The Polish Mathematical Competition Test From The First to The Last

历届波兰数学竞赛试题集

第1卷

1949~1963

[波] 耶・勃罗夫金 [波] 斯・斯特拉谢维奇 著

朱尧辰 译

$\sum_{1}^{5} k^5 x_k = a^3$

$\sum_{1}^{5} k^3 x_k = a^2$

$\sum_{1}^{5} k x_k = a$

哈爾濱工業大學出版社
HITP HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

The Polish Mathematical Competition Test From The First to The Last

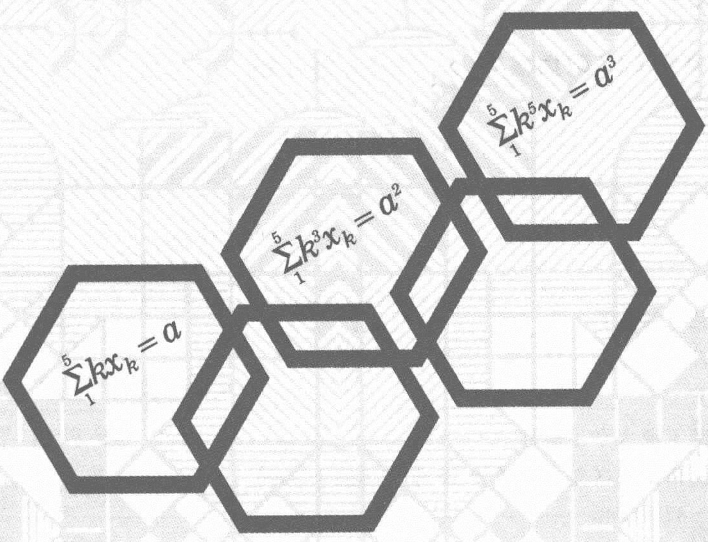
历届波兰数学竞赛试题集

第1卷

1949～1963

● [波] 耶·勃罗夫金 [波] 斯·斯特拉谢维奇 著

● 朱尧辰 译



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书汇集了第 1 届至 15 届波兰数学竞赛题及解答，本书详细地对每一道题进行了解答，并且注重初等数学与高等数学的联系.

本书适用数学奥林匹克选手及教练员、中学生相关人员及数学爱好者使用.

图书在版编目(CIP)数据

历届波兰数学竞赛试题集. 第 1 卷，1949～1963/(波)勃罗夫金，(波)斯特拉谢维奇著；朱尧辰译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.3

ISBN 978 - 7 - 5603 - 5235 - 0

Ⅰ. ①历…　Ⅱ. ①勃…　②斯…　③朱…　Ⅲ. ①数学—竞赛题　Ⅳ. ①01 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 035496 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　张永文
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress. hit. edu. cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 8　字数 125 千字
版　　次　2015 年 3 月第 1 版　2015 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5603 - 5235 - 0
定　　价　18.00 元

目 录 | Contents

第 1 届波兰数学竞赛题

1949～1950 年

1 证明：如果 a,b,c 是正数，并且 $abc=1$，那么 $a+b+c\geqslant 3$.

证明 假定问题中的结论不正确，那么对于某些数 a,b,c，它们适合 $a>0,b>0,c>0,abc=1$，并且满足不等式

$$a+b+c<3$$

将此不等式两边乘以 ab，我们得

$$a^2b+ab^2+abc<3ab$$

或

$$ab^2+(a^2-3a)b+1<0$$

最后的不等式表明，二次函数

$$y=ax^2+(a^2-3a)x+1$$

在点 $x=b$ 取负值. 因为这个函数当 x 绝对值充分大时是正的，所以它有两个实根，因此它的判别式是正的

$$(a^2-3a)^2-4a>0$$

由此得

$$a^3-6a^2+9a-4>0$$

或即

$$(a-1)^2(a-4)>0$$

因此 $a>4$，从而 $a+b+c>4$.

后一不等式与原设不等式 $a+b+c<3$ 是矛盾的. 因此，所有的乘积为 1 的正数 a,b,c 适合不等式 $a+b+c\geqslant 3$.

2 求下列方程的整数解：$y^3-x^3=91$.

解 将问题中的方程改写为

$$(y-x)(y^2+xy+x^2)=13\times 7 \tag{1}$$

因为

$$y^2+xy+x^2=\left(y+\frac{1}{2}x\right)^2+\frac{3}{4}x^2\geqslant 0$$

所以二次三项式 y^2+xy+x^2 对于一切 x,y 取非负值.

因此，如果整数 x 和 y 满足方程(1)，那么它左边的两个因子取正整数值. 因为方程(1)右边能被 7 和 13 整除，所以它的左边也应当被 7 和 13 整除. 由于 7 和 13 是素数，所以只能产生下列几种

可能情形.

(1) 数 $y-x$ 能被 13 和 7 整除,因而在方程(1) 中应令

$$y-x=91, y^2+xy+x^2=1$$

这个方程组没有实数解,更加没有整数解.

(2) 数 y^2+xy+x^2 能被 13 和 7 整除,因而在方程(1) 中应令

$$y-x=1, y^2+xy+x^2=91$$

这个方程组有下列的解

$$x=5, y=6; x=-6, y=-5$$

(3) 数 $y-x$ 被 13 整除,而数 y^2+xy+x^2 被 7 整除.在此假定下我们导出方程组

$$y-x=13, y^2+xy+x^2=7$$

这个方程组没有实数解.

(4) 数 $y-x$ 被 7 整除,而数 y^2+xy+x^2 被 13 整除.于是

$$y-x=7, y^2+xy+x^2=13$$

解这个方程组得

$$x=-3, y=4; x=-4, y=3$$

总之,方程(1) 有下列诸整数解

$$x=5, y=6; x=-6, y=-5$$

$$x=-3, y=4; x=-4, y=3$$

3 试证明:如果自然数 n 大于 4,并且不是素数①,那么从 1 到 $n-1$ 的连续自然数之积能被 n 整除.

证明 因为数 n 不是素数,所以存在自然数 p 和 q,适合 $1<p<n, 1<q<n, n=p\cdot q$(例如,可以取数 n 的最大素因子作为因子 p).

我们分别考虑两种情况.

情形 1 $p\neq q$.在此时,p 和 q 是序列 $1,2,\cdots,n-1$ 中的两个不同的项.因此乘积 $1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)$ 能被 $n=p\cdot q$ 整除.

情形 2 $p=q$.于是 $n=p^2$.由于 $n>4$,所以 $p^2>4$.但 $p>2, p^2>2p$,因而 $2p<n$.数 p 和 $2p$ 是序列 $1,2,\cdots,n-1$ 中的两个不同的项,因而乘积 $1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)$ 能被 $p\cdot 2p=2n$ 整除,从而更能被 n 整除.

附注 可以证明更强的结论,亦即可以证明:乘积 $1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-3)$ 能被 n 整除.为此,我们首先注意,在关系式 $n=p\cdot q$(这里 p 和 q 是大于 1 的自然数) 中,p,q 中任一个都不可能超过数 $n-3$.

事实上,如果,例如,满足不等式 $p>n-3$,那么因为 $q\geqslant 2$,

① 素数也称质数.两数互质也称两数互素.

我们得知 $p \cdot q > 2(n-3)$，因而有 $n > 2n-6$，故 $n < 6$. 但后一不等式是不可能的，这是因为依假定 $n > 4$ 且 $n \neq 5$.

和前面一样，我们来考察两种情况.

情形 1 $p \neq q$. 因为 $p \leqslant n-3, q \leqslant n-3$，所以 p 和 q 是自然数列 $1,2,\cdots,n-3$ 中的两个不同的项. 因而乘积 $1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-3)$ 能被 $n = p \cdot q$ 整除.

情形 2 $p = q$. 此时 $n = p^2$. 因为 $n > 4$，所以 $p > 2$，因而 $p \geqslant 3$. 由此我们得到 $p^2 \geqslant 3p, n \geqslant 2p + p, n \geqslant 2p + 3$，最终得 $2p \leqslant n-3$. 因此 p 和 $2p$ 是自然数列 $1,2,\cdots,n-3$ 中的两个不同的项. 因而乘积 $1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-3)$ 能被 $p \cdot 2p = 2n$ 整除，更加能被 n 整除.

还要注意，当 $n = 6$ 及 $n = 9$ 时，乘积 $1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-4)$ 不能被 n 整除.

4 在圆上任取三点 A,B,C，求证：由圆上任一点 M 向直线 AB,BC 及 CA 所作垂线的垂足在一条直线上.

证明 设点 P,Q,R 是由点 M 向直线 BC,CA,AB 所作垂线之垂足.

如果点 M 和点 A,B,C 之一重合，那么点 P,Q,R 中有两点重合为同一点. 显然，这时题中的结论正确.

现在设点 M 位于以 A,B,C 为顶点的圆周角之一的内部，例如，设它位于 $\angle BAC$ 的内部. 因为四边形 $ABMC$ 内接于圆，所以 $\angle ABM + \angle ACM = 180°$.

如果 $\angle ABM$ 和 $\angle ACM$ 是直角，那么问题的结论正确，这是因为这时点 R 与点 B 重合，而点 Q 与点 C 重合，从而点 P,Q,R 位于直线 BC 上.

剩下要考虑的情形是这两个角之一，例如 $\angle ABM$ 是钝角，另一个角($\angle ACM$) 是锐角. 在此情形，点 R 位于线段 AB 经过点 B 的延长线上，点 Q 可能位于线段 CA 上，也可能位于线段 CA 的延长线(点 A 的外侧) 上. 我们分别来考察这两种可能性.

(1) 设点 Q 在线段 AC 上(图 1)，于是点 P 在线段 BC 上. 这可以从 $\triangle MBC$ 中 $\angle MBC$ 及 $\angle MCB$ 是锐角推得. 事实上，$\angle MBC = \angle MAC$(因它们是同弧所对的圆周角)，而 $\angle MAC$ 是 $\mathrm{Rt}\triangle MAQ$ 的锐角. $\angle MCB$ 则是锐角 $\angle ACM$ 的一部分，因而是锐角. 于是 $\triangle BMC$ 中由顶点 M 所作的高之垂足落在点 M 的对边 BC 上.

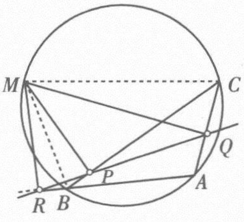


图 1

为了证明点 P,Q,R 在一直线上，只需证明 $\angle RPB = \angle QPC$.

点 M,B,P,R 在一个圆上(因为 $\angle MRB, \angle MPB$ 是直角)，而

且由于点 P 和 M 在直线 RB 同侧，所以 $\angle RPB = \angle RMB$.

类似地，点 M,P,Q,C 在一个圆上（因为 $\angle MPC$ 和 $\angle MQC$ 是直角），而且因点 P 和 M 在直线 QC 的同侧，所以 $\angle QPC = \angle QMC$.
但因为

$\angle RMB = 90^\circ - \angle MBR = 90^\circ - (180^\circ - \angle MBA) = \angle MBA - 90^\circ$,

$\angle QMC = 90^\circ - \angle MCQ = 90^\circ - \angle MCA = 90^\circ - (180^\circ - \angle MBA) = \angle MBA - 90^\circ$

所以 $\angle RMB = \angle QMC$. 于是 $\angle RPB = \angle QPC$，从而点 P，Q，R 在同一直线上.

(2) 设点 Q 在线段 CA 的延长线上（图 2）. 此时由于 $\angle MBC$ 是钝角，所以点 P 在线段 CB 的延长线（点 B 外侧）上. 由此可推知 $\angle MBC = \angle MAC$，而由于 $\angle MQA$ 是锐角，从而 $\angle MAC$ 是钝角. 如能证明 $\angle RPB$ 与 $\angle QPC$ 之和为平角，即可证明点 P,Q,R 在一同直线上.

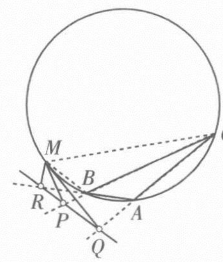


图 2

事实上，类似于在情形(1) 中所做的推理，可知 $\angle RPB = 180^\circ - \angle RMB$（这是因为点 M,R,P,B 在一圆上，而且点 M 和 P 在直线 RB 的两侧）. 然后可以证明 $\angle QPC = \angle QMC$，最后，$\angle RMB = \angle QMC$.

因此，$\angle RPB = 180^\circ - \angle QPC$，由此推知点 P,Q,R 在一直线上.

上面所研究的直线称为 $\triangle ABC$ 关于点 M 的西姆森[①] 线.

5 由四面体的任一顶点向对面所作的垂线称为四面体的高. 求证：如果四面体的两条高相交，那么它的另两条高也相交.

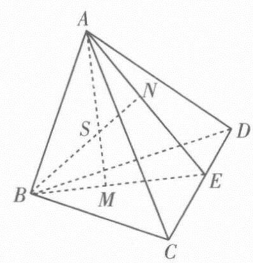


图 3

证明　设 AM 和 BN 是四面体 $ABCD$ 的两条高（图 3），它们交于点 S；高 AS 垂直于平面 BCD，高 BS 垂直于平面 ACD.

因为平面 ABS 经过平面 BCD 的垂线 AS 及平面 ACD 的垂线 BS，所以平面 ABS 与这两个平面垂直，因而与这两个平面的交线亦即直线 CD 垂直.

于是直线 CD 垂直于平面 ABS 上的任一直线，特别地，垂直于直线 AB.

由此我们可以得知，经过直线 CD 可以作一平面垂直于直线 AB. 事实上，如果 CD 是 $\triangle ABC$ 的高（图 4），那么，因为 $CP \perp AP$，$CD \perp AB$，所以平面 CDP 垂直于直线 AB.

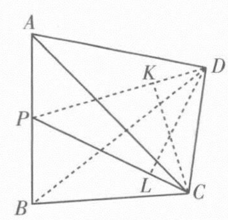


图 4

因此 $\triangle CDP$ 的高 $CK(\perp PD)$ 和 $DL(\perp PC)$ 同时也是四面

① 西姆森(1687—1768)—— 苏格兰数学家.

体 $ABCD$ 的两条高.

事实上,因为 $CK \perp AB$(因 CK 是平面 CPD 上的一条直线,而 AB 与平面 CPD 垂直),$CK \perp PD$,所以直线 CK 垂直于平面 ABD. 类似地,直线 DL 垂直于平面 ABC.

四面体的高 CK 和 DL 是同一个三角形的两条高,因而必定相交,这正是所要证明的.

附注 图 3 和图 4 中,四面体以 AB,CD 为棱的两个二面角是锐角. 实际上,上面的推理与这特殊假定是无关的.

6 有一个扳手,其孔洞形状是一个边长为 a 的正六边形,要求能够用它来拧松一个截面形状是一个边长为 b 的正方形的螺母. 为使问题有解,线段长 a 与 b 应满足什么样的条件?

解 当且仅当满足下列条件时,才能拧松该螺母:

(1) 螺母(正方形 Q) 内接于扳手的孔洞(正六边形 S);

(2) 在旋转扳手时,扳手要"抓住" 螺母,这导致下列条件:螺母的两点间的最大距离亦即正方形 Q 的对角线,大于扳手孔洞的两点间的最小距离亦即六边形 S 的对边间的距离.

这些条件必须通过 a,b 间的关系式表达.

设 b_0 是可以放进六边形 S 中的最大正方形的边长.

于是条件(1) 可以表示成不等式

$$b \leqslant b_0$$

而条件(2) 可写成不等式

$$\sqrt{2}b > \sqrt{3}a \text{ 或 } b > \sqrt{\frac{3}{2}}a$$

这是因为边长为 a 的正六边形的对边距离等于$\sqrt{3}a$.

合并这两个不等式,得到条件

$$\sqrt{\frac{3}{2}}a < b \leqslant b_0 \tag{1}$$

必须求出 b_0 与 a 之间的关系式.

为此,我们来证明,能放进六边形 S 中的最大正方形乃是这样的正方形 $ABCD$(图 5),它的边分别平行于六边形 S 的两条对称轴,两顶点则落在六边形的边上.

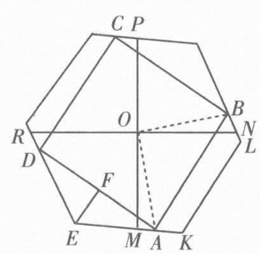


图 5

设 Q 是能放进六边形 S 中的任意一个正方形,要求证明正方形 Q 不大于正方形 $ABCD$.

有下列两种可能情形.

情形 1 正方形 Q 的中心与六边形中心 O 相重合. 正方形 Q 的两条对角线位于互相垂直的两直线 MP 和 NR 上,这两条直线把六边形分为四部分,这四部分中的某些部分包含六边形 S 的整

条边，所以直线 MP 和 NR 与六边形的六条边中的不多于四条边相交.

假设，例如，$\angle MON$ 含有六边形 S 的边 KL. 不失一般性，可以假定正方形 $ABCD$ 的边 AB 平行于六边形的边 KL（图 5）（不然的话，可以将正方形 $ABCD$ 绕 O 旋转一个适当的角度）. 此时，或者线段 OM，ON 与线段 OA，OB 重合，从而 $OM = OA$；或者线段 OM，ON 之一，比如线段 OM 落在 $\angle AOB$ 内（图 5），从而 $OM < OA$. 在这两种情形中都有 $OM \leqslant OA$.

除此之外，正方形 Q 的对角线不大于线段 $PM = 2 \cdot OM$. 据上面所证，$PM \leqslant 2 \cdot OA$ 或 $PM \leqslant AC$. 因此，正方形 Q 不大于正方形 $ABCD$.

情形 2 正方形 Q 的中心在点 T，不与六边形 S 的中心 O 相重合（图 6）.

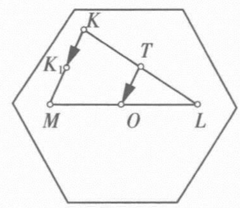


图 6

将正方形 Q 沿矢量 $\overrightarrow{TO}$ 平行移动，我们得到与正方形 Q 全等但中心在点 O 的正方形 Q_1. 不难证明，正方形 Q_1 落在六边形 S 内部，事实上，设点 K 是正方形 Q 的任意一点，L 是点 K 关于中心 T 的对称点，点 M 是点 L 关于中心 O 的对称点（图 6）. 点 L 属于正方形 Q，因而也属于六边形 S，据此点 M 也属于六边形 S. 因为六边形 S 是一个凸形，因而连接六边形 S 的两点线段 KM 之中点 K_1 也属于六边形 S. 但 $\overrightarrow{KK_1} = \overrightarrow{TO}$. 因此，$K_1$ 是点 K 在我们所作的平移变换下的象. 于是，正方形 Q 在平移变换下的象 Q_1 属于六边形 S，而且因为如上面已证明了的，正方形 Q_1 不大于正方形 $ABCD$，所以正方形 Q 不大于正方形 $ABCD$，这正是所要证明的.

由上面的证明可知，不等式（1）中的线段长 b_0 等于正方形 $ABCD$ 的边长. 这个正方形的边长是可以计算的，例如通过 $\mathrm{Rt}\triangle DEF$（图 5），其中，较大的直角边 DF 等于 $\frac{1}{2}b_0$，较小的直角边 EF 等于 $a - \frac{1}{2}b_0$，而 $\angle DEF = 60^\circ$. 因为

$$\frac{1}{2}b_0 = \sqrt{3}\left(a - \frac{1}{2}b_0\right)$$

所以

$$b_0 = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{3}+1} \text{ 或 } b_0 = (3-\sqrt{3})a$$

于是，问题的答案是：当且仅当 a，b 适合条件

$$\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{2}} < b \leqslant (3-\sqrt{3})a$$

扳手能够拧松螺母.

第 2 届波兰数学竞赛题

1950～1951 年

1 已知 m,n,p,q 是实数. 为了使二次三项式 x^2+mx+n 及 x^2+px+q 都有实根，并且其中任一个多项式的两个根被另一个多项式的根分隔开来，系数 m,n,p,q 应满足什么条件？

解 设 x_1,x_2 是二次三项式 x^2+mx+n 的根，x_3,x_4 是二次三项式 x^2+px+q 的根.

假定这两对根是互相分隔的，亦即 x_1,x_2,x_3,x_4 是实数，并且 x_3,x_4 中有一个在区间(x_1,x_2)内，另一个在这区间外.

于是有下列两种可能情形：或者差 x_3-x_1,x_3-x_2 同号，而差 x_4-x_1,x_4-x_2 反号；或者与此相反. 在这两种情形下都有

$$(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_1)(x_4-x_2)<0 \tag{1}$$

因为 $x_1+x_2=-m,x_1x_2=n$，所以

$$(x_3-x_1)(x_3-x_2)=x_3^2-(x_1+x_2)x_3+x_1x_2=x_3^2+mx_3+n$$

$$(x_4-x_1)(x_4-x_2)=x_4^2-(x_1+x_2)x_4+x_1x_2=x_4^2+mx_4+n$$

因而不等式(1)可以改写为

$$(x_3^2+mx_3+n)(x_4^2+mx_4+n)<0 \tag{2}$$

展开式(2)左边的括号，并且考虑到

$$x_2+x_4=-p,x_3x_4=q$$

以及
$$x_3^2+x_4^2=(x_3+x_4)^2-2x_3x_4=p^2-2q$$

我们得到

$$\begin{aligned}&(x_3^2+mx_3+n)(x_4^2+mx_4+n)=\\&x_3^2x_4^2+mx_3x_4(x_3+x_4)+m^2x_3x_4+\\&n(x_3^2+x_4^2)+mn(x_3+x_4)+n^2=\\&q^2-mpq+m^2q+n(p^2-2q)-mnp+n^2=\\&(n-q)^2+mq(m-p)+np(p-m)=\\&(n-q)^2+(m-p)(mq-np)\end{aligned}$$

因此，不等式(2)可以变换为

$$(n-q)^2+(m-p)(mq-np)<0 \tag{3}$$

这样，我们证明了下列结论：如果二次三项式 x^2+mx+n 和 x^2+px+q 的根互相分隔，那么这些二次三项式的系数满足条件(3).

现在我们来证明，逆命题也是正确的：如果条件(3)被满足，那么二次三项式 x^2+mx+n 和 x^2+px+q 有实根，而且一个三

项式的两个根被另一个三项式的根分隔开.

证明 将 $p=-(x_3+x_4)$，$q=x_3x_4$ 代入不等式(3)中，我们得到不等式(2)，它可以表示成

$$f(x_3)f(x_4)<0 \tag{4}$$

这里 $f(x)=x^2+mx+n$.

我们设 x_3 和 x_4 不是实数. 从代数学已知，如果实系数二次三项式没有实根，那么它的两根是共轭复数，亦即

$$x_3=\alpha+\mathrm{i}\beta, x_4=\alpha-\mathrm{i}\beta$$

这里 α 和 β 是实数，i 是虚数单位($\mathrm{i}^2=-1$).

用 x_3 和 x_4 代替 x，我们来计算 $f(x)$ 的值

$$f(x_3)=(\alpha+\mathrm{i}\beta)^2+m(\alpha+\mathrm{i}\beta)+n=$$
$$(\alpha^2-\beta^2+m\alpha+n)+\mathrm{i}(2\alpha\beta+m\beta)$$
$$f(x_4)=(\alpha-\mathrm{i}\beta)^2+m(\alpha-\mathrm{i}\beta)+n=$$
$$(\alpha^2-\beta^2+m\alpha+n)-\mathrm{i}(2\alpha\beta+m\beta)$$

我们见到，如果 x_3 和 x_4 是共轭复数，那么 $f(x_3)$ 和 $f(x_4)$ 也是共轭复数，共轭复数之积是非负实数，所以

$$f(x_3)f(x_4)\geqslant 0 \tag{5}$$

因此，若假定根 x_3 和 x_4 不是实数，则导致不等式(5)，这与不等式(4)矛盾. 因此，x_3 与 x_4 都是实数，并且从不等式(4)可知 $f(x_3)$ 和 $f(x_4)$ 也是实数，并且两者反号. 于是二次三项式 $f(x)=x^2+mx+n$ 有实根 x_1 和 x_2，其中一个落在数 x_3 和 x_4 之间，另一个落在区间 (x_3,x_4) 之外，这正是所要证明的.

2 在数 3 000 003 中，应把它的百位数字和万位数字 0 换成什么数字，才能使所得的数能被 13 整除？

解 我们把所求的数字记作 x 和 y，并把数 $3\,0x0\,y03$ 写成

$$N=3\cdot 10^6+x\cdot 10^4+y\cdot 10^2+3$$

我们需要求出整数 x 和 y，使数 N 能被 13 整除，并且适合不等式

$$0\leqslant x\leqslant 9, 0\leqslant y\leqslant 9$$

因为数 $10^6,10^4,10^2$ 除以 13 时分别得余数 1,3,9，所以

$$3\cdot 10^6=13k_1+3$$
$$x\cdot 10^4=13k_2+3x$$
$$y\cdot 10^2=13k_3+9y$$

这里 k_1,k_2,k_3 是自然数，因此，数 N 可以表示成

$$N=13k+3+3x+9y+3$$

或者
$$N=13k+3(x+3y+2)$$

这里 k 是自然数.

当且仅当数 $x+3y+2$ 能被 13 整除，亦即 x 和 y 适合关系式

$$x+3y+2=13m$$

（这里 m 是自然数）时，数 N 能被 13 整除.

从不等式 $x\leqslant 9,y\leqslant 9$ 推知

$$x+3y+2\leqslant 9+3\times 9+2 \text{ 或 } x+3y+2\leqslant 38$$

所以数 m 应当适合不等式 $13m\leqslant 38$，亦即它仅可能取值 1 或 2：

(1) 取 $m=1$，得到关于 x 和 y 的方程

$$x+3y+2=13 \text{ 或 } x=11-3y$$

在限制 $0\leqslant x\leqslant 9,0\leqslant y\leqslant 9$ 之下，这个方程有三组整数解

$$y=1,x=8;y=2,x=5;y=3,x=2$$

(2) 当 $m=2$，我们得方程

$$x+3y+2=26 \text{ 或 } x=3\cdot(8-y)$$

这有下列四组整数解

$$y=5,x=9;y=6,x=6;y=7,x=3;y=8,x=0$$

因此，原题有 7 个解，它们组成数

3 080 103,3 050 203,3 020 303,3 090 503,3 060 603,3 030 703,3 000 803

3 求证：如果正数 a,b,c 之和等于 1，那么 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9$.

证明 将等式 $1=a+b+c$ 两边分别除以 a,b,c，可得

$$\frac{1}{a}=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$$

$$\frac{1}{b}=1+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$$

$$\frac{1}{c}=1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

由此得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) \quad (1)$$

还有

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a-b)^2+2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}+2$$

于是得到

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$$

类似地

$$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geqslant 2,\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geqslant 2$$

据此可将式(1) 变换为

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3+2+2+2$$

或即

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9$$

附注 我们要问,在题中的假定之下,在什么情形等式

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=9 \tag{2}$$

成立?亦即对于什么样的和为 1 的正数 a,b,c,其倒数之和达到其最小值 9?

这个问题的答案不难从上面所给的证明中得到.当式(1)右边的加项达到极小,亦即当

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=\frac{c}{a}+\frac{a}{c}=2$$

或即当

$$a=b=c=\frac{1}{3}$$

时,等式(2)成立.

4 一根长为 a 的木梁,它的两端悬挂在两条互相平行的、长度都是 b 的绳索下,木梁处于水平位置.如果把木梁绕通过它的中点的铅垂轴转动一个角度 φ,那么木梁升高多少?

解 我们借助于在经过木梁的初始位置 AB 及悬挂点 M,N 的平面上的斜角平行投影画出我们要研究的图形,这样我们得到图 7 或图 8,其中 $AB=a,AM=BN=b,\angle A=\angle B=90°$.

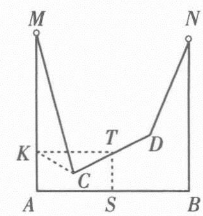


图 7

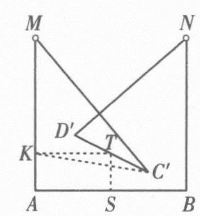


图 8

设点 S 是木梁的中点,当木梁绕通过它的中点 S 的铅垂轴转动角度 φ 后,木梁位于 CD.线段 CD 的中点 T 位于投影平面上.

点 C 投影的位置取决于用来进行投影的平行直线束的方向.可以取任意一点作为点 C 的投影,例如取图 7 或图 8 中的点 C'.点 D 的投影 D' 与点 C' 关于点 T 对称.

不难计算线段 $ST=x$ 之长(即木梁上升的高度).作线段 TK 平行且等于线段 SA.那么

$$x=AK=AM-KM$$

但 $AM=b$,而线段 KM 是 $\mathrm{Rt}\triangle KMC$ 的直角边,这个直角三角形的斜边 $MC=AM$,另一直角边是 KC,线段 KC 是等腰 $\triangle KTC$ 的底边,在 $\triangle KTC$ 中 $TK=TC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}a,\angle KTC=\varphi$.因此

$$KC=a\sin\frac{\varphi}{2},KM=\sqrt{b^2-a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

由此最后求得

$$x=b-\sqrt{b^2-a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

如果 $b<a$,那么木梁的转角 φ 不可能大于由下式确定的角度 φ_0

$$\sin\frac{\varphi_0}{2}=\frac{b}{a},\varphi_0<180°$$

当 $\varphi=\varphi_0$ 时,木梁上升的高度 $x=b$. 当继续加大木梁的转角时,悬挂木梁的绳索就要扭断.

如果 $b\geqslant a$,那么角度 φ 的最大值等于 $180°$. 当 $\varphi=180°$ 时,如果 $b>a$,那么悬挂木梁的绳索互相十字交叉;如果 $b=a$,那么两绳重叠.

上面解法的目的是算出木梁绕经过其中点的铅垂轴旋转角度 φ 后上升的高度. 我们用斜角平行投影画出的图只是用以解释上述计算. 如果要求用图解法解本题,亦即已知线段 a,b 以及角度 φ,要从图上求出线段 ST 的长度,那么投影图的画法就不同了. 这就是说:在图 7 和图 8 中,点 T 的位置是假定的,现在必须依据已知的 a,b 和 φ 通过几何作图确定出点 T 的位置.

为此我们注意,在 $\mathrm{Rt}\triangle KMC$ 中,我们已知斜边 $MC=MA$,直角边 KC 等于等腰 $\triangle KCT$(其中 $TK=TC=\frac{1}{2}a,\angle KTC=\varphi$)的底边. 按照这些已知条件我们可以作出三角形,并且求得线段 KM 及 $ST=AM-KM$ 的长,这个作图过程画在图 9 中.

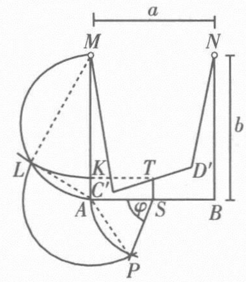


图 9

首先我们作 $\triangle ASP$,其中 $AS=SP=\frac{1}{2}a,\angle ASP=\varphi$. 然后我们以 AM 为直径画半圆,并作出半圆的弦 $AL=AP$,再在直线 MA 上截取线段 $MK=ML$. 点 K 与点 T 位于同一条水平线上,因而所求的木梁上升高度等于线段 $TS=KA$.

若任意取点 C',然后作 C' 关于点 T 的对称点 D',那么即得绕经过木梁中点的铅垂轴转动角度 φ 后的木梁的投影 $C'D'$.

5 四边形 $ABCD$ 内接于圆,直线 AB,DC 交于点 E,直线 AD,BC 交于点 F. $\angle AEC$ 的平分线交 BC 边于点 M,交 AD 边于点 N,$\angle BFD$ 的平分线交 AB 边于点 P,交 CD 边于点 Q. 求证:四边形 $MPNQ$ 是菱形.

证明 我们暂时抛开问题中所说的 A,B,C,D 四点共圆这个已知条件,而来研究任意的凸四边形 $ABCD$,其中边 AB,CD 延长后交于点 E,边 AB,BC 延长后交于点 F.

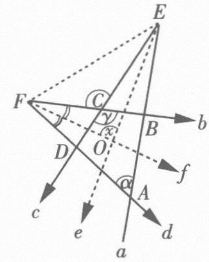


图 10

作 $\angle E$ 和 $\angle F$ 的平分线 EO 和 FO,以及线段 EF(图 4),我们来考察有公共底边 EF 的 $\triangle EAF,\triangle ECF,\triangle EOF$.

$\triangle EOF$ 在底边 EF 上的两个角分别等于 $\triangle EAF$ 和 $\triangle ECF$ 中

与该角有相同顶点的内角之算术平均. 由此，$\triangle EOF$ 的第三个角 x 等于 $\triangle EAF$ 及 $\triangle ECF$ 中底边 EF 的对角 α 及 γ 的算术平均.

$$x=\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

现在我们假定四边形 $ABCD$ 内接于圆(图 11)，那么 $\alpha+\gamma=180^\circ$，并且从前面的关系式得

$$x=\frac{\alpha+\gamma}{2}=90^\circ$$

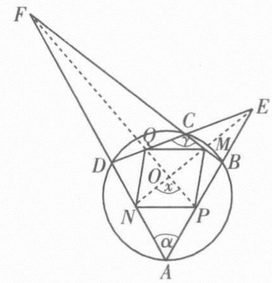


图 11

这就是说，四边形 $MPNQ$ 的两条对角线互相垂直，于是在 $\triangle PEQ$ 中，角 E 的平分线 EO 垂直于边 PQ，从而 $\triangle PEQ$ 是等腰三角形，而点 O 是线段 PQ 的中点. 类似地可证点 O 也是线段 MN 的中点.

因为四边形 $MPNQ$ 的对角线互相垂直，而且在其交点互相平分，因而它是菱形，这正是所要证明的.

6 已知一圆和线段 MN. 在圆上求一点 C，使 $\triangle ABC$ 与 $\triangle MNC$ 相似，这里点 A,B 分别是直线 MC,NC 与圆的交点.

解 首先注意，如果点 M 和 N 在已知圆 k 上，那么圆上任何一点(但点 M,N 除外)均合题意，这是因为此时点 A,B 与点 M,N 分别重合，因而 $\triangle ABC$ 与 $\triangle MNC$ 重合. 下面我们假设点 M,N 中至少有一个不在已知圆 k 上.

如果点 C 是合乎题意的所求之点，那么相似在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle MNC$ 中，因 $\angle C$ 是公共角，故应当或是关系式

$$\angle A=\angle M,\angle B=\angle N\text{(第一种类型)} \qquad (\text{I})$$

成立，或是关系式

$$\angle A=\angle N,\angle B=\angle M\text{(第二种类型)} \qquad (\text{II})$$

成立.

如果 $\triangle ABC$ 和 $\triangle MNC$ 是等腰三角形，那么这两类关系式就归并成一种.

Ⅰ.(第一种类型解的求法) 在第一种类型的解中 $\triangle ABC$ 和 $\triangle MNC$ 的边 AB 和 MN 平行，由此推知或者两点 M,N 在线段 AC,BC 上，或者这两点在此两线段的延长线上. 因此，当且仅当点 M 和 N 同时在已知圆内或同时在已知圆外. 原题有第一类型的解. 下面假定点 M,N 同在圆内或同在圆外. 如果点 C 具有所要求的性质(图 12)，那么 $\triangle ABC$ 和 $\triangle MNC$ 关于点 C 位似. 在此位似变换中，设圆 k 对应于圆 l；因为圆 k 经过位似中心 C 及点 A,B，所以圆 l 与圆 k 相切于点 C，并且通过点 A,B 在此位似变换下的象即点 M,N.

这样，原题归结为：求作一圆 l，使它经过已知点 M,N，并且