全国高职高专教育"十一五"规划教材

北京市高等教育精品教材立项项目

应用高等数学实训

彭淑梅 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国高职高专教育“十一五”规划教材
北京市高等教育精品教材立项项目

应用高等数学实训

Yingyong Gaodeng Shuxue Shixun

彭淑梅 主 编
孙 静 魏树国 副主编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是全国高职高专教育"十一五"规划教材，也被列入北京市高等教育精品教材立项项目。

全书共分为六章：第一章行列式，第二章矩阵与线性方程组，第三章拉普拉斯变换，第四章概率论，第五章随机变量与概率分布及数字特征，第六章数学建模初步。

本书的编写侧重于基本概念、基本理论和基本方法，尽量做到内容叙述详细、通俗易懂，而不刻意追求解题技巧。本书例题较多，书末还附有习题答案，便于学生自学。

本书可作为高职高专院校机电大类专业的工程数学或数学实验教材，也可作为成人高校及其他职业学校的参考教材。

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学实训/彭淑梅主编. —北京：高等教育出版社，2010.10

ISBN 978-7-04-030678-1

Ⅰ.①应… Ⅱ.①彭… Ⅲ.①高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第196054号

策划编辑 邓雁城 **责任编辑** 董达英 **封面设计** 张雨微 **责任绘图** 黄建英
版式设计 余 杨 **责任校对** 杨凤玲 **责任印制** 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	**网上订购**	http://www.landraco.com
印　　刷	北京七色印务有限公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092 1/16	**版　　次**	2010年10月第1版
印　　张	9.25	**印　　次**	2010年10月第1次印刷
字　　数	220 000	**定　　价**	15.60元

物料号　30678-00

前　言

当前，高职高专教育成为社会关注的热点，面临大好的发展机遇。同时，经济、科技和社会发展也对高职高专教育的人才培养工作提出了许多新的、更高的要求。为了适应各方面的需要，我们编写了本教材。

数学知识的学习对于学生是一个不断积累完善的过程，具有循序渐进的特点，《应用高等数学实训》是以教育部三年制高职高专教育的教学大纲为主要依据，结合机电一体化专业学生的实际情况和发展特点来组织编写的，目的是为学生以后的专业学习搭建平台，培养学生解决实际问题的能力和创新精神。

我们在教材的编写过程中做了一些探索与创新。首先，在学习数学理论知识的同时兼顾为专业方向服务，紧密联系实际，讲授的内容包含了丰富的应用案例。其次，本教材各章节对MATLAB和LINGO软件作了初步介绍，着重培养学生运用数学软件处理复杂数学计算的能力；本书在许多章节中都渗透了数学建模的思想，但并不追求高深全的数学建模内容，以求达到降低数学建模的学习起点并使建模内容通俗易懂的目的，启发学生贴近生活，学会用数学知识解决生活实例，逐步培养数学建模的意识，提高学生的科研素质，为真正学好数学，将数学应用于实际奠定基础。

本书共分为六章。第一章行列式，第二章矩阵与线性方程组，第三章拉普拉斯变换，第四章概率论，第五章随机变量与概率分布及数字特征，第六章数学建模初步。本书的编写侧重于基本概念、基本理论和基本方法，尽量做到内容叙述详细、通俗易懂，而不刻意追求解题技巧。本书例题较多，书末还附有习题答案，便于学生自学。

本书主编为彭淑梅（北京工业职业技术学院），副主编为孙静（北京工业职业技术学院）和魏树国（北京工业职业技术学院）。本书的出版得到了北京工业职业技术学院教务处、基础部以及数学教研室老师们的关心和支持，在此深表谢意。

本书编写过程中，参考了兄弟院校的一些教材（见书后参考文献），也引用了因特网上的一些文章，在此谨向这些材料的作者表示由衷的感谢。限于编者水平，同时也因编写时间仓促，书中难免存在不妥甚至谬误之处，恳请读者批评指正。

编　者

2010年9月

目　录

第 1 章　行　列　式

在初等数学中,我们已接触过二元一次方程组及其求解问题,在工程、经济等领域中往往会涉及多元方程组求解问题. 行列式作为数学工具,在研究 n 元线性方程组问题中有重要应用,本章将介绍二阶、三阶以及 n 阶行列式的概念、行列式的展开及其计算,另外还要介绍克拉默法则及其应用.

1.1　二阶、三阶行列式

在初等数学中,用消元法求二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

的解时,得到

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \\[2ex] x_2 = \dfrac{b_2 a_{11} - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \end{cases}$$

其中 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

为了更有规律地使用和记忆上述结果,需要引进二阶行列式的概念.

1.1.1　二阶行列式

定义　形如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的式子叫做二阶行列式,横排叫行,纵排叫列. 二阶行列式共有 4 个元素,它们排成两行两列,算式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 叫做二阶行列式的展开式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

在二阶行列式中,从左上角到右下角的对角线称为主对角线,从右上角到左下角的对角线称为次对角线. 对于二阶行列式的展开式,可以用画线的方法记忆,即二阶行列式等于主对角线上两个元素的乘积减去次对角线上两个元素的乘积,如下图所示.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

例 1　计算下列二阶行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\times 6 - 5\times(-8) = 52.$

(2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

例 2 设 $D = \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$，问：

(1) 当 λ 为何值时 $D=0$？

(2) 当 λ 为何值时 $D\neq 0$？

解
$$D = \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda$$

若 $\lambda^2 - 3\lambda = 0$，则 $\lambda = 0, \lambda = 3$. 由此可得当 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 3$ 时，$D = 0$；当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq 3$ 时，$D \neq 0$.

1.1.2 三阶行列式

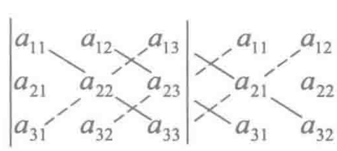
类似地，为了解由三个线性方程式构成的三元线性方程组，需要引进三阶行列式的概念.

定义 形如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 的式子叫做三阶行列式，三阶行列式共有 9 个元素，它们排成三行三列，从左上角到右下角的对角线称为主对角线，从右上角到左下角的对角线称为次对角线. 下面的式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

叫做该三阶行列式的展开式.

对于三阶行列式的展开式也可以用画线的方法记忆，其中各实线连接的三个元素的乘积是展开式中的正项，各虚线连接的三个元素的乘积是展开式中的负项.



例 3 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ 的值.

解 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 1\times1\times4+0\times5\times(-1)+(-2)\times2\times3-(-1)\times1\times(-2)$

$-3\times0\times4-1\times5\times2=-20$

定义　在三阶行列式中，划去 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 所在行和列的各元素，其余的元素按原来的相对位置构成的一个二阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}.

例如　$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

定义　记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}(i,j=1,2,3)$，称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

例 4　求行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{12}, a_{31} 的代数余子式.

解

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-(0-4)=4$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=2-20=-18$$

三阶行列式的性质　三阶行列式的展开式等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}A_{ik} \qquad (i=1,2,3)$$

$$= \sum_{k=1}^{3} a_{kj}A_{kj} \qquad (j=1,2,3)$$

习题 1.1

1. 计算下列二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} \cos 75^\circ & \sin 75^\circ \\ \sin 75^\circ & -\cos 75^\circ \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

3. 当 x 取何值时, $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0$?

4. 证明下列等式成立:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

5. 已知三阶行列式 $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$,求元素 $a_{12}=2$ 的余子式及元素 $a_{31}=2$ 的代数余子式.

1.2 n 阶行列式

1.2.1 n 阶行列式的概念

定义 由 n^2 个元素按照 n 行 n 列排列成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的式子叫做 n 阶行列式.

其中 a_{ij} 称为行列式中的元素 $(i,j=1,2,3,\cdots,n)$. n 阶行列式的展开式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \ (i=1,2,\cdots,n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \ (j=1,2,\cdots,n)$$

定义 在 n 阶行列式中,划去 $a_{ij}(i,j=1,2,3,\cdots,n)$ 所在行和列的各元素,其余的元素按原来的相对位置构成的一个 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij}.

定义 记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}(i,j=1,2,3,\cdots,n)$称为元素 a_{ij}的代数余子式.

注 通常四阶和四阶以上的行列式叫做高阶行列式.

1.2.2 几种特殊的 n 阶行列式

(1) 上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3) 主对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(4) 次对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

1.2.3 n 阶行列式的性质

性质 1 行列式所有的行与相应的列互换，行列式的值不变.

对于 n 阶行列式 D,将所有的行与对应的列互换所得到的行列式,称为 D 的转置行列式,记作 D^{T}. 显然由性质 1,有 $D=D^{\mathrm{T}}$.

性质 2 行列式的任意两行(列) 互换，行列式的值仅改变符号.

性质 3 若行列式中某两行(列)所对应的元素完全相同,则此行列式的值为零.

性质 4 行列式中某行(列)的所有元素都有公因子时,可把公因子提到行列式符号外面.

推论 1 若行列式有一行(列)各元素都是零,则此行列式的值等于零.

推论 2 若行列式有两行(列)对应元素成比例,则此行列式的值等于零.

性质 5 若行列式某一行(列)的所有元素都可表示为两项之和,则该行列式可用两个同阶

的行列式之和来表达.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 行列式的某一行(列)的各元素加上另一行(列)对应元素的 k 倍,则行列式的值不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 7 行列式任一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零.

1.2.4 n 阶行列式的计算

例如,求行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ 的值. 由性质 6 得

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+(-3)\times r_1]{r_2+(-2)\times r_1} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & -13 & -2 \end{vmatrix} = 18$$

其中 $r_2+(-2)\times r_1$ 表示第 2 行各元素加上第 1 行对应元素的 -2 倍.

由上述例子可知,利用行列式的性质可简化行列式的计算,为了书写简便,在行列式计算过程中可用下列记法:

(1) 以 r 代表行,以 c 代表列;

(2) 第 i 行与第 j 行互换,记作 $r_i \leftrightarrow r_j$,第 i 列与第 j 列互换,记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

(3) 数 k 乘行列式的第 i 行(第 i 列)中所有的元素,记作 $kr_i(kc_i)$.

(4) 第 i 行(第 i 列)乘上数 k 加到第 j 行(第 j 列),记作 $r_j+kr_i(c_j+kc_i)$.

例 1 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

解 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\-1&0&3&4\\-1&-2&0&4\\-1&-2&-3&0\end{vmatrix}\xlongequal{r_i+r_1(i=2,3,4)}\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&2&6&8\\0&0&3&8\\0&0&0&4\end{vmatrix}=24$

计算行列式的方法 一般情况下,在计算行列式时,可尽量把行列式化为三角行列式;若化不成三角行列式,可按照行列式的展开式计算,即把行列式降阶处理,从而简化行列式的计算.

例 2 计算行列式 $\begin{vmatrix}1&-1&2&1\\2&1&2&0\\3&1&0&-1\\-2&-1&1&2\end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix}1&-1&2&1\\2&1&2&0\\3&1&0&-1\\-2&-1&1&2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-2r_1]{r_3+r_1}\begin{vmatrix}1&-1&2&1\\2&1&2&0\\4&0&2&0\\-4&1&-3&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 4 列展开}}1\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}2&1&2\\4&0&2\\-4&1&-3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+(-1)\times r_1}-\begin{vmatrix}2&1&2\\4&0&2\\-6&0&-5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 2 列展开}}(-1)\times1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4&2\\-6&-5\end{vmatrix}$$

$$=-8$$

一般地,在具体计算行列式时,应该选择零元素比较多的一行(列)展开,以减少计算量;若行列式中零元素较少时,可以应用行列式的性质将行列式某一行(列)的元素尽可能多地化为零,然后按这一行(列)展开,化为计算低一阶的行列式,如此继续下去,直至化为三角行列式或二阶行列式,求得结果.

例 3 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\1&0&0&\cdots&0\end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第 1 列展开}} 1 \times (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}.$$

例 4 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 + c_i (i = 2,3,\cdots,n)} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_i - r_1 (i = 2,3,\cdots,n)} [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

习题 1.2

1. 已知三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2$,求下列行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 2a_1 & 2b_1 & 2c_1 \\ 2a_2 & 2b_2 & 2c_2 \\ 2a_3 & 2b_3 & 2c_3 \end{vmatrix}$.

2. 已知三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 10$,求三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} & 3a_{11} - 4a_{13} \\ 2a_{21} & a_{22} & 3a_{21} - 4a_{23} \\ 2a_{31} & a_{32} & 3a_{31} - 4a_{33} \end{vmatrix}$$

的值.

3. 利用行列式的性质计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;　　(6) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

(7) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;　　(8) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 2 & x & 0 \\ 1 & 2 & 2 & x \end{vmatrix}$.

4. 证明下列等式:

(1) $\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix} = 0$.

5. 把下列行列式化为上三角行列式,并计算其值:

(1) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 8 \\ 2 & 0 & -7 & 1 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

6. 计算下列行列式：

(1) $D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$；

(2) $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$；

(3) $D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$；

(4) $D_{n+1} = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

1.3　克拉默法则

线性代数一个中心问题是求解线性方程组，这里只研究方程个数和未知量个数相等的情形. 至于一般的情况，在第 2 章矩阵中讨论.

定理　克拉默法则

如果 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1-3-1}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组(1－3－1)有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = D_1/D \\ x_2 = D_2/D \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = D_n/D \end{cases}$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是用方程组(1－3－1)右端的常数项替换 D 中第 j 列元素所得的 n 阶行列式,即

$$D_j = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & & \phantom{a_{1,j-1}} & \text{第 } j \text{ 列} & \phantom{a_{1,j+1}} & & \phantom{a_{1n}} \\ & & & \downarrow & & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}$$

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$$

根据克拉默法则,方程组有唯一解.

计算 $D_j(j=1,2,3,4)$,得

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27.$$

故方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = 81/27 = 3 \\ x_2 = -108/27 = -4 \\ x_3 = -27/27 = -1 \\ x_4 = 27/27 = 1 \end{cases}$$

我们把常数项全为零的线性方程组称为齐次线性方程组,常数项不全为零的线性方程组称为非齐次线性方程组.

定理　设齐次线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

(1) 此齐次方程组有唯一解的充要条件是系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

且其方程组的解为 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$(称为零解).

(2) 此齐次方程组有非零解的充要条件是系数行列式 $D = 0$.

若方程组的所有未知量取值皆为零是方程组的一个解,则这个解称为零解;若方程组的未知量的取值不全为零也是方程组的解,则称此解为非零解.

例 2　判定齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

是否仅有零解.

解