数据越偏离正态分布[5]。Harvey（1995）和 Bekaert et al.（1998）通过实证分析指出相比成熟股票市场而言，新兴股票市场中的股票收益率分布具有更加明显的非正态特征[6,7]。其次，国内外众多研究已经发现，投资者的效用函数是非二次的。Arrow（1971）指出投资者的效用函数 $u(\cdot)$ 不仅应通过 $u'(\cdot)\geqslant 0$ 和 $u''(\cdot)\leqslant 0$ 来反映其不满足性和风险厌恶特征，还应当满足条件 $u'''(\cdot)\geqslant 0$ 以反映其递减的绝对风险厌恶特征[8]。随着财富的递增，不仅投资者的风险厌恶程度会发生变化，而且投资者对风险的敏感性也会发生变化，如高收入个体通过存款来应对突发情况的需求会减弱而进行高风险投资的需求会有所提高，因而 Kimball（1900）在 Arrow 等人研究成果的基础上，定义 $(-u''')/u''$ 来刻画投资者面临风

险时所表现的谨慎性，指出投资者的效用函数 $u(\cdot)$ 应满足条件 $u''''(\cdot)\leqslant 0$ 来反映投资者的谨慎性递减特征[9]。作为二次效用函数由于其无法满足条件 $u'''(\cdot)\geqslant 0$ 和 $u''''(\cdot)\leqslant 0$，因而已不具有现实意义。

鉴于风险资产收益率分布的非对称性和尖峰厚尾特征，方差已经无法充分地描述投资组合收益率的风险，高阶矩(偏度和峰度)便成为除方差之外刻画投资组合收益率风险的重要因素，较大的三阶矩(偏度)意味着较大的收益率为正的可能性，而较小的四阶矩(峰度)则意味着较小的极端事件发生的可能性。Samuelson(1970)证明了 MV 模型的局限性以及投资组合决策与高阶矩(偏度和峰度)的相关性[4]。另外一方面，投资者的效用函数也与投资组合收益率的高阶矩具有紧密的内在联系。Arrow (1964)、Pratt (1964)、Jondeau 和 Rockinger (2006), Guidolin 和 Timmermann (2008)等从最大化投资者的期望效用角度进行了投资组合优化研究[10~13]。他们以投资组合收益率的数学期望为展开点，对投资者的期望效用函数进行了泰勒级数展开并进行四阶截断，得：

$$E_{t-1}[U(W_t)] \approx U(\bar{W}_t) + U^{(1)}(\bar{W}_t)E_{t-1}[W_t - \bar{W}_t] + \frac{1}{2}U^{(2)}(\bar{W}_t)E_{t-1}[W_t - \bar{W}_t]^2 + \frac{1}{3!}U^{(3)}(\bar{W}_t)E_{t-1}[W_t - \bar{W}_t]^3 + \frac{1}{4!}U^{(4)}(\bar{W}_t)E_{t-1}[W_t - \bar{W}_t]^4 \tag{1-3}$$

式(1-3)实现对期望效用函数的多项式近似描述，由式(1-3)可以看出，$u'''(\cdot)\geqslant 0$ 和 $u''''(\cdot)\leqslant 0$ 暗示着投资者对投资组合收益率三阶矩的偏好和对四阶矩的厌恶。投资者在进行投资组合优化决策时，应当通过最大化三阶中心矩(偏度)或者最小化的四阶中心矩(峰度)来实现其期望效用函数的最大化。

通过以上分析可以看出，由于风险资产收益率分布的非正态特

征和投资者的非二次效用函数，投资者在进行投资组合优化决策时应考虑高阶矩的影响，否则便会产生次优决策。

1.1.2 问题提出

目前，国内外很多学者已经对基于高阶矩的投资组合优化问题进行了研究，一般可以将这些研究分为直接法和间接法两种[14~16]。所谓直接法是将投资组合收益率的高阶矩或将由包括高阶矩在内的各阶矩构成的函数直接作为目标函数的优化方法[17,18]；而所谓间接法是通过期望效用函数的泰勒级数展开将最大化投资者期望效用的投资组合优化问题转化为基于高阶矩的投资组合优化问题的方法[12,19]。尽管目前所进行的研究已经较为系统深入，但仍有不完善之处，主要存在如下问题：

(1) 目前直接法下，以高阶矩为目标函数的投资组合优化问题主要是在均值—方差—偏度框架下进行，而较少考虑峰度的影响。如 Lai(1991) 和 Sunh(2003) 等使用多项式目标规划对带偏度风险的投资组合优化问题进行决策[17,18]；Joro(2005) 等也对带有偏度风险的投资组合优化问题进行了研究，并进一步地给出了其在三维空间中的有效前沿[20]。但是 Hwang(1999) 已经证明了投资者总是偏爱偏度而厌恶峰度而且峰度比偏度和方差更具有影响力，并指出投资组合优化问题应考虑高阶矩，尤其是峰度的影响[21]，所以投资组合优化问题有必要考虑峰度的影响。投资组合优化问题很少考虑峰度影响的原因主要在于问题的高阶性与非凸性[22~25]所导致的模型求解困难。目前仅有的几个考虑峰度的投资组合优化问题的求解方法均存在一定的缺陷，无法获得真正的最优解，因而该问题有待进一步研究。

(2) 目前间接法下，基于高阶矩的投资组合优化研究基本上是通过假设投资者的效用函数为指数型效用函数来进行，而忽略了其他类型的效用函数。如 Jondeau 等(2004) 在效用函数为指数型效用函数

的假设下，利用效用函数的泰勒级数展开，讨论了非正态条件下的投资组合优化问题[12]。蒋翠侠等(2007)在效用函数为指数型效用函数的假设下，通过效用函数的泰勒级数展开，讨论了考虑高阶矩风险的动态投资组合优化问题[26]。目前基于期望效用理论的高阶投资组合优化问题的具体做法为对投资者的期望效用函数在收益率的数学期望处展开(一般为四阶展开)，从而获得投资者期望效用函数的近似函数，进行优化求解。该方法的优点在于能够直接反映投资者追求效用最大化的目标，并且在期望效用的优化过程中将对收益率分布的假设转化为收益率各阶矩的假设，从而使问题得以简化[19]。但该方法的局限性在于泰勒级数对效用函数的收敛条件十分严格，除指数型效用函数的泰勒级数无条件收敛外，其他类型的效用函数则只有当收益率落入特定区间时才能确保收敛性[12,22]。因而目前的研究常常通过假设指数型效用函数的方式来确保收敛性。然而由于投资者的偏好各有不同，仅仅通过指数型效用函数来描述投资者的效用函数难免以偏概全，因而有必要在保证收敛性的前提下，进行基于其他类型效用函数的高阶投资组合优化研究。

(3)目前基于高阶矩的投资组合优化研究大多是从静态角度进行的，没有考虑到风险资产收益率分布的时变性。事实上，对于风险资产收益率序列而言，其收益率分布是时变的，其中条件期望呈现出一定的自相关性，条件方差体现出一定的聚集性，条件高阶矩也具有一定的时变特征[27,28]，因而基于高阶矩的投资组合优化研究应当从动态角度进行。进行考虑风险资产收益率分布时变性的投资组合优化研究需要对多元风险资产收益率各阶矩的时变性进行建模。很多学者已经对多元条件方差的时变性建模问题进行了研究，如Engle和Sheppard于2001年提出了DCC-GARCH模型[29]，该模型提供了条件协方差阵的估计方法，这为考虑条件方差时变性的动态投资组合研究创造了条件，而目前考虑高阶矩时变性的投资组合优化

研究却进展十分缓慢。原因主要在于条件协偏度阵和条件协峰度阵待估参数较多，极易陷入维数灾难。解决该问题，有赖于构建一个有效的多元风险资产收益率分布时变模型，其有效性在与该模型应当既能够很好地描述多元风险资产收益率分布的时变特征，又具有较好的实用性，便于进行模型参数的估计和条件协偏度阵、条件协峰度阵的估计。

(4)目前基于高阶矩的投资组合优化研究仅仅关注了投资组合收益率的前四阶矩的影响，却忽略了投资组合收益率分布的其他特征。当前基于高阶矩的投资组合优化研究中，无论是直接以高阶矩为目标函数的直接法还是以最大化期望效用函数为目标的间接法，都立足与一个共同的假设，即假设投资者主要关注投资组合收益率的前四阶矩，投资者的偏好通过投资组合收益率的前四阶矩便可以充分描述。然而实际情况是，投资者并不总是只关注前四阶矩，由于其投资目的的不同，投资者的偏好往往需要依靠某种收益率分布来表达。尽管方差、偏度和峰度能够很好地刻画投资组合所面临的风险，但并不能描述投资组合收益率分布的全部信息[30]。几个完全不同的收益率分布可能具有相同的前四阶矩[31]，因而只通过收益率的前四阶矩并不一定能够确定收益率服从何种类型的分布。由此可见，当投资者偏好于某种类型的收益率分布时，仅仅通过考虑高阶矩所进行的投资组合优化研究便无法满足投资者的要求。这就要求投资者既要考虑高阶矩影响，又不能忽略收益率分布的其他信息，进行符合其偏好的投资组合优化决策。

综上所述，尽管国内外众多学者已经对基于高阶矩的投资组合优化问题进行了比较系统深入的研究，但在这一研究方向上，仍然存在着一些有待进一步解决的问题。

1.2 研究目的和研究意义

1.2.1 研究目的

本文的主要研究目的是进一步完善基于高阶矩的投资组合优化研究，在继承现有研究成果的基础上，突破现有研究的局限性，力求解决上述问题，使基于高阶矩的投资组合优化研究更加系统深入。具体来说，本文将通过文献研究、规范研究和实证研究等方法，从直接法角度，对均值—方差—偏度—峰度框架下的投资组合优化问题进行研究，力求解决由于考虑高阶矩所导致的高阶性与非凸性所带来的模型求解困难；从间接法角度，对效用函数泰勒级数的收敛条件进行研究，力求解决目前主要采用指数型效用函数进行泰勒级数展开的问题，为其他类型效用函数的运用开辟条件；从动态角度，对考虑高阶矩时变性的动态投资组合优化问题进行研究，力求解决当前基于高阶矩的投资组合优化研究基本上未考虑到风险资产收益率分布时变性的问题；以高阶矩为基础，对考虑投资组合收益率完全分布信息的投资组合优化问题进行研究，力求解决当投资者的偏好主要是通过收益率分布而非各阶矩来表达时的投资组合优化问题。

1.2.2 研究意义

本文将在现有研究成果的基础上，进一步研究基于高阶矩的投资组合优化问题具有重要的理论意义和现实意义。其理论意义表现为：

(1)从直接法角度，解决均值—方差—偏度—峰度框架下的投资组合优化问题的求解问题，为基于高阶矩的投资组合优化问题的深入研究开辟道路。由于风险资产收益率分布的非对称性和尖峰厚尾

特征，传统投资组合理论中通过方差来衡量风险的做法已不具有有效性。首先，方差作为一种对称的风险度量方式，对风险资产收益率相对数学期望的正偏离和负偏离同等对待，这显然忽略了投资者喜好正偏离而厌恶负偏离的实际情况；其次，尖峰厚尾特征意味着相比正态分布而言，风险资产收益率出现极值的可能性更大，投资者偏好于较小的峰度。因而风险资产收益率呈现非正态分布的情况下，投资组合优化问题应当考虑高阶矩的影响，这已经成为理论界的共识。然而目前直接法下基于高阶矩的投资组合优化研究主要是在均值—方差—偏度的三维框架下展开，尽管相比方差和偏度而言，峰度的重要性更大，但却很少予以考虑。其原因在于考虑峰度的投资组合优化问题属于非凸规划，其全局最优解很难获得。目前直接法下，考虑峰度的投资组合优化问题的求解方法主要有多项式目标规划方法，但该方法并没有提出作为非凸规划的最小峰度模型全局最优解的求解方法且其对各阶矩重要性的量化不具有可操作性。对于在获得期望收益的同时，希望风险尽可能小的理性投资者而言，不考虑峰度的投资组合最优解并不具有最优意义，因而考虑峰度的投资组合已成为进一步研究基于高阶矩的投资组合优化问题所必须予以解决的问题。本文将在直接法框架下，以最小化峰度为例，研究均值—方差—偏度—峰度四维框架下的投资组合优化问题，提出非凸规划下的投资组合优化问题的求解方法，从而为基于高阶矩的投资组合优化问题的进一步研究开辟道路。

(2)从间接法角度，对基于高阶矩的投资组合优化问题进行更深入的探讨，使研究得以深化。目前，基于高阶矩的投资组合优化问题的研究，除了通过直接以高阶矩作为优化目标的方法来进行外，还可以最大化投资者期望效用函数为目标，并通过期望效用函数的四阶泰勒级数展开来将问题近似转化为考虑投资组合收益率前四阶矩的投资组合优化问题。该方法的优点在于体现了投资者期望效用

最大化的目标，并且可以避免对投资组合收益率分布进行假设以及对投资者效用函数在分布假设下进行积分，从而使得问题得以简化。但该方法的缺点是它存在着泰勒级数的四阶展开式是否收敛于期望效用函数的问题，只有在保证收敛性的前提下，泰勒级数的四阶展开式才可以作为期望效用函数的近似表达来进行投资组合优化问题的近似求解。由于指数型效用函数下，泰勒级数四阶展开式无条件收敛，因而，目前为了保证收敛性的做法是将投资者的效用函数直接设定为 HARA 效用函数下的指数型效用函数。HARA 效用函数是一类常见的用来刻画投资者效用函数特征的工具，它除了包括指数型效用函数外，还包括对数型、幂函数型等多种效用函数。那么当投资者的效用函数是属于对数型或幂函数型等效用函数时，该如何在保证收敛性的前提下应用泰勒级数展开式便成为一个有待解决的重要问题。本文将对上述问题进行研究，以使基于高阶矩的投资组合优化研究得以深化。

(3)对考虑高阶矩时变性的投资组合优化问题进行研究以扩展研究的广度。当前基于高阶矩的投资组合优化研究多为静态研究，忽略了投资组合收益率分布的时变性。对于风险资产收益率时间序列而言，其每一个时点的收益率分布尽管都不符合正态分布，但都各不相同，体现出明显的时变性。而这种收益率分布的时变性也使得收益率各阶矩表现出明显的时变特征。作为投资组合优化问题而言，其目的是对投资组合的预期收益和预期风险进行优化，因而在收益率各阶矩具有时变特征的条件下，投资者应当以根据时变特征所得到的收益率各阶条件矩的估计结果进行投资组合优化，而忽略时变特征所得到的各阶矩估计结果是不精确的，从而也会导致静态投资组合优化结果的失真。目前有关动态投资组合优化问题的研究主要是基于前两阶矩的时变性来进行，而考虑高阶矩时变性的投资组合研究却十分少见。出现这种情况的原因在于，理论界对条件期望向