高等院校应用型本科教材

Linear Algebra

线性代数

吴博峰 樊葡萄 主编

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

经济科学出版社
Economic Science Press

高等院校应用型本科教材

线性代数

吴博峰　樊葡萄　主编

经济科学出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数／吴博峰，樊葡萄主编．—北京：经济科学出版社，2016.1
ISBN 978－7－5141－6576－0

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①吴…②樊…　Ⅲ.①线性代数　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 019525 号

责任编辑：段　钢　周胜婷
责任校对：靳玉环　王苗苗
责任印制：邱　天

线性代数
吴博峰　樊葡萄　主编
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮编：100142
总编部电话：010－88191217　发行部电话：010－88191522
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
天猫网店：经济科学出版社旗舰店
网址：http://jjkxcbs.tmall.com
北京万友印刷有限公司印装
787×1092　16 开　12.75 印张　270000 字
2016 年 1 月第 1 版　2016 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978－7－5141－6576－0　定价：29.80 元
（图书出现印装问题，本社负责调换。电话：010－88191502）

编委会成员

主　编　吴博峰　樊葡萄

副主编　郭红丽　赵华杰　刘明月

编　委　韦娜娜　魏选平　董　慧　闫　璐

前　言

线性代数是高等学校理工类、经管类等专业的重要基础课，对于培养学生严谨的逻辑推理和抽象思维能力起着不可或缺的作用。进入21世纪以来，随着信息技术的不断发展，用代数方法解决实际问题已渗透到各个领域，其重要性和实用性逐渐凸显。同时，在每年研究生入学考试中，线性代数是数学考试必考的内容，在数一、数二的比重约占20%，在数三、数四的比重约占25%，是各高校都比较重视的一门重要基础课。

近年来，应用型本科高校改变以往遵循学术型人才培养的老路，向本科层次高等职业教育的转型是发展的主要趋势。学科专业是人才培养的基础和载体，是高校与社会联系的纽带，也是高校的核心竞争力之一。加快学科专业结构调整步伐，增强所培养人才的市场和社会适应性，是应用型本科院校提高人才培养质量、实现人才与市场有效结合的重要途径。为此，进一步加强教材建设，深化教学改革，适应现阶段教学的实际需要变得尤其重要。根据多年的教学经验，以易于教师教学、学生学习为原则，我们编写了这本教材。

教材内容层次按如下方式组织安排：

绪论为线性代数思想方法（以介绍学科思想为主）。本章首先以平面的直线、空间的平面等具体直观的几何事物分别说明二元一次方程组、三元一次方程组解的实际意义，介绍二元一次、三元一次方程组无解、唯一解、无穷多解代表的几何情况，让学生对线性代数核心问题的研究对象有一个形象的认识，接着由解方程组的高斯消元法抽象出来矩阵法解方程组，让学生的认知能顺利地由高中过渡到大学。

第一章为行列式（以计算为主线）。本章由二元、三元线性方程组引入二阶、三阶行列式，主要介绍行列式的概念、性质，重点讲解行列式的各种计算方法及技巧，最后给出行列式在解线性方程组中的应用——克莱姆法则。

第二章为矩阵（贯穿本书）。矩阵是线性代数中的重要内容，是研究向量组的线性相关性及线性方程组的解法的有力工具。本章首先介绍矩

阵的概念及一些特殊矩阵，之后给出矩阵的运算，重点讲解矩阵的乘法运算，探讨矩阵的初等变换及其在矩阵运算中的应用，进一步研究矩阵的内在特性，包括可逆矩阵及矩阵的秩，最后给出分块矩阵及其运算。

第三章为 n 维向量与线性方程组（以矩阵变换法为主，结果规范成向量组合）。本章首先介绍 n 维向量的概念及向量的线性运算，之后讲解向量组及其线性组合，结合线性方程组和矩阵知识重点讨论向量组的线性相关性及向量组的秩，给出向量空间的概念及性质，接着研究齐次和非齐次线性方程组解的结构，最后给出 n 元线性方程组的一般解，并把结果规范为向量组合。

第四章为矩阵的特征值与特征向量（以方阵对角化为主）。本章首先介绍向量的内积运算及向量组的正交性，之后介绍矩阵的特征值与特征向量的概念及求解方法，接着引入相似矩阵，重点研究矩阵的对角化问题，特别是实对称矩阵的对角化。

第五章为二次型（以化标准形为主）。本章首先介绍二次型及其矩阵表示，重点讲解化二次型为标准形的三种方法——配方法、初等变换法和正交线性替换法，最后给出正定二次型的概念及判定方法。

教材力求在汲取其他同类教材精华的基础上形成以下特色：

1. 考虑到部分学生后续学习和考研的更高要求，教材严格按考研大纲线性代数要求的知识点编写，教师可根据各高校具体教学学时和学生的实际水平进行删减内容。

2. 概念简明扼要，内容深入浅出，同时对每章节的章末都设计一个简单实用的生活实践案例，让学生通过阅读了解知识点的应用，加深对知识的理解，培养学生的数学应用思维。

3. 每个小节都精选适当的习题，题型丰富，难度适中，并且附有详细的解答过程，方便学生自主学习。

在本书的编写过程中得到了西安财经学院行知学院领导的大力支持，同时，苏湘锐、李盼、黄娜、张娜、王嘉、党文伟、王妍、谭华华、张海燕等同学也做了大量工作，在这里深表感谢！

由于编者水平、经验所限，不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

编者

2016 年 1 月

目　　录

绪　论

第一节　线性代数综述

1. 线性代数简介

线性（linear），指量与量之间按比例、成直线的关系，在数学上可以理解为一阶导数是常数的函数；非线性（non-linear）则指不按比例、不成直线的关系，一阶导数不是常数。

线性代数起源于对二维和三维直角坐标系的研究。在这里，一个向量是一个有方向的线段，由长度和方向同时表示。这样向量可以用来表示物理量，比如力，也可以和标量做加法和乘法。这就是实数**向量空间**的第一个例子。

现代线性代数已经扩展到研究任意或无限维空间。一个维数为 n 的向量空间叫做 n **维空间**。在二维和三维空间中大多数有用的结论都可以扩展到这些高维空间。尽管许多人不容易想象 n 维空间中的向量，但这样的向量（即 n 元组）用来表示数据非常有效。由于作为 n 元组，向量是 n 个元素的“有序”列表，大多数人可以在这种框架中有效地概括和操纵数据。比如，在经济学中可以使用 8 维向量来表示 8 个国家的国民生产总值（GNP）。当所有国家的顺序排定之后，比如（中国，美国，英国，法国，德国，西班牙，印度，澳大利亚），可以使用向量（V_1，V_2，V_3，V_4，V_5，V_6，V_7，V_8）显示这些国家某一年各自的 GNP。这里，每个国家的 GNP 都在各自的位置上。

作为证明定理而使用的纯抽象概念，向量空间（线性空间）属于抽象代数的一部分，而且已经非常好地融入了这个领域。一些显著的例子有：不可逆线性映射或矩阵的群，向量空间的线性映射的环。线性代数也在数学分析中扮演重要角色，特别在向量分析中描述高阶导数，研究张量积和可交换映射等领域。

向量空间是在域上定义的，比如实数域或复数域。线性算子将线性空间的元素映射到另一个线性空间（也可以是同一个线性空间），保持向量空间上加法和标量乘法的一致性。所有这种变换组成的集合本身也是一个向量空间。如果一个线性空间的基是确定的，所有线性变换都可以表示为一个数表，称为**矩阵**。对矩阵性质和矩阵算法的深入研究（包括**行列式**和**特征向量**）也被认为是线性代数的一部分。

我们可以简单地说数学中的线性问题——那些表现出线性的问题——是最容易被解决的。比如微分学研究很多函数线性近似的问题。在实践中与非线性问题的差

异是很重要的。

线性代数方法是指使用线性观点看待问题，并用线性代数的语言描述它、解决它（必要时可使用矩阵运算）的方法。这是数学与工程学中最主要的应用之一。

由于研究关联着多个因素的量所引起的问题，所以需要考查多元函数。如果所研究的关联性是线性的，那么称这个问题为**线性问题**。历史上线性代数的第一个问题是关于解线性方程组的问题，而线性方程组理论的发展又促成了作为工具的矩阵论和行列式理论的创立与发展，这些内容已成为我们线性代数教材的主要部分。最初的线性方程组问题大都是来源于生活实践，正是实际问题刺激了线性代数这一学科的诞生与发展。另外，近现代数学分析与几何学等数学分支的要求也促使了线性代数的进一步发展。

2. 线性代数学科发展历程

现代线性代数的历史可以上溯到 1843 年和 1844 年。1843 年，哈密顿发现了四元数。1844 年，格拉斯曼发表了他的著作《线性外代数》(*Die lineare Ausdehnungslehre*)。1857 年，阿瑟・凯莱介入了矩阵，这是最基础的线性代数思想之一。随着狭义相对论的到来，很多开拓者发现了线性代数的微妙，解偏微分方程的克莱姆法则的行列式应用导致了大学的标准教育中包括了线性代数。1888 年，弗兰西斯・高尔顿发起了相关系数的应用，经常有多于一个随机变量出现，并且它们可以互相关联。在多元随机变量的统计分析中，相关矩阵是必要的工具，所以这种随机向量的统计研究帮助了矩阵用途的开发。

由于费马和笛卡儿的工作，线性代数基本上出现于 17 世纪。直到 18 世纪末，线性代数的领域还只限于平面与空间。19 世纪上半叶才完成了到 n 维向量空间的过渡。矩阵论始于凯莱，在 19 世纪下半叶，因若当的工作而达到了它的顶点。1888 年，皮亚诺以公理的方式定义了有限维或无限维向量空间。托普利茨将线性代数的主要定理推广到任意体上的最一般的向量空间中。线性映射的概念在大多数情况下能够摆脱矩阵计算而引导到固有的推理，即不依赖于基的选择。不用交换体而用未必交换体或环作为算子的定义域，这就引向模的概念，这一概念很显著地推广了向量空间的理论并重新整理了 19 世纪所研究过的情况。

“代数”这一个词在我国出现较晚，在清代时才传入中国，当时被人们译成“阿尔热巴拉”，直到 1859 年，清代著名的数学家、翻译家李善兰才将它翻译成为“代数学”，一直沿用至今。线性代数是讨论矩阵理论、与矩阵结合的有限维向量空间及其线性变换理论的一门学科。它的主要理论成熟于 19 世纪，而第一块基石（二、三元线性方程组的解法）则早在两千年前就出现了（见于我国古代数学名著《九章算术》）。

3. 线性代数主要知识模块介绍

（1）行列式。

行列式出现于线性方程组的求解，它最早是一种速记的表达式，现在已经是数学中一种非常有用的工具。行列式是由莱布尼茨和日本数学家关孝和发明的。1693 年 4 月，莱布尼茨在写给洛必达的一封信中使用并给出了行列式，并给出方程组的

系数行列式为零的条件。同时代的日本数学家关孝和在其著作《解伏题元法》中也提出了行列式的概念与算法。

1750 年，瑞士数学家克莱姆（G. Cramer，1704—1752）在其著作《线性代数分析导引》中，对行列式的定义和展开法则给出了比较完整、明确的阐述，并给出了现在我们所称的解线性方程组的克莱姆法则。稍后，数学家贝祖（E. Bezout，1730—1783）将确定行列式每一项符号的方法进行了系统化，利用系数行列式概念指出了如何判断一个齐次线性方程组有非零解。

总之，在很长一段时间内，行列式只是作为解线性方程组的一种工具使用，并没有人意识到它可以独立于线性方程组之外，单独形成一门理论加以研究。

在行列式的发展史上，第一个对行列式理论做出连贯的逻辑的阐述，即把行列式理论与线性方程组求解相分离的人，是法国数学家范德蒙德（A-T. Vandermonde，1735—1796）。范德蒙德自幼在父亲的指导下学习音乐，但对数学有浓厚的兴趣，后来终于成为法兰西科学院院士。特别地，他给出了用二阶子式和它们的余子式来展开行列式的法则。就对行列式本身这一点来说，他是这门理论的奠基人。1772 年，拉普拉斯在一篇论文中证明了范德蒙德提出的一些规则，推广了他的展开行列式的方法。

继范德蒙德之后，在行列式的理论方面，又一位做出突出贡献的是另一位法国大数学家柯西。1815 年，柯西在一篇论文中给出了行列式的第一个系统的阐述。其中主要结果之一是行列式的乘法定理。另外，他第一个把行列式的元素排成方阵，采用双足标记法；引进了行列式特征方程的术语；给出了相似行列式概念；改进了拉普拉斯的行列式展开定理并给出了一个证明等。

19 世纪的半个多世纪中，对行列式理论研究始终不渝的作者之一是詹姆士·西尔维斯特（J. Sylvester，1814—1894）。他是一个活泼、敏感、兴奋、热情，甚至容易激动的人，然而由于是犹太人的缘故，他受到剑桥大学的不平等对待。西尔维斯特用火一般的热情介绍他的学术思想，他的重要成就之一是改进了从一个 n 次和一个 m 次的多项式中消去 x 的方法，他称之为配析法，并给出了形成的行列式为零时这两个多项式方程有公共根的充分必要条件，但没有作出证明。

继柯西之后，在行列式理论方面最多产的人就是德国数学家雅可比（J. Jacobi，1804—1851），他引进了函数行列式，即“雅可比行列式”，指出函数行列式在多重积分的变量替换中的作用，给出了函数行列式的导数公式。雅可比的著名论文《论行列式的形成和性质》标志着行列式系统理论的建成。由于行列式在数学分析、几何学、线性方程组理论、二次型理论等多方面的应用，促使行列式理论自身在 19 世纪也得到了很大发展。除了一般行列式的大量定理之外，还有许多有关特殊行列式的其他定理都相继得到完善。

（2）矩阵。

矩阵是数学中的一个重要的基本概念，是代数学的一个主要研究对象，也是数学研究和应用的一个重要工具。“矩阵”这个词是由西尔维斯特首先使用的，他为了将数字的矩形阵区别于行列式而发明了这个述语。而实际上，矩阵这个课题在诞

生之前就已经发展得很好了。从行列式的大量工作中明显地表现出来，为了很多目的，不管行列式的值是否与问题有关，方阵本身都可以研究和使用，矩阵的许多基本性质也是在行列式的发展中建立起来的。在逻辑上，矩阵的概念应先于行列式的概念，然而在历史上次序正好相反。

英国数学家凯莱（A. Cayley，1821—1895）一般被公认为是矩阵论的创立者，因为他首先把矩阵作为一个独立的数学概念提出来，并首先发表了关于这个题目的一系列文章。凯莱研究线性变换下的不变量，首先引进矩阵以简化记号。1858 年，他发表了关于这一课题的第一篇论文《矩阵论的研究报告》，系统地阐述了关于矩阵的理论。文中他定义了矩阵的相等、矩阵的运算法则、矩阵的转置以及矩阵的逆等一系列基本概念，指出了矩阵加法的可交换性与可结合性。另外，凯莱还给出了方阵的特征方程和特征根（特征值）以及有关矩阵的一些基本结果。凯莱出生于一个古老而有才能的英国家庭，剑桥大学毕业后留校讲授数学，三年后他转从律师职业，工作卓有成效，并利用业余时间研究数学，发表了大量的数学论文。

1855 年，埃米特（C. Hermite，1822—1901）证明了别的数学家发现的一些矩阵类的特征根的特殊性质，如现在称为埃米特矩阵的特征根性质等。后来，克莱伯施（A. Clebsch，1831—1872）、布克海姆（A. Buchheim）等证明了对称矩阵的特征根性质。泰伯（H. Taber）引入矩阵的迹的概念并给出了一些有关的结论。

在矩阵论的发展史上，弗罗伯纽斯（G. Frobenius，1849—1917）的贡献是不可磨灭的。他讨论了最小多项式问题，引进了矩阵的秩、不变因子和初等因子、正交矩阵、矩阵的相似变换、合同矩阵等概念，以合乎逻辑的形式整理了不变因子和初等因子的理论，并讨论了正交矩阵与合同矩阵的一些重要性质。1854 年，约当研究了矩阵化为标准形的问题。1892 年，梅茨勒（H. Metzler）引进了矩阵的超越函数概念并将其写成矩阵的幂级数的形式。傅立叶、西尔和庞加莱的著作中还讨论了无限阶矩阵问题，这主要是适用方程发展的需要而开始的。

矩阵的发展是与线性变换密切相连的。到 19 世纪它还仅占线性变换理论形成中有限的空间。现代向量空间的定义是由皮亚诺（Peano）于 1888 年提出的。第二次世界大战后随着现代数字计算机的发展，矩阵又有了新的含义，特别是在矩阵的数值分析等方面。由于计算机的飞速发展和广泛应用，许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决。于是作为处理离散问题的线性代数，成为从事科学研究和工程设计的科技人员必备的数学基础。

矩阵本身所具有的性质依赖于元素的性质，矩阵由最初作为一种工具经过两个多世纪的发展，现在已成为独立的一门数学分支——矩阵论。而矩阵论又可分为矩阵方程论、矩阵分解论和广义逆矩阵论等矩阵的现代理论。矩阵及其理论现已广泛地应用于现代科技的各个领域。

（3）线性方程组。

线性方程组的解法，早在中国古代的数学著作《九章算术》方程章中已作了比较完整的论述。其中所述方法实质上相当于现代的对方程组的增广矩阵施行初等行变换从而消去未知量的方法，即高斯消元法。在西方，线性方程组的研究是在 17 世

纪后期由莱布尼茨开创的。他曾研究含两个未知量的三个线性方程组组成的方程组。麦克劳林在18世纪上半叶研究了具有二、三、四个未知量的线性方程组，得到了现在称为克莱姆法则的结果。克莱姆不久也发表了这个法则。18世纪下半叶，法国数学家贝祖对线性方程组理论进行了一系列研究，证明了 n 元齐次线性方程组有非零解的条件是系数行列式等于零。

19世纪，英国数学家史密斯（H. Smith）和道奇森（C-L. Dodgson）继续研究线性方程组理论，前者引进了方程组的增广矩阵和非增广矩阵的概念，后者证明了 n 个未知数 m 个方程的方程组相容的充要条件是系数矩阵和增广矩阵的秩相同。这正是现代方程组理论中的重要结果之一。

大量的科学技术问题，最终往往归结为解线性方程组。因此在线性方程组的数值解法得到发展的同时，线性方程组解的结构等理论性工作也取得了令人满意的进展。现在，线性方程组的数值解法在计算数学中占有重要地位。

（4）二次型。

二次型也称为“二次形式”，数域 F 上的 n 元二次齐次多项式称为数域 F 上的 n 元二次型。二次型是我们线性代数教材的后续内容，为了我们后面的学习，这里对于二次型的发展历史我们也作简单介绍。二次型的系统研究是从18世纪开始的，它起源于对二次曲线和二次曲面的分类问题的讨论。将二次曲线和二次曲面的方程变形，选有主轴方向的轴作为坐标轴以简化方程的形状，这个问题是在18世纪引进的。柯西在其著作中给出结论：当方程是标准形时，二次曲面用二次项的符号来进行分类。然而，那时并不太清楚，在化简成标准形时，为何总是得到同样数目的正项和负项。西尔维斯特回答了这个问题，他给出了 n 个变数的二次型的惯性定律，但没有证明。这个定律后被雅可比重新发现和证明。1801年，高斯在《算术研究》中引进了二次型的正定、负定、半正定和半负定等术语。

二次型化简的进一步研究涉及二次型或行列式的特征方程的概念。特征方程的概念隐含地出现在欧拉的著作中，拉格朗日在其关于线性微分方程组的著作中首先明确地给出了这个概念。而三个变数的二次型的特征值的实性则是由阿歇特（J-N. P. Hachette）、蒙日和泊松（S. D. Poisson）建立的。

柯西在别人著作的基础上，着手研究化简变数的二次型问题，并证明了特征方程在直角坐标系的任何变换下的不变性。后来，他又证明了 n 个变数的两个二次型能用同一个线性变换同时化成平方和。

1851年，西尔维斯特在研究二次曲线和二次曲面的相切和相交时需要考虑这种二次曲线和二次曲面束的分类。在他的分类方法中他引进了初等因子和不变因子的概念，但他没有证明“不变因子组成两个二次型的不变量的完全集”这一结论。

1858年，魏尔斯特拉斯对同时化两个二次型成平方和给出了一个一般的方法，并证明，如果二次型之一是正定的，那么即使某些特征根相等，这个化简也是可能的。魏尔斯特拉斯比较系统地完成了二次型的理论并将其推广到双线性型。

（5）群论。

求根问题是方程理论的一个中心课题。16世纪，数学家们解决了三、四次方程

的求根公式，对于更高次方程的求根公式是否存在，成为当时的数学家们探讨的又一个问题。这个问题花费了不少数学家们大量的时间和精力。经历了屡次失败，但总是摆脱不了困境。

到了 18 世纪下半叶，拉格朗日认真总结分析了前人失败的经验，深入研究了高次方程的根与置换之间的关系，提出了预解式概念，并预见到预解式和各根在排列置换下的形式不变性有关。但他最终没能解决高次方程问题。拉格朗日的弟子鲁菲尼（Ruffini，1765—1862）也做了许多努力，但都以失败告终。高次方程的根式解的讨论，在挪威杰出数学家阿贝尔那里取得了很大进展。阿贝尔（N. K. Abel，1802—1829）只活了 27 岁，他一生贫病交加，但却留下了许多创造性工作。1824 年，阿贝尔证明了次数大于四次的一般代数方程不可能有根式解。但问题仍没有彻底解决，因为有些特殊方程可以用根式求解。因此，高于四次的代数方程何时没有根式解，是需要进一步解决的问题。这一问题由法国数学家伽罗瓦全面透彻地给予解决。

伽罗瓦（E. Galois，1811—1832）仔细研究了拉格朗日和阿贝尔的著作，建立了方程的根的“容许”置换，提出了置换群的概念，得到了代数方程用根式解的充分必要条件是置换群的自同构群可解。从这种意义上说，伽罗瓦是群论的创立者。伽罗瓦出身于巴黎附近一个富裕的家庭，幼时受到良好的家庭教育，只可惜，这位天才的数学家英年早逝，1832 年 5 月，由于政治和爱情的纠葛，在一次决斗中被打死，年仅 21 岁。

置换群的概念和结论是最终产生抽象群的第一个主要来源。抽象群产生的第二个主要来源则是戴德金（R. Dedekind）和克罗内克（L. Kronecker）的有限群及有限交换群的抽象定义以及凯莱（A. Kayley）关于有限抽象群的研究工作。另外，克莱因（F. Clein）和庞加莱（J-H. Poincare）给出了无限变换群和其他类型的无限群，19 世纪 70 年代，李（M. S. Lie）开始研究连续变换群，并建立了连续群的一般理论，这些工作构成抽象群论的第三个主要来源。

1882 ~ 1883 年，迪克（W. Vondyck）的论文把上述三个主要来源的工作纳入抽象群的概念之中，建立了（抽象）群的定义。到 19 世纪 80 年代，数学家们终于成功地概括出抽象群论的公理体系。

20 世纪 80 年代，群的概念已经普遍地被认为是数学及其许多应用中最基本的概念之一。它不但渗透到诸如几何学、代数拓扑学、函数论、泛函分析及其他许多数学分支中而起着重要的作用，还形成了一些新学科如拓扑群、代数群等，它们还具有与群结构相联系的其他结构，如拓扑、解析流形、代数簇等，并在结晶学、理论物理、量子化学以及编码学、自动机理论等方面有极大的帮助。

4. 线性代数的综合应用

线性代数是数学的一个分支，它的研究对象是向量、向量空间（或称线性空间）、线性变换和有限维的线性方程组。向量空间是现代数学的一个重要课题，因而，线性代数被广泛地应用于抽象代数和泛函分析中；通过解析几何，线性代数得以被具体表示。由于科学研究中的非线性模型通常可以被近似为线性模型，使得线

性代数被广泛地应用于自然科学和社会科学中。线性代数在数学、力学、物理学和技术学科中有各种重要应用，因而它在各种代数分支中占据首要地位；在计算机广泛应用的今天，计算机图形学、计算机辅助设计、密码学、虚拟现实等技术无不以线性代数为其理论和算法基础的一部分；该学科所体现的几何观念与代数方法之间的联系，从具体概念抽象出来的公理化方法以及严谨的逻辑推证、巧妙的归纳综合等，对于强化人们的数学训练，增益科学智能是非常有用的；随着科学的发展，我们不仅要研究单个变量之间的关系，还要进一步研究多个变量之间的关系，各种实际问题在大多数情况下可以线性化，而由于计算机的发展，线性化了的问题又可以计算出来，线性代数正是解决这些问题的有力工具。我们可以简单地说，数学中的线性问题——那些表现出线性的问题——是最容易被解决的。比如微分学研究很多函数线性近似的问题。在实践中与非线性问题的差异是很重要的。线性代数方法是指使用线性观点看待问题，并用线性代数的语言描述它、解决它（必要时可使用矩阵运算）的方法。这是数学与工程学中最主要的应用之一。

对于其他工程领域，线性代数也是非常重要的。如建筑工程，奥运场馆鸟巢的受力分析需要线代的工具；石油勘探，勘探设备获得的大量数据所满足的几千个方程组需要用线代知识来解决；飞行器设计，就要研究飞机表面的气流的过程，包含反复求解大型的线性方程组，在这个求解的过程中，有两个矩阵运算的技巧：对稀疏矩阵进行分块处理和进行 LU 分解；在餐饮业中，对于构造一份有营养的减肥食谱也需要解线性方程组；在工程分析中十分有效的有限元方法，其基础就是求解线性方程组。

另外，矩阵的特征值和特征向量可以用于研究物理、化学领域的微分方程、连续的或离散的动力系统中，甚至数学生态学家用以预测原始森林遭到何种程度的砍伐会造成猫头鹰的种群灭亡；最小二乘算法广泛应用在各个工程领域里被用来把实验中得到的大量测量数据拟合到一个理想的直线或曲线上，最小二乘拟合算法实质就是超定线性方程组的求解；二次型常常出现在线性代数在工程（标准设计及优化）和信号处理（输出的噪声功率）的应用中，他们也常常出现在物理学（例如势能和动能）、微分几何（例如曲面的法曲率）、经济学（例如效用函数）和统计学（例如置信椭圆体）中。

未来线性代数在计算机、计算机图形、计算机辅助设计、密码学、虚拟现实等技术将会发挥更大的作用。数学是基础学科，将会改变我们生活，将我们带进一个奇妙的世界。

第二节　线性代数核心问题与思想方法

1. 线性代数核心问题——线性方程组求解

中国古代数学名著《九章算术》大约成书于公元 1 世纪下半叶，其中以“遍乘直除”为关键算法的方程术本质上就是解线性方程组的 19 世纪初期才发展起来的

高斯消元法。

在西方，关于线性方程组的早期研究有16世纪的比特奥、17世纪后期的莱布尼茨等数学家。此后的马克劳林、克莱姆等发表了现在称为克莱姆法则的结果。

贝祖用行列式建立了线性方程组的一般理论。到了19世纪，英国数学家史密斯等人继续研究线性方程组理论，引进了方程组的增广矩阵等术语及解法，形成了现在解线性方程组的判定定理。

虽然线性方程组是最简单的一种代数方程，但大量的科学技术问题都要源于或归结到线性方程组的数值解法，在现代数学的重要分支——计算数学中占有重要的地位。

中学数学中学习过的平面上的直线方程是：$ax+by=c$ 其中 a，b，c 是三个实数，a，b 不同时为零。平面上两条直线之间的关系无非三种：只有一个交点，重合，没有交点（平行）。这相当于说：两个直线方程构成的方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 有且仅有一个解，有无穷多个解或没有解。

立体几何空间中的二维平面是：$ax+by+cz=d$，其中 a，b，c，d 是四个实数，a，b，c 不同时为零。两个平面之间的关系是：相交于一条直线，重合，没有交点（平行）。这相当于说：两个平面方程构成的方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\end{cases}$ 有无穷多个解或没有解。

但三个平面之间的关系是：相交于一点，相交于一条直线，重合，没有交点（平行）。这相当于说：三个平面方程构成的方程组

$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$ 有且仅有一个解，无穷多个解或没有解。

下面将这些认识推广到更多未定元的情形，这就是一般线性方程组概念。

线性方程组的一般情形：形如

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases} \tag{1}$$

其中，$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$ 以及 b_1，b_2，…，b_m 是数域 F 中的数，x_1，x_2，…，x_n 是 n 个未定元。

称式（1）为数域 F 上的一个 m 个方程 n 个未定元的线性方程组。通常简称为 n 元线性方程组。这时所有 a_{ij} 称为该线性方程组的系数，而所有 b_i 称为常数。

线性方程组的中心问题是线性方程组能否有解，有多少个解，如何求解以及如何表达解。当然这里首先要解决什么叫做线性方程组（1）的解？如果存在数域 F 中的 n 个数 c_1，c_2，…，c_n 使得

$$\begin{cases} a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n=b_1 \\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}c_1+a_{m2}c_2+\cdots+a_{mn}c_n=b_m, \end{cases}$$

则称 $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，…，$x_n=c_n$ 是线性方程组（1）的一个解，或 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是线性方程组（1）的一个解向量。方程组（1）的所有解构成的集合称为方程组（1）的解集。

数域 F 上两个 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \text{和} \begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n=d_1 \\ c_{21}x_1+c_{22}x_2+\cdots+c_{2n}x_n=d_2 \\ \cdots \\ c_{s1}x_1+c_{s2}x_2+\cdots+c_{sn}x_n=d_s \end{cases}$$

称为同解，如果它们的解集相等。

高斯-约当消元法，是解线性方程组的一般方法。通过一些所谓的变换将线性方程组进行逐次“消元”，不断得到与原线性方程组同解的线性方程组，最后化为同解的容易判断其解的“简易”方程组。

例 1 求解下面的线性方程组：

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+2x_4=4 & ① \\ -x_2-x_3+3x_4=-1 & ② \\ x_1+2x_2-4x_3-9x_4=1 & ③ \\ 2x_2-x_3-9x_4=3 & ④ \end{cases}$$

将第①方程乘以 -1 加到第③方程，得到新的方程组：

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+2x_4=4 & ⑤ \\ -x_2-x_3+3x_4=-1 & ⑥ \\ 4x_2-5x_3-11x_4=-3 & ⑦ \\ 2x_2-x_3-9x_4=3 & ⑧ \end{cases}$$

这一方程组与原先的方程组同解。现将第⑥方程乘以 4 加到第⑦方程，第⑥方程乘以 2 加到第⑧方程，得到的方程组还是与原先的方程组同解：

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+2x_4=4 & ⑨ \\ -x_2-x_3+3x_4=-1 & ⑩ \\ -9x_3+x_4=-7 & ⑪ \\ -3x_3-3x_4=1 & ⑫ \end{cases}$$

将第⑫方程与第⑪方程互换，得到：