

Applied Stochastic Process

应用随机过程

模型和方法

- 通俗易懂的随机过程教材，回避复杂的数学证明，保留统计的韵味。
- 以建模和应用为出发点，穿插丰富的案例，涉及各领域真实数据的分析。

龚光鲁 钱敏平 编著



机械工业出版社
China Machine Press

· 华章应用统计系列 ·

应用随机过程

模型和方法

Applied Stochastic Process

龚光鲁 钱敏平 编著



机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目 (CIP) 数据

应用随机过程：模型和方法 / 龚光鲁，钱敏平编著. —北京：机械工业出版社，2016.9
(华章应用统计系列)

ISBN 978-7-111-54797-6

I. 应… II. ① 龚… ② 钱… III. 随机过程—高等学校—教材 IV. O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 215480 号

本书着重于给读者提供随机过程的基本概念、思想与规律，以及这些概念、思想在应用问题中的简化模型. 进而，在较为广泛的各领域中给出一些简化的应用实例. 本书首先介绍随机徘徊和泊松过程，以及这两种最简单、最典型的随机过程在某种意义下的推广——马尔可夫链、布朗运动. 之后讨论时间序列以及在信号的统计分析中有许多成功应用的泊松点过程. 最后给出随机过程在金融与精算领域的一些成功应用.

本书旨在为具有高等数学与初等概率论知识的读者，提供开始学习应用随机过程的教程，使其初等概率论的思维与随机建模接轨，因此适合统计学、信息科学、计量经济学、数学等专业的高年级本科生和一年级研究生用作教材.

应用随机过程：模型和方法

出版发行：机械工业出版社 (北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码：100037)

责任编辑：和 静

责任校对：董纪丽

印 刷：三河市宏图印务有限公司

版 次：2016 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

开 本：186mm×240mm 1/16

印 张：12.75

书 号：ISBN 978-7-111-54797-6

定 价：39.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

客服热线：(010) 88378991 88361066

投稿热线：(010) 88379604

购书热线：(010) 68326294 88379649 68995259

读者信箱：hzsj@hzbook.com

版权所有·侵权必究

封底无防伪标均为盗版

本书法律顾问：北京大成律师事务所 韩光 / 邹晓东

前言

在许多自然科学、工程技术以及经贸管理的系统分析中，随机性是一个不可忽略的因素。特别是，近年来由于数值技术的广泛应用，发展了超强的观测与记录技术，大数据的采集成为可能。大数据的分析与挖掘技术自然而然成为研究热点，在其中考虑随机因素也就成为量化系统中各种动态关系的关键之一。随机过程正是这种考量的途径。例如，在人类基因组计划完成后，雨后春笋般地出现大量的分子生物学与医学的观测手段，巨大的人力、物力与财力投入了这些观测，获得了海量的数据。但是这离人们认清这些数据所含的知识，尚很遥远。在天文、气象、经贸管理等领域也出现了同样的局面。

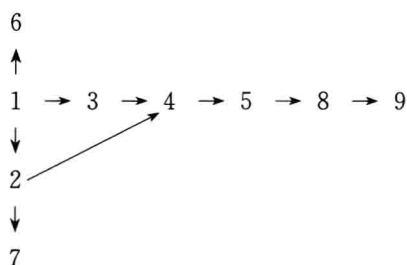
近年来，单分子测量与实验说明，这个过程是随机的。如果只考虑它们的浓度（平均粒子数），不能解释很多值得注意的现象与规律。用随机过程方法（如生物化学中常说的主方程）来研究它们，使我们能够更深入、更全面地认识这些系统。在这些问题的数据分析中，除了必须利用高性能计算机，正确的数学建模与良好的计算方法是关键。随机过程正是对具有不可忽略的随机因素的系统进行分析与解释，进而正确建模和有效计算的重要工具。

本书旨在为具有高等数学与初等概率论的基本知识的读者，提供一个开始学习应用随机过程的教程，使其初等概率论的思维与随机建模接轨。与国内外大多数关于随机过程的书籍比较，本书着重于给读者提供随机过程的基本概念、思想与规律，以及这些概念、思想在应用问题中的简化模型。进而，在较为广泛的各领域中给出一些简化的应用实例，以使读者对于应用有所体会。因而，对于一些在数学上深刻的定理与概念，本书只得回避它们的一般与严格的论述与证明，而在比较特殊的条件下，给出概念、定理的叙述与简单推导，略去数学上复杂的或困难的证明。

本书第1章与第2章给出了最简单、最典型的离散时间（参数）的随机过程（随机徘徊）与连续时间（参数）的随机过程（泊松过程），以使读者建立随机过程研究的数学框架与图景。以下的各章，都可以看成随机徘徊或泊松过程在某种意义下的推广。例如，第3章和第4章分别讨论离散时间与连续时间下，对以上二者的独立增量性要求放松为无记忆性的过程。第5章讨论最简单的连续时间、连续取值（取实数值）的独立增量过程——布朗运动，它与泊松过程被誉为随机过程两大支柱。在这一章中，我们给出了浅显的扩散过程的概念与随机分析基础。第6章中将解除对随机徘徊中随机序列的独立增量性要求，只要求其时间齐次性，即平稳性，并在二阶矩所决定的性质方面进行研讨。第7章从“计数事件”发生的角度分析、拓广泊松过程，并讨论泊松点过程。近年来，这种过程的概念与计算在信号的统计分析中有许多成功的应用。第8章和第9章分别给出近年来随机过程得到成功应用的两个领域（金融与精算）的一些应用问题，以期读者对更为深入的应用的“韵味”有所体会。

我们强调，读书并非要按顺序进行，为了掌握要点，还可以泛读(skimming)与精读(analyzing)相结合，就是学会二维地读，学会读目录，读名词索引等。为此我们将目录列得较细，以便于读者参考。

本书各章间具有较强的独立性，下图显示各章之间的联系，以便读者有选择性地阅读。



由于编者水平有限，书中难免不妥之处，请读者不吝赐教。

符号说明

$\mathbf{1}$	分量全是 1 的列向量
$a \vee b, a \wedge b$	a, b 两个数中的大者和小者
a^+, a^-	$a^+ = a \vee 0, a^- = a \wedge 0$
B_t	布朗运动
$E_i \eta = E(\eta \xi_0 = i), P_i(A) = P(A \xi_0 = i)$	
$\mathbf{I}$	单位矩阵
$\Gamma(\alpha, \lambda)$	Γ 分布
i. i. d.	独立同分布
$\equiv$	定义为
$\xi \stackrel{d}{=} \eta$	ξ 与 η 同分布
$\xi_n \xrightarrow{p} \xi$	依概率收敛
$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$	依分布收敛
$\xi_n \xrightarrow{a.e.} \xi$	随机事件 $\{\omega: \xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)\}$ 的概率为 1
$\xi_n \xrightarrow{L^2} \xi$	均方收敛: $E \xi_n - \xi ^2 \rightarrow 0$
δ_{ij}	克罗内克记号, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$
$\mathcal{F}$	事件体
I_A	事件 A 的示性函数, $I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$
$(\Omega, \mathcal{F})$	样本空间
$R(k)$	平稳随机序列的相关序列, $R(k) = E(X_n X_{n+k})$
$\mathbf{R}^d, \mathbf{R}$	d 维欧几里得空间, 欧氏直线
$(\)^T$	转置运算
$\mathbf{x}, (\mathbf{x})^T, \mathbf{x} \leq \mathbf{y}$	列向量, 其转置, $\mathbf{x}$ 所有的分量都不大于 $\mathbf{y}$ 对应的分量
Z^d, Z	d 维格点, 一维格点

目 录

前言	
符号说明	

第 1 章 随机徘徊和随机过程的概念 1

1.1 简单随机徘徊模型与随机过程的概念	1
1.1.1 简单随机徘徊的均值、方差以及协方差	2
1.1.2 随机过程的定义和独立增量过程	2
1.2 随机徘徊的变种	4
1.2.1 具有吸收壁的简单随机徘徊	4
1.2.2 具有反射壁的简单随机徘徊	5
习题	5

第 2 章 泊松过程 7

2.1 泊松过程	7
2.1.1 泊松过程——模型和普适性	7
2.1.2 泊松过程在随机选取下的不变性	12
2.2 非时齐泊松过程	13
2.2.1 非时齐泊松过程在随机选取下的不变性	13
2.2.2 具有有界强度函数的非时齐泊松过程的随机模拟	14
2.3 复合泊松过程与条件泊松过程	14
2.3.1 复合泊松过程	14
2.3.2 条件泊松过程	15
习题	16

第 3 章 离散时间马尔可夫链 20

3.1 离散时间马尔可夫链的概念与统计分布	20
3.1.1 马尔可夫链及其转移概率矩阵 ...	20

3.1.2 马尔可夫链的例子	21
3.1.3 n 步转移概率、Chapman-Kolmogorov 方程与主方程	24
3.2 离散时间马尔可夫链的遍历极限及不变概率分布(平稳分布)	26
3.2.1 马尔可夫链的状态分类、常返性与正常返性	26
3.2.2 马尔可夫链转移概率的遍历极限与不变分布	31
3.2.3 正常返状态的平均返回时间与不变概率分布	34
3.3 可逆马尔可夫链	35
3.3.1 马尔可夫链的可逆性及其等价条件	35
3.3.2 网络的设施规模设计	38
3.3.3 玻尔兹曼原理、有限格点上的 Ising 模型及其 Glauber 动力学	39
3.3.4 神经网络的随机动力学模型——玻尔兹曼机与 Hopfield 反馈神经网络	40
3.4 马尔可夫链及其遍历极限定理的应用	40
3.4.1 系统的时间平均与空间平均	40
3.4.2 Google 搜索引擎的效率排序评估的 Page 算法	41
3.4.3 简单分支链	42
3.4.4 马尔可夫链蒙特卡罗(MCMC) 算法	42
3.4.5 高阶马尔可夫链	45
3.4.6 隐马尔可夫模型(HMM)	47
3.5 马尔可夫链的初达时分布、禁忌概率与环流	48

3.5.1 初达时与禁忌转移概率	48	5.2 布朗运动模型	83
3.5.2 环流分布	49	5.2.1 直观推导	83
习题	51	5.2.2 布朗运动的数学模型	84
第4章 连续时间马尔可夫链	58	5.2.3 布朗运动的联合分布密度	85
4.1 连续时间马尔可夫链及其转移 矩阵	58	5.2.4 用随机徘徊近似布朗运动	85
4.1.1 连续时间马尔可夫链的定义及 等价性描述	58	5.3 布朗运动的性质	86
4.1.2 连续时间马尔可夫链的概率转移 矩阵	59	5.3.1 简单性质	86
4.2 由转移速率矩阵确定连续时间 马尔可夫链的转移矩阵	62	5.3.2 布朗运动的反射原理、首达 性质与最大值分布	87
4.2.1 Kolmogorov 方程及主方程	63	5.4 布朗运动的简单推广	90
4.2.2 转移速率矩阵的概率含义	64	5.4.1 吸附布朗运动	90
4.2.3 Gillespie 算法(Gillespie 过程)—— 由转移速率矩阵生成马尔可夫链 的样本的随机模拟方法	64	5.4.2 0 点的反射布朗运动	90
4.3 连续时间马尔可夫链的极限 分布和不变概率分布	65	5.4.3 积分布朗运动	91
4.3.1 连续时间马尔可夫链的极限 分布	65	5.4.4 漂移布朗运动	91
4.3.2 连续时间马尔可夫链转移矩阵的 不变概率分布与嵌入链的不变概 率分布的关系	65	5.4.5 几何布朗运动	91
4.3.3 可逆的连续时间马尔可夫链	66	5.4.6 布朗桥	92
4.4 禁忌概率	67	5.5 Ito 随机积分——对布朗运动的 积分	92
4.5 连续时间马尔可夫链的应用与 建模的案例	67	5.6 随机微分方程	98
4.5.1 系统与有效度	68	5.7 扩散过程	101
4.5.2 酶催化反应、化学反应的主方程 与其简化马尔可夫链	71	习题	103
4.5.3 生灭类过程	73	第6章 时间序列	105
4.5.4 连续时间简单分支过程	75	6.1 平稳性与宽平稳性	105
4.6 加速收敛的均匀化方法	76	6.2 ARMA 模型	107
习题	77	6.3 AR 模型的定阶、偏相关系数与 模型参数的估计	108
第5章 布朗运动与扩散过程	81	6.3.1 偏相关系数的定义	108
5.1 高斯过程的定义	81	6.3.2 偏相关系数的求法	108
		6.3.3 用样本数据拟合 AR 模型的阶	109
		6.3.4 $AR(p)$ 的自回归系数 $(a_1, \dots, a_p)$ 的估计	110
		6.3.5 残差方差的估计	110
		6.4 MA 模型的定阶与模型参数的 估计	110
		6.5 ARMA 模型的定阶、参数估计与 新息序列	111

6.5.1 定阶与参数估计	111	推导	145
6.5.2 ARMA 模型的预报问题与新息 序列	112	8.3.2 Black-Scholes 偏微分方程的 求解	146
6.6 ARCH 模型	113	8.4 连续时间的鞅和金融衍生证券 定价的一般方法	147
6.7 GARCH 模型	114	8.4.1 连续时间的鞅	147
6.8 Kalman-Bucy 滤波	115	8.4.2 欧式未定权益定价的风险中性 概率方法	148
6.8.1 Kalman-Bucy 滤波简介	115	8.4.3 倒向随机微分方程方法	150
6.8.2 Kalman-Bucy 模型与滤波的一般 形式	116	8.4.4 时变的 Black-Scholes 模型	151
习题	118	8.5 Black-Scholes 模型用二叉模型 近似	151
第 7 章 泊松点过程	120	8.6 随机利率与债券利率的期限 结构	153
7.1 点过程与泊松点过程	120	8.6.1 s -零息债券	153
7.1.1 从点过程视角看泊松 过程	120	8.6.2 零息债券导出的各种随机 利率概念	153
7.1.2 非时齐泊松点过程	121	8.6.3 资产定价基本定理与利率衍生 证券	155
7.1.3 非时齐泊松点过程的随机 模拟	124	8.6.4 短期利率的风险中性模型	156
7.2 非时齐泊松点过程泛函的 统计特征	124	习题	157
7.3 非时齐泊松点过程的似然函数和 强度函数参数的最大似然估计	126	第 9 章 风险问题的破产模型	160
习题	128	9.1 复合泊松风险模型	160
第 8 章 鞅和金融模型	130	9.1.1 最大累计损失	162
8.1 鞅列	130	9.1.2 调节系数和破产概率的界	166
8.1.1 鞅列的定义	130	9.1.3 混合指数理赔	169
8.1.2 鞅列的例子	131	9.2 离散时间模型	172
8.1.3 关于随机序列的停时和鞅列的 选择定理	132	9.2.1 复合泊松理赔的离散模型的 调节系数和连续模型的调节 系数的关系	172
8.2 随机徘徊的应用——金融中的 二叉模型	136	9.2.2 调节系数的近似公式	173
8.2.1 基本概念	136	习题	174
8.2.2 二叉模型下的欧式未定权益的 定价	137	附录 A 概率论的简要复习	176
8.2.3 二叉模型的美式未定权益	140	附录 B 随机变量的样本(随机数)的 生成	187
8.3 金融证券的 Black-Scholes 模型 的欧式未定权益与定价	144	参考文献	192
8.3.1 Black-Scholes 偏微分方程的		名词索引	193

第 1 章 随机徘徊和随机过程的概念

在本章中, 我们研究最简单的随机过程——随机徘徊, 它是一系列伯努利试验结果的部分和序列. 其实, 在初等概率论中, 读者对伯努利试验已经比较熟悉. 这里我们从随机过程的角度来分析和考察, 抽象出随机过程的数学框架与基本表述方式.

1.1 简单随机徘徊模型与随机过程的概念

定义 1.1 (简单随机徘徊) 若 $\{Y_k, k \geq 1\}$ 是一个伯努利序列, 即独立同分布的随机变量列, 而且 Y_k 只取 1 与 -1 两个值之一, 设

$$P(Y_k = 1) = p, P(Y_k = -1) = 1 - p \equiv q$$

则称

$$X_n = x + \sum_{k=1}^n Y_k$$

为从整数 x 出发的简单随机徘徊. 在 $p = \frac{1}{2}$ 时称为对称的简单随机徘徊.

容易看出, 对任意 $m \geq 0$, $\{X_{n+m} - X_m, n \geq 1\}$ 都是和 $\{X_n, n \geq 1\}$ 有相同概率性态的简单随机徘徊. 简单随机徘徊描述了一个粒子从位置 x 出发, 每次分别以概率 p 或 q 向右或向左随机地走一步的“全过程”, X_n 是走了 n 步后粒子的位置. 易见, 对任意整数 i, j , 每走一步, 由位置 i 转移到位置 j 的概率为

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} p & j = i + 1 \\ q & j = i - 1 \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases}$$

进而, 由 i 经过 n 步转移到 j 的概率, 就是向右走 $\frac{n+j-i}{2}$ 步的概率, 即

$$p_{ij}(n) \equiv P(X_n = j | X_0 = i) = \begin{cases} C_n^{\frac{n+j-i}{2}} p^{\frac{n+j-i}{2}} (1-p)^{\frac{n-j+i}{2}} & \text{若 } n \geq |j-i|, \text{ 且 } n \text{ 与 } j-i \text{ 奇偶同} \\ 0 & \text{其他情形} \end{cases}$$

因为 x 是常数, 可在讨论中忽略, 故不妨认为 $x=0$.

更一般地, 我们有以下定义.

定义 1.1' (随机徘徊) 若只假定 $\{Y_k, k \geq 1\}$ 是相互独立同分布的随机变量列, 则和随机序列 $\left\{ X_n = x + \sum_{k=1}^n Y_k, n = 0, 1, 2, \dots \right\}$ 称为从 x 出发的随机徘徊.

这里的 $\{Y_k, k \geq 1\}$ 还可以是随机向量列. 例如, 若 Y_k 是在二维整数格点上取值的随机变量, 且 Y_k 各以 $1/4$ 的概率分别取 $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ 之一, 则 $X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ 称为二维格点上的对称的随机徘徊.

1.1.1 简单随机徘徊的均值、方差以及协方差

由简单随机徘徊的定义, 我们立刻可以得到:

$$EX_n = EX_0 + nEY_1 = EX_0 + n(p - q), \text{Var}(X_n) = n\text{Var}(Y_1) = 4npq$$

特别地, 对于对称随机徘徊有 $EX_n = 0$, $\text{Var}(X_n) = n$.

在 $n < m$ 时, 利用协方差的双线性性质, 我们有

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_n, X_m) &= \text{Var}(Y_1 + \cdots + Y_n) + \text{Cov}((Y_1 + \cdots + Y_n), (Y_{n+1} + \cdots + Y_m)) \\ &= 4npq \end{aligned}$$

所以, 对于任意的 n, m , 就有

$$\text{Cov}(X_n, X_m) = 4(n \wedge m)pq, \quad \text{其中 } n \wedge m \equiv \min(n, m)$$

1.1.2 随机过程的定义和独立增量过程

随机徘徊是随机过程的一个特例, 一般地, 我们如下定义随机过程.

定义 1.2 (随机过程) 依赖参数 $t \in T$ 的一族随机变量 $X = \{X(t), t \in T\}$ (也常记为 $\{X_t, t \in T\}$) 称为随机过程. 在 $T = [0, \infty)$ 或 $T = 0, 1, \cdots$ 时, 我们常将参数 t 解释为时间. 如果指标集 T 是可数集, 则我们称 $\{X_t, t \in T\}$ 为离散时间的随机过程, 或时间序列, 而若 T 是连续的, 则我们称 $\{X_t, t \in T\}$ 为连续时间的随机过程.

由于对固定的 t , X_t 是一个随机变量, 所以在数学上, 它其实是一个二元函数: $X_t(\omega)$. 因此, 同一次试验, 即固定的 ω , $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 又是在 T 上定义的 t 的函数, 故而 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 称为 $\{X_t, t \in T\}$ 的一个实现, 它也正是沿整个 T , X 的一个观察值 ω , 所以, 也称为 $\{X_t, t \in T\}$ 沿 ω 的样本轨道. 于是, 随机过程也可以说是研究随机函数的统计性质和轨道性质的概率论分支.

1. 随机过程的分布

在初等概率论中, 我们已经看到, 对于一个随机变量来说, 它的取值可以有很大幅度的变化, 它的取值规律是用它的分布来表征的. 而有限个随机变量 (或者说, 随机向量) 的取值规律是由它们的联合概率分布来表征的. 但是, 我们这里遇到的是随机“函数”, 它有无穷多个随机变量, 再去简单地如法炮制“联合分布”是不行的. 例如在简单随机徘徊中

$$\begin{aligned} P(X_n = x + n, n = 0, 1, 2, \cdots) &= P(Y_n = 1, n = 0, 1, 2, \cdots) = \lim_{n \rightarrow \infty} p^n = 0 \\ P(X_n = x - n, n = 0, 1, 2, \cdots) &= P(Y_n = 0, n = 0, 1, 2, \cdots) = \lim_{n \rightarrow \infty} p^n = 0 \end{aligned}$$

类似地, 几乎所有此类涉及无穷多个时刻的概率都是 0. 从而, 这样的“联合分布”不再有意义, 正如连续取值随机变量, 用它取各个值的概率来表征是不行的一样.

而测度论的结果告诉我们: 在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一个随机过程, 只要在任意有限个时间 (n 个时间) 的随机变量的联合分布都已知, 有关这个随机过程的所有“行为”的事件的概率, 就都完全确定了. 因此, 我们将随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的分布定义为: 对任意 n 和任意 $t_1, \cdots, t_n$ 而言, $X(t_1), \cdots, X(t_n)$ 的联合分布的全体:

$$\{F_{t_1, t_2, \dots, t_n}; n \geq 1, t_1, t_2, \dots, t_n \in T\}$$

在国内早期的书上常将这样的有限维联合分布族简称为 $\{X(t), t \in T\}$ 的时律。

2. 独立增量过程的定义

上面定义的随机徘徊有一个重要的统计特性：对任意的 n 与任意的整值 $t_0 < t_1 < \dots < t_n$,

$$Y_1 = X(t_1) - X(t_0), Y_2 = X(t_2) - X(t_1), \dots, Y_n = X(t_n) - X(t_{n-1})$$

是 n 个独立的随机变量。拓广这个性质，我们提出如下独立增量过程的概念。

定义 1.3 (独立增量过程) 若连续时间的随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 对任意的 n 与任意的 $t_0 < t_1 < \dots < t_n$,

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

是 n 个独立的随机变量，则此随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 称为独立增量过程。

对任意 $u < s$ ，我们将 $X(s) - X(u)$ 称为随机过程 $X \equiv \{X(t), t \in T\}$ 在时间区间 $[u, s]$ 上的增量。若 $X(t+s) - X(t)$ 对于一切 t 有相同的分布，则称为平稳增量过程。

简而言之，过程在没有重叠的区间上的增量都独立时称为具有独立增量；而过程在任意两点间的值的变化的分布只依赖这些点的距离时称为具有平稳增量。通常将平稳的独立增量过程称为时齐的独立增量过程。

易见，随机徘徊 $\{X_n, n=0, 1, \dots\}$ 是时齐的独立增量过程。时齐的独立增量过程有再生性，即一个时齐独立增量过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ ，对任意 t_0 ，从 t_0 开始的随机过程 $\{X(t+t_0) - X(t_0), t \geq 0\}$ 也是一个时齐独立增量过程，且与 $\{X(t), t \geq 0\}$ 同分布。

3. 简单随机徘徊的分布

简单随机徘徊 $\{X_n, n=0, 1, \dots\}$ (设 $X_0=0$) 是一个时齐的独立增量过程。于是，对 $m > n$ 有

$$\begin{aligned} P(X_n = r, X_m = s) &= P(X_n = r, X_m - X_n = s - r) \\ &= C_n^{\frac{n+r}{2}} p^{\frac{n+r}{2}} (1-p)^{\frac{n-r}{2}} \cdot C_{m-n}^{\frac{m-n+s-r}{2}} p^{\frac{m-n+s-r}{2}} (1-p)^{\frac{m-n-s+r}{2}} \end{aligned}$$

而对 $n_1 < \dots < n_k$ ，类似地我们有这 k 个时间的联合分布

$$\begin{aligned} P(X_{n_1} = s_1, X_{n_2} = s_2, \dots, X_{n_k} = s_k) &= \prod_{l=1}^k C_{m_l}^{r_l} p^{r_l} (1-p)^{m_l - r_l}, \\ m_l &= n_l - n_{l-1}, r_l = \frac{1}{2}(n_l - n_{l-1} + s_l - s_{l-1}) \end{aligned}$$

下面的赌徒输光问题的叙述，虽然涉及赌博这种不良行为，但是它非常集中地表现了随机现象的本质，又由于其叙述简洁易懂，所以不失为一个重要的应用数学案例，是常用的问题模型。

例 1.1 (赌徒输光模型) 设甲、乙两人以每局 1 元的赌资对弈。在开始时刻甲有资金 a 元，乙有资金 b 元，将第 n 局终甲所持有资金记为 X_n 。假定每一局甲赢的概率是 p ，而乙赢的概率是 $q=1-p$ ，且各局是独立的，则

$$X \equiv \left\{ X_n = a + \sum_{k=1}^n Y_k, n = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

在不相交的时间区间上的增量是彼此独立的, 其中 Y_k 是第 k 局中甲赢得的资金. 假定不欠不借, 在博弈一直进行到甲、乙中有一人输光(即在 X_n 首次达到 0 或 $a+b$ 时)时结束. 求甲输光的概率(记为 p_a), 或乙输光的概率(记为 $q_b \equiv 1 - p_a$).

解 注意到从第 1 步开始的过程 $\left\{ X_{n+1} = X_1 + \sum_{k=2}^{n+1} Y_k, n = 1, 2, \dots \right\}$, 当 $X_1 = m$ 时是一个与 $\left\{ X_n = m + \sum_{k=1}^n Y_k, n = 1, 2, \dots \right\}$ 同分布的随机徘徊, 由全概率公式, 甲输光的概率 p_a 应满足如下的递推关系:

$$p_a = P(\text{甲输光} \mid X_0 = a) = P(Y_1 = 1)P(\text{甲输光} \mid X_1 = a+1) + P(Y_1 = -1)$$

$$P(\text{甲输光} \mid X_1 = a-1) = pp_{a+1} + qp_{a-1}$$

这是一个常系数的二阶差分方程, 它还满足如下的两个边界条件: $p_0 = 1$ (即 $X_0 = 0$, 它表示开始时甲已经输光), $p_{a+b} = 0$ (即 $X_0 = a+b$, 表示开始时乙已经输光). 此方程可改写为

$$p(p_{a+1} - p_a) = q(p_a - p_{a-1})$$

对 a 用归纳法, 可以求得这个差分方程的解为

$$p_a = \begin{cases} \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} & p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{b}{a+b} & p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

这个结果说明, 当赌博规则公平 ($p=1/2$) 时, 如果乙的赌本比甲大得多, 那么一直赌下去, “几乎”永远会以甲输光告终. 即使赌博规则对甲有利 ($\frac{q}{p} > 1$), 如果乙的赌本无限大, 也“几乎”永远会以甲输光告终, 因为

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{-b} - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{-(a+b)} - 1} = 1$$

1.2 随机徘徊的变种

1.2.1 具有吸收壁的简单随机徘徊

定义 1.4 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是简单随机徘徊, 且 $a \leq X_0 \leq b$. 对任意 n 令

$$X_n^{(s)} = \begin{cases} a & X_n \leq a \\ X_n & a \leq X_n \leq b \\ b & X_n \geq b \end{cases}$$

则我们将 $\{X_n^{(s)}, n \geq 0\}$ 称为具有双侧吸收壁 a, b 的简单随机徘徊(意思是: 当过程到达 a 或 b 时, 就被“吸住了”, 停在那里不动, 故而 a, b 称为吸收壁).

类似地, 也可定义只有一个吸收壁的简单随机徘徊.

例 1.2 在例 1.1 中, 将甲在时刻 n 实际所具有的资金记为 Z_n , 则 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 是具有双侧吸收壁 0 和 $a+b$ 的简单随机徘徊. ■

1.2.2 具有反射壁的简单随机徘徊

定义 1.5 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是简单随机徘徊, 且 $a \leq X_0 \leq b$. 对任意的 n 令

$$X_{n+1}^{(R)} = \begin{cases} a+1 & X_n = a \\ X_n & a < X_n < b \\ b-1 & X_n = b \end{cases}$$

则我们将 $\{X_n^{(R)}, n \geq 0\}$ 称为具有双侧反射壁 a, b 的简单随机徘徊.

相应于一般的随机徘徊, 类似地也有吸收壁和反射壁的情形.

例 1.3 (水库模型) 假设在第 n 天有 Y_n 整数单位的水量从外部水源(如降雨和河流)流进一个水库. 假定水库的容量是整数单位 C , 一旦达到容量, 则任何进入水库的超容量的水会全部溢出. 在每天下班时从水库向下游放水. 假设放水时, 水库水量超过 a , 则放水量是 a , 若不足则全部放掉. 设在第 n 天的开始水量为整数单位 x , 则在这天放水前的水量是 $\min(x+Y_n, C)$. 以 S_n 记在第 n 天放水后的水库水量. 假定 $\{Y_n, n \geq 1\}$ 是独立同分布的, 则易验证 $\{S_n, n \geq 1\}$ 是以 0 和 $C-a$ 为反射壁的随机徘徊. ■

习题

- 假设霸王龙开始储存了 10 000 卡热量, 它每天使用 5000 卡热量, 储存的热量达到 0 它就会死亡. 假设霸王龙只以翼龙为食, 每天以概率 0.5 进食一个翼龙能获得热量 10 000 卡. 但是它有 45% 的可能吃不到翼龙. 求霸王龙迟早储存热量 15 000 卡以上的概率.
- 某保险公司开始时有准备金 3, 每年初收保费 2. 公司随机地支付理赔, 每次理赔额的分布为

理赔额	概率
0	0.15
1	0.25
2	0.50
4	0.10

各次理赔是相互独立的. 假定年末盈余超过 3, 则将超过 3 的部分分红. 如果付不起理赔或盈余达到 0, 则公司就要退出市场. 求

- (1) 公司迟早退出市场的概率.
- (2) 第 3 年末的红利额.
- 设瓮中在开始有一个白球和一个黑球. 每一步从中抽取一个球且将它和一个与它同色的球都放回瓮中. 以 Z_n 记在第 n 次取放后瓮中白球的比例. 证明 $EZ_n = EZ_1$.
- 令 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是随机变量列, 使 $Z_1 = 1$, 且在给定 $Z_1, \dots, Z_{n-1}$ 时, Z_n 是均值为 Z_{n-1} 的泊松随机变量, $n > 1$. 对很大的 n , 我们能对 Z_n 说些什么?

5. 设瓮中有红球与黑球各一个，逐次从中随机抽取一个，随即放进与抽出的球颜色相同的球。令第 $n+1$ 次抽取完成后在瓮中的红球的比例为 X_n 。
- (1) 验证 $E(X_{n+1} | X_n, \dots, X_0) = X_n$ 。
 - (2) 求 EX_n 。
 - (3) 证明当 $n \rightarrow \infty$ 时， X_n 依分布趋向 $[0, 1]$ 上的均匀随机变量。

第2章 泊松过程

在初等概率论中,我们已经看到,在固定时段中许多偶然现象的发生次数都可用泊松随机变量描述.随时段长度 t 的变化,发生次数就是一族泊松分布的随机变量,它们形成一个连续参数的随机变量族——泊松过程.大量经验显示,诸如保险理赔的次数、交通意外事故的发生数、服务系统中到达的顾客数、某网页的访问次数、受到木马攻击的次数等,都可以用泊松过程建模.此外,在很多生命科学问题、地球科学问题、宇宙科学问题中,泊松过程还可以考虑作为探索研究的随机背景.因此泊松过程就成为随机建模的重要工具之一.

2.1 泊松过程

2.1.1 泊松过程——模型和普适性

为了建立泊松过程的数学模型,我们先来分析下面的例子.

例 2.1 (直至时刻 t 为止的单项保险的理赔次数) 假设保险公司需要对某项保险进行风险评估,为此要知道该项保险在一个时间区间 $(0, t]$ 内理赔次数(它是一个随机变量)的概率分布.将在 $(0, t]$ 中的理赔次数记为 $N(t)$ (或 N_t).最简单的情形是对理赔发生的统计规律作如下的假定.

(1) 独立增量性:在互不相交的各时段内,理赔的发生是相互独立的.

(2) 时齐性:在相同长度的时间段中,理赔发生的统计规律是相同的.

(3) 普通性:在无穷小时间段 $(t, t+h]$ 内有两次或更多次的理赔发生的概率是 h 的高阶无穷小,即

$$P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$$

而且恰好发生一次理赔的概率近似地与这段时间的长度 h 成正比,即

$$P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h)$$

(于是在 $(t, t+h]$ 内无理赔发生的概率 $P(N(t+h) - N(t) = 0) = 1 - (\lambda h + o(h))$).

普通性的直观意思是,假定理赔不会成批发生.于是,以上就是假定随机过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是具有普通性的时齐独立增量过程.事实上,由这些假定出发我们可推导 $N(t)$ 的分布如下:记

$$p_k(t) = P(N(t) = k)$$

对 $k \geq 1$, 我们有

$$\begin{aligned} p_k(t+h) &= P(N(t+h) = k) \\ &= P(N(t) = k, N(t+h) - N(t) = 0) \\ &\quad + P(N(t) = k-1, N(t+h) - N(t) = 1) + o(h) \\ &= p_k(t)(1 - \lambda h + o(h)) + p_{k-1}(t)(\lambda h + o(h)) + o(h) \end{aligned}$$

故而我们得

$$p_k(t+h) - p_k(t) = -\lambda h p_k(t) + \lambda h p_{k-1}(t) + o(h) \quad (k \geq 1)$$

两边同时除以 h , 再令 $h \rightarrow 0$, 便得到如下的无穷多个常微分方程组

$$p'_k(t) = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) \quad (k \geq 1)$$

类似地, 对 $k=0$ 还有

$$p'_0(t+h) - p_0(t) = -\lambda p_0(t)h + o(h)$$

即

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t)$$

由 $N(t)$ 的定义, 有 $N(0)=0$, 即我们有初始条件 $p_0(0)=1, p_k(0)=0, k \geq 1$.

下面我们用母函数方法一次性地推导所有 $p_k(t)$ 的表达式. 为此我们引入一个参数 z , 并定义

$$M(t, z) \equiv E z^{N(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k(t)$$

它称为 $N(t)$ 的母函数. 利用上面得到的方程组, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial M(t, z)}{\partial t} &= p'_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} p'_{k+1}(t) z^{k+1} = -\lambda p_0(t) + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} (p_k(t) - p_{k+1}(t)) z^{k+1} \\ &= -\lambda p_0(t) + \lambda \cdot z M(t, z) - \lambda (M(t, z) - p_0(t)) = \lambda(z-1)M(t, z) \end{aligned}$$

这是一个以 z 为参数的关于自变量 t 的常系数线性常微分方程, 而且满足初始条件 $M(0, z) = p_0(0) = 1$. 于是, 方程的解是

$$M(t, z) = e^{\lambda(z-1)t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} z^k$$

按母函数的定义, 我们就得到表达式

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

这里, 在 t 固定时 $N(t)$ 是一个随机变量, 它表示在时间区间 $(0, t]$ 内的理赔次数. 而当 t 变动时就得到了以 t 为参数的一族随机变量 $\{N(t), t \geq 0\}$, 它是一个时齐的独立增量过程. 另一方面, 得到了沿这个随机过程 $\{N(t, \omega), t \geq 0\}$ 的一个轨道 ω , 它是时间 t 的一个跃度为 1 的增阶梯函数, 它的跳跃发生在各个“事件”(理赔)发生的时刻. ■

下面我们来给出泊松过程的一般定义.

定义 2.1 若随机变量 $N(t)$ 表示时刻 t 以前发生的某种“偶然事件”的总数, 则随机过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为一个计数过程.

计数过程必须满足:

- (i) $N(t)$ 取非负整数值;
- (ii) 若 $s < t$, 则 $N(s) \leq N(t)$;
- (iii) 对 $s < t$, $N(t) - N(s)$ 等于发生在区间 $(s, t]$ 中的事件数.

最重要的计数过程就是下面定义的泊松过程, 它正是例 2.1 的一般化.

定义 2.2 若计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 满足:

- (P1) $N(0) = 0$,