“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
“十二五”江苏省高等学校重点教材

线性代数

（第二版）

陈建龙 周建华 张小向 韩瑞珠 周后型 编

科学出版社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

“十二五”江苏省高等学校重点教材
（NO. 2013-1-170）

线 性 代 数

(第二版)

陈建龙　周建华　张小向
韩瑞珠　周后型　编

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本教材为“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材和“十二五”江苏省高等学校重点教材. 内容包括矩阵、n 维向量、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、二次型. 全书在致力于强调内容的科学性与系统性的同时, 注重代数概念的几何背景以及实际应用背景的介绍, 以利于读者更好地理解和掌握代数理论, 提高应用代数方法解决实际问题的能力. 每章均配备适量的练习题, 适合不同类别的读者用于平时练习、期末复习或考研复习. 与本教材配套的手机应用还为读者提供了丰富的多媒体资源, 内容包括有关知识的历史简介和一些难点的讲解视频以及二十个典型的实际应用案例.

本书可供高等院校非数学专业(理工科、经济、管理类等)的学生使用, 也可以供自学者和科技工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/陈建龙等编. —2版. —北京: 科学出版社, 2016.6

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材 • “十二五”江苏省高等学校重点教材

ISBN 978-7-03-048627-1

I. ①线… II. ①陈… III. ①线性代数-高等学校-教材 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 126686 号

责任编辑: 张中兴 / 责任校对: 张凤琴

责任印制: 白 洋 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 2 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2016 年 6 月第 二 版 印张: 12 1/2

2016 年 6 月第十五次印刷 字数: 247 000

定价: 25.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

第一版前言

线性代数是理工、经济管理等学科大学生的一门重要的数学基础课程, 是学习后续课程的工具, 对于培养大学生的计算和抽象思维能力十分必要. 近些年来, 随着科学技术突飞猛进的发展, 线性代数已渗透到包括经济、金融、信息、社会等各个领域, 人们已越来越深刻地感到线性代数教材应该在充分考虑大学生的特点, 帮助大学生掌握相关的代数知识的同时, 提高其用代数的方法思考、解决实际问题的能力. 另外, 教材还应该充分发挥数学软件的优势, 反映线性代数的理论在现代科学技术中的应用. 为此, 结合教育部课程指导委员会所制定的新的基本要求, 在编写本教材时, 我们做了以下几方面的努力.

1. 加强应用背景的引入 在教材内容的处理方法上, 注意理论联系实际, 加强概念与理论的背景和应用介绍, 利用对实际问题的讨论, 帮助学生理解抽象的代数概念; 在习题中, 安排了一些简单的应用题, 力求拓宽学生的视野和培养学生应用代数知识解决实际问题的能力.

2. 加强数学软件在课程教学中的作用 结合课程内容, 介绍 MATLAB 在代数计算中的用法. 让学生学会在应用线性代数知识解决实际问题时, 如何应用数学软件, 同时通过对一些具体问题的计算, 帮助学生对一些抽象的代数概念进行理解, 加深对代数理论知识的认识, 向学生展示如何将代数理论和数学软件相结合应用于实际问题之中.

3. 引入数学建模和数学实验的方法 在本教材最后, 安排了数学建模实例, 力求引入数学建模和数学实验的方法, 将本教材中介绍的数学软件、线性代数理论有机地结合起来, 并应用到实际问题之中.

4. 注重课程自身的系统性和科学性 内容的处理更突出主题, 更适合学生的思维特点. 例如我们利用归纳法定义行列式, 将行列式看为刻画方阵是否可逆的一个数量指标, 从而更突出了本课程的主旨. 再如, 向量组的线性相关性历来是学生学习本课程的难点. 有别于传统的处理方式, 本书先讨论矩阵的秩, 然后再利用矩阵的秩建立向量组的线性相关性的概念. 这样, 内容便可以由易而难地展开, 有利于学生的理解.

5. 留有思考余地, 激发进一步学习的兴趣 课程中将利用 MATLAB 揭示、发现一些代数现象, 提示学生如要真正解决相关的问题, 则有待学习进一步的代数理论, 掌握相关的代数规律.

6. 根据不同的理解层次配备习题 每章之后均安排有A、B、C三套习题. A套安排了填空题和选择题, 主要用于检查学生对于基本概念、基本理论的了解程度; B套安排了计算题和证明题, 主要用于检查学生对这部分内容的掌握程度; C套是一些提高题和应用题. 这样安排可供不同层次的学生选择.

参加本教材编写的是东南大学陈建龙教授、周建华教授、韩瑞珠教授以及周后型教授, 主编是陈建龙教授. 其中, 第 1 章由韩瑞珠教授编写, 第 2 章和第 3 章由周建华教授编写, 第 4 章和第 5 章由陈建龙教授编写, 数学实验室 MATLAB 简介部分由周后型教授编写, 综合实践 1, 2, 分别由韩瑞珠教授和周后型教授编写.

本教材作为普通高等教育 "十一五" 国家级规划教材正式出版, 得到了教育部高校优秀青年教师教学科研奖励计划的资助. 该教材被评为江苏省高等学校精品教材建设项目, 并列入东南大学规划教材. 在此对教育部、江苏省教育厅、东南大学教务处、东南大学数学系和科学出版社的领导给予的大力支持表示感谢, 尤其是对东南大学郑家茂副校长给予的关心和帮助表示由衷的感谢! 同时, 我们还要感谢张小向和沈亮两位老师以及多位博士生在本书编写过程中所做的大量工作.

限于编者水平, 本教材肯定有许多不足和缺点, 恳请读者批评指正.

编　者

2006 年 10 月

第二版前言

本教材第一版于 2007 年 2 月由科学出版社出版, 其丰富的内容、新颖的体系和简洁的风格受到了广大读者的好评. 随着时代的发展和科技的进步, 特别是信息化时代的到来为本教材的再版升级提供了新的机遇. 结合当前国内外教材改革的形势以及广大读者向我们提出的宝贵的意见和建议, 此次修订在第一版的基础上, 充分利用现代的信息化手段, 进行了大幅修改和补充, 使之更加符合教育部大学数学教学指导委员会制定的教学基本要求, 主要体现在以下几个方面.

1. 对教学内容体系进一步优化, 更加突出矩阵为主线的教材体系. 这非常有利于学生适应从“数”到“矩阵”的跨越, 从而掌握矩阵这个十分基本而又非常重要的数学工具.

2. 充分利用信息化手段使教材更加立体化、生动化. 一方面通过手机应用介绍有关知识点的历史背景、建模案例和 MATLAB 基础, 另一方面增加多个有针对性的难点解析、典型问题讲解等. 这些内容突破了传统纸质教材的限制, 把原来难以用静止的图文讲解清楚的理论以简洁明了的动态图片或视频形式展现给读者. 这种形式更适合现代人的阅读需求, 更容易被读者接受, 而且会大大提高学生的学习效率和效果. 读者可以扫一扫带有 标识的页面, 如该页面有一个视频, 则可扫一扫后立即观看, 如该页有多个视频, 则可在电子书页面选择相应视频按钮, 打开配套的视频或附录文件.

3. 增加了一些例题, 并对习题进行了重新编排, 删去了部分偏难的题目, 使之与教学内容衔接匹配得更好. 为了方便学生校验作业, 增加了习题 A, B 的参考答案或提示.

4. 每章结尾增加了一个小结, 对有关内容加以疏理, 把零散的知识点有机地联系起来, 有助于学生复习总结、融会贯通. 同时, 为了方便读者查阅线性代数的有关概念, 增加了名词索引.

第二版中各章的小结以及配套的手机应用中的视频和附录 D 中的应用案例由张小向编写制作, 其余内容仍按第一版的编写分工由原编写者负责修订.

编　者
2016 年 3 月

"爱一课"是专门面向高等教育领域，集互动教学、课程题库、超强云笔记和师生圈等一系列信息化教育教学手段于一体的大型教育云平台，是增强现实技术与传统教材的无缝对接，是“移动互联网+教育”的完美实现，为用户提供了一种全新聚合内容的阅读和学习体验.

功能窗口介绍

- **轻松“扫一扫”**：实现视频、演示动画、扩展文档与课程知识点无缝对接. 纸质教材中标记有图标处可通过“扫一扫”获取相关的多媒体扩展资源.
- **超强云笔记**：教师备课、学生预习（复习）的好帮手，实现翻转课堂和混合式学习的有效工具，建设自己个性化专属教材.
- **课程题库**：碎片化的时间完成学习效果检验，随堂练习与课后作业的便捷通道.
- **互动师生圈**：随时随地分享、交流. 搭建教师与学生，学生与学生之间学习的平台.

如何下载“爱一课”应用并获得课程资源？

- 扫描二维码，点击下载“爱一课”，安装即可.
- 使用 iPhone、iPad 的用户也可到“苹果商店”搜索“爱一课”下载，安装本应用.

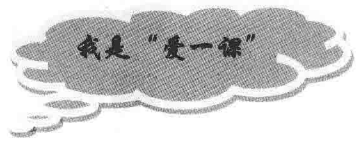
- 安装成功后，打开应用，进行用户注册. 注册成功后进入互动课程，搜索本书并点击下载，下载完成后即可获得本书相关多媒体资源和互动教学体验.

新型教材图例版小说明

小编

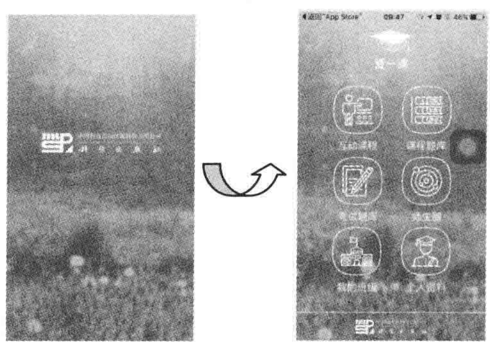
我们《线性代数》(第二版）和大家见面了，这是一本**APP**新型教材，下面我们一起来看看，新型教材 APP 安装说明吧.

扫描下面二维码



我们就进入“爱一课 ”下载页面，跟着我一步一步操作吧：点击下载“爱一课 ”APP，有点耐心哦，这里可能需要等待一小会儿，因此小编建议，您可以领到教材后，提前下载好 APP，省时省力，还能提前一睹芳容.

下载成功后，打开“爱一课 ”APP，就出现这个芳草青青的页面，我们就可以注册啦. 注册成功后，接着就进入了菜单页面，本页分成 6 大模块：互动课程，课程题库，考试题库，师生圈，我的班级和个人资料.



我们的教材就在“互动课程”这个模块了，进入专业基础课，就可以看见《线性代数》(第二版）啦！

进入本书，您可以看到和纸质图书内容一致的电子教材，点击下载（强烈提示开课前提前下载！有很多精心设计的微课程资料，容量稍微有丢丢大，您下载后，以后就省事儿啦，可以直接使用！）

温馨小提示：进入阅读后，一定记得允许 APP 访问您的手机摄像头哦，这是可以扫图书页码、体验线性代数微课的关键，打开书中有 提示的页码，扫描，就可以开始学习啦. 如图，我们扫描本书第 5 页，就可以看到张小向老师讲的微课啦.

目　　录

第 1 章　矩　　阵

线性代数主要处理与数量的线性关系相关的问题, 和其他数学课程一样, 线性代数有两类基本的数学构件: 一类是对象、数据; 一类是这些对象进行的运算. 本章就是讨论最简单的由数形成的矩形数表——矩阵及其运算. 矩阵是线性代数的一个最基本的概念. 矩阵的运算是线性代数的基本内容. 在数学科学、自然科学、工程技术与生产实践中, 有许多问题都可以归结为矩阵的运算, 进而用矩阵的理论来处理.

本章首先介绍矩阵的概念, 然后介绍矩阵的线性运算、乘法、转置、可逆矩阵、矩阵的初等变换、分块矩阵以及方阵的行列式和矩阵的秩.

1.1　矩阵的基本概念

1.1.1　矩阵的概念

在现实生活中, 人们往往不仅需要使用单个的数, 而且还要处理成批的数. 这就需要把数的概念推广到矩阵. ▷

定义 1.1　由 $m \times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 按一定的次序排成 m 行 n 列的表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 m 行 n 列的**矩阵**. 横的每排叫做矩阵的**行**, 纵的每排叫做矩阵的**列**. a_{ij} 叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行, 第 j 列的**元素**. i 和 j 分别叫做 a_{ij} 的**行指标**和**列指标**. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 又可记作 (a_{ij}), $(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$. 通常用大写的英文字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 来表示矩阵.

例如变量 x_1,x_2 与 y_1,y_2,y_3 的关系式

$$\begin{cases} x_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3, \\ x_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3 \end{cases}$$

▷ 视频: 矩阵的历史简介和矩阵的实际应用举例.

中的系数就构成一个矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

元素都是实数的矩阵称为**实矩阵**, 元素是复数的矩阵称为**复矩阵**. 本书中的矩阵除特别说明外, 都是实矩阵.

当一个矩阵的行数与列数都是 n 时, 称该矩阵为 n 阶**方阵**或 n 阶矩阵. 在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中, 元素 a_{ii} $(i=1,2,\cdots,n)$ 排成的对角线称为方阵的**主对角线**.

一个 m 行 1 列的矩阵

$$\boldsymbol{A}_{m\times 1}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

称为一个**列矩阵**或**列向量**. 我们常用希腊字母 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\cdots$ 表示列向量.

类似地, 一个 1 行 n 列的矩阵

$$\boldsymbol{A}_{1\times n}=(a_{11} \quad \cdots \quad a_{1n}),$$

称为一个**行矩阵**或**行向量**. 为了醒目起见, 我们通常在行向量的元素之间加上逗号, 即 $\boldsymbol{A}_{1\times n}=(a_{11}, \ \cdots, \ a_{1n})$.

特别地, 一个 1×1 的矩阵 (a_{11}) 就是一个数, 此时可以将括号去掉, 直接记成 a_{11}. 这就是说, 数可看成矩阵的特例.

1.1.2 几种特殊矩阵

在利用矩阵解决问题时, 经常遇到下面几种特殊矩阵.

零矩阵: 若一个矩阵的所有元素均为零, 则这个矩阵称为**零矩阵**, 记为 $\boldsymbol{O}$.

对角矩阵: 若一个 n 阶矩阵除主对角线上的元素之外, 其余元素全部为零, 则称此矩阵为**对角矩阵**, 通常用 $\boldsymbol{\Lambda}$ 表示, 即

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

这里非主对角线上的元素 0 可以省略不写, 或记为 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(a_{11}, \ a_{22}, \ \cdots, \ a_{nn})$.

数量矩阵: 若对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的主对角线上的元素为同一个数 a, 即 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a$, 则称此矩阵为**数量矩阵**.

单位矩阵: 若 n 阶数量矩阵的主对角线上的元素为 1, 则此矩阵称为**单位矩阵**, 记为 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{E_n}$, 即

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}.$$

三角矩阵: 若一个方阵的主对角线下 (上) 面的元素全为零, 则此矩阵称为**上(下)三角矩阵**. 上、下三角矩阵统称为**三角矩阵**.

行阶梯形矩阵: 若一个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 中的某一行元素全为零, 则称这一行为一个**零行**, 否则称之为一个**非零行**. 非零行的第一个非零元素称为**非零首元**. 若 $\boldsymbol{A}$ 的各非零行的非零首元的列指标随着行指标的增大而严格增大, 并且零行 (如果有的话) 均在所有非零行的下方, 则此矩阵称为**行阶梯形矩阵**. 例如

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

行最简形矩阵: 若一个行阶梯形矩阵的每个非零行的非零首元均为 1, 并且此非零首元所在列的其余元素均为零, 则此矩阵称为**行最简形矩阵**. 例如

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

是行最简形矩阵.

1.2 矩阵的基本运算

我们知道, 数有加、减、乘、除四则运算. 那么矩阵有相应的运算吗? 本节首先把数的加法、减法和乘法推广到矩阵, 得到矩阵的加法, 减法, 数乘和乘法, 然后再介绍矩阵的转置.

1.2.1 矩阵的线性运算

两个矩阵的行数和列数都相等时, 称它们是**同型矩阵**. 如果两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 的对应元素相等, 即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad (i=1,\ 2,\cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\cdots,\ n),$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ **相等**, 记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

定义 1.2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 为同型矩阵, 则称矩阵 $\boldsymbol{C}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**和**, 记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

矩阵 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的**负矩阵**, 记作 $-\boldsymbol{A}$.

根据上述定义容易证明, 矩阵的加法具有下列运算性质.

性质 1.1 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{O}$ 都是 $m\times n$ 矩阵, 则

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

利用负矩阵, 可以定义矩阵的减法. 两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**差** $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

显然, 矩阵的加法和减法推广了数的加法和减法. 下面定义一个数与一个矩阵的数乘运算. 该运算可以视为数的乘法的一种推广.

定义 1.3 设 k 为一个数, $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 为一个矩阵, 则矩阵 $(ka_{ij})_{m\times n}$ 称为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的**数量乘积**, 简称为**数乘**, 记作 $k\boldsymbol{A}$.

根据这个定义, 容易验证数乘运算具有下列运算性质.

性质 1.2 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵, k, l 为任意数, 则

(1) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;

(2) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$;

(3) $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$;

(4) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

矩阵的加法与数乘运算统称为矩阵的**线性运算**.

例 1.1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$.

解 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 1 & 5\end{pmatrix}$. □

注 1.1 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$. 对于任意的 $i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$, 用 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 表示一个 $m\times n$ 矩阵, 其第 i 行第 j 列交叉处元素为 1 而其余元素全为零. 例如

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

于是有 $\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}$. 这些矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$ $(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$ 称为**矩阵单位**.

1.2.2 矩阵的乘法

假设变量 x_1, x_2 与 y_1, y_2, y_3 之间有如下线性关系

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \end{cases} \tag{1.2.1}$$

变量 y_1, y_2, y_3 与 z_1, z_2 有如下线性关系

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2, \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2, \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2, \end{cases} \tag{1.2.2}$$

那么变量 x_1, x_2 与 z_1, z_2 的关系是什么呢?

将上述 (1.2.2) 式代入 (1.2.1) 式得

$$\begin{cases} x_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})z_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})z_2, \\ x_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})z_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})z_2. \end{cases} \tag{1.2.3}$$

将 (1.2.1), (1.2.2) 和 (1.2.3) 这三个式子对应的矩阵分别记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列交叉处元素为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行的每一个元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素乘积之和, 即 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{kj}$, 其中 $i,j=1,2$, 此时 $\boldsymbol{C}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的积. [▷] 一般地, 有如下定义.

定义 1.4 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})_{m\times s}$, $\boldsymbol{B}=(b_{kj})_{s\times n}$. 作矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$, 其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}.$$

▷ 视频: 矩阵乘积的实例.

称矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积, 记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$, 即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+\cdots+a_{1s}b_{s1} & a_{11}b_{12}+\cdots+a_{1s}b_{s2} & \cdots & a_{11}b_{1n}+\cdots+a_{1s}b_{sn} \\ a_{21}b_{11}+\cdots+a_{2s}b_{s1} & a_{21}b_{12}+\cdots+a_{2s}b_{s2} & \cdots & a_{21}b_{1n}+\cdots+a_{2s}b_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11}+\cdots+a_{ms}b_{s1} & a_{m1}b_{12}+\cdots+a_{ms}b_{s2} & \cdots & a_{m1}b_{1n}+\cdots+a_{ms}b_{sn} \end{pmatrix}.$$

数学中许多关系用矩阵乘积来表达就非常简洁. 例如, n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 m 个变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n, \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad\cdots\cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{cases}$$

(其中 a_{ij} 为常数) 称为从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的线性变换. 利用矩阵乘法, 上述线性变换可记为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax},$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

由此可见, 一个从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的线性变换可以和一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相互确定. ▷

再例如线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

▷ 视频: 平面直角坐标变换.