高等教育“十二五”规划教材

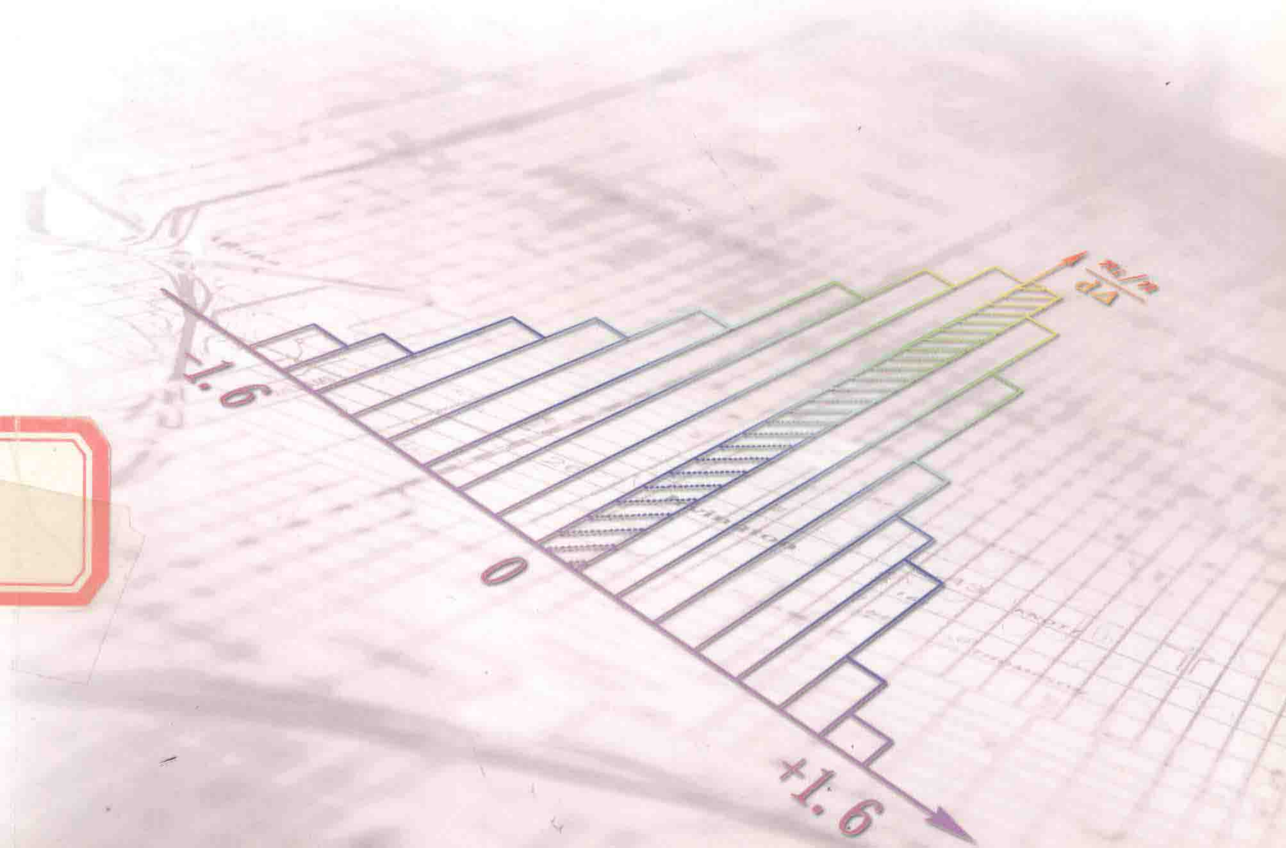
测量平差

第二版

Celiang Pingcha

张书毕　主编

中国矿业大学出版社



高等教育“十二五”规划教材

测量平差

（第二版）

主　编　张书毕

副主编　赵长胜　史经俭　吕伟才

参　编　孙小荣　张恒璟　朱刘娟

　　　　陶秋香　郑崇启　宁永香

中国矿业大学出版社

内容提要

本书共分八章，第一章介绍测量误差及其传播定律，第二章介绍平差数学模型与最小二乘原理，第三章介绍条件平差的原理和方法，第四章介绍间接平差的原理和方法，第五章介绍各种平差方法的实际应用，第六章介绍了误差椭圆，第七章介绍误差分布与平差参数的统计假设检验，第八章介绍近代平差理论。附录中简要介绍 MATLAB 在平差中的应用。各章后均附有习题，并且对部分习题给出参考答案。

本书是高等院校测绘工程专业的基础课程教材，也可作为测绘工程专业研究生和专科生的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

测量平差/张书毕主编. —2 版. —徐州：中国矿业大学出版社，2013.2

ISBN 978-7-5646-1379-2

Ⅰ. ①测… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①测量平差 Ⅳ. ①P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 280845 号

书　　名 测量平差
主　　编 张书毕
责任编辑 潘俊成
出版发行 中国矿业大学出版社有限责任公司
（江苏省徐州市解放南路　邮编 221008）
营销热线 (0516)83885307　83884995
出版服务 (0516)83885767　83884920
网　　址 http://www.cumtp.com　**E-mail**：cumtpvip@cumtp.com
印　　刷 徐州中矿大印发科技有限公司
开　　本 787×1092　1/16　**印张** 18.25　**字数** 456 千字
版次印次 2013 年 2 月第 2 版　2013 年 2 月第 1 次印刷
定　　价 28.00 元

再版前言

自20世纪70年代以来，测量平差与误差理论得到了充分的发展，这些研究成果在常规测量技术中的应用已经相当普遍；80～90年代是测量平差的大发展时期，此间，数据处理理论、方法、应用的研究非常广泛，发表的相关论文也很多，测量平差作为测绘科学与技术的一面旗帜，发挥了极其重要的作用。随着测绘新技术的发展，产生了许多新的误差理论和测量平差问题，既需要应用已有的理论和方法去解决，同时更需要提出新的理论和方法，以适应当前和未来测量事业的发展，本教材正是为适应此需要而编写的。

“测量平差”是测绘工程专业重要的专业基础课之一，同时又是后续其他专业课程的基础，为适应新形式的发展需要，作者根据多年的教学与实践编写了本书。除一些经典的理论和方法之外，本书的特色内容有：① 循序渐进地由简易平差过渡到严密平差，将平差的函数模型和随机模型进行有机的结合；② 给出了各种平差方法与实际工程应用的具体实例；③ 从集合论的角度论述了各种平差方法的统一性；④ 推出了点位误差在相互垂直的两个方向上相关系数的极值；⑤ 推出了点位落在误差曲线内的概率；⑥ 给出了使用 MATLAB 语言进行平差计算的方法。全书附有较丰富的各种典型习题，部分使用 MATLAB 语言进行计算，可以为学生提供较大的帮助。

本书由中国矿业大学张书毕、河南理工大学朱刘娟、山东科技大学陶秋香、徐州师范大学赵长胜、安徽理工大学吕伟才、辽宁工程技术大学张恒璟、西安科技大学史经俭、河南城建学院郑崇启、太原理工大学阳泉学院宁永香、宿迁学院孙小荣联合编写。张书毕任主编并对全书进行了统稿，赵长胜、史经俭、吕伟才任副主编。在本教材编写过程中参考了许多资料，在此一并向有关作者和单位表示衷心的感谢！

由于编者水平所限，缺点错误难免，敬请读者批评指正。

编　者

2013年1月

目　录

第一章　测量误差及其传播定律

第一节　测量误差及分类

在日常的测量工作中，我们经常会遇到如下情况：对同一个观测量进行重复观测，其结果总是存在一定的差异。例如，在地面上两点间进行水准测量，往返测得到的两点间高差并不相同；由几何学知道，一个平面多边形的内角和等于$(n-2)\times180°$(n为多边形的边数)，如果对所有内角进行观测，其观测值之和通常不等于上面的理论值；等等。产生上述情况的原因，是任何测量都必然带有观测误差。

观测误差的产生有内在原因和外界条件的影响。内在原因，包括测量仪器精密度有限所产生的误差，J_2型经纬仪测微器最小刻划为1″，在估读1″以下的尾数时就存在误差。还有仪器结构的不完善，观测者感觉器官的鉴别能力、技术水平等也会对仪器的安置、照准、读数等方面产生误差。外界条件的影响，主要指观测时所处的外界条件，如温度、湿度、风力、大气折光等的不同或变化，导致观测结果产生误差。

仪器、观测者、外界条件等是引起测量误差的主要来源。人们习惯地把这三方面的原因称为观测条件。不管观测条件如何，在测量中产生误差是不可避免的。测量工作者的责任是采取不同的措施，尽可能地消除或减少误差对观测结果的影响，提高观测成果的精度。为此需要对误差出现的规律进行研究，搞清各种误差的性质，这样便于对不同性质误差的观测结果采用不同的方法加以处理。

根据观测误差对测量结果影响的性质不同，可以把测量中出现的误差分为三种类型：偶然误差、系统误差和粗差。

一、偶然误差

在一定条件下做一系列的观测，如果观测误差从表面上看其数值和符号不存在任何确定的规律性，但就大量误差总体而言，具有统计性的规律，这种误差称为偶然误差。

例如用经纬仪测量角度时，测角误差是由许多偶然因素引起的，这些偶然因素在不断变化，体现在单个的微小测角误差上，其数值或大或小，符号或正或负，无法事先预知，呈现随机性。偶然误差服从或近似服从正态分布，且误差的平均值随观测次数的增加而趋于零。由此可见，偶然误差就总体而言，具有一定的统计规律；偶然误差也就是均值为零的随机误差，也称为不规则误差。

二、系统误差

在一定的观测条件下做一系列的观测，如果观测的误差在大小、符号上表现出系统性，

或者为某一常数，或者按照一定的规律变化，这种带有系统性和方向性的误差称为系统误差。系统误差又可分为：

常系统误差——假设使用没有调整好零位的仪器进行重复观测，其结果总是略高或略低于真值，这种误差称为零位误差，是系统误差的一种。常系统误差常常表现出固定性，即符号、数值保持不变。也有人把这种误差称为常数误差。

可变系统误差——这种系统误差是按一定规律变化的，表现出累积性：在测量过程中不断增加或者减小；还表现出周期性：数值和符号有规律地变化。

单向误差——这种误差的大小变化不定，但符号总是相同的。

上述误差是不可避免的，即使观测者十分认真且富有经验，测量仪器做了最好的校正，而且外界条件又最有利，这些误差仍然会产生。

系统误差与偶然误差在观测过程中是同时发生的，当观测值中有显著的系统误差时，偶然误差就居于次要地位，观测误差就呈现出系统的性质。反之，则呈现出偶然的性质。

系统误差对于观测结果的影响一般有累积的作用，它对观测成果的质量影响也特别显著。在实际工作中，应该采用各种方法来消除或减弱系统误差对观测成果的影响，使其达到实际上可以忽略不计的程度。例如，在测量之前对测量仪器进行认真的检验与校正，在测量过程中采用合适的测量方法，对观测成果进行必要的改正等。

三、粗差

错误或者粗差属可避免的误差，例如瞄错目标、读错数等。从统计学的观点看，粗差是观测结果，不属于所研究的分布中相同的样本，它们当然不能和其他观测结果一起使用。例如，在正态分布中粗差不可能发生。因此，优化测量程序时要能够查出粗差，并加以排除，平差计算中不考虑粗差。

在实际工作中，为了提高观测成果的质量，发现和消除错误，通常要使观测值的个数多于未知量的个数，也就是要进行多余观测。例如，一个平面三角形，只需要观测其中的两个内角，即可决定它的形状，但通常是观测三个内角。由于偶然误差的存在，通过多余观测必然会发现在观测结果之间不相一致，或不符合应有关系而产生不符值。因此，必须对这些带有偶然误差的观测值进行处理，消除不符值，得到观测量的最可靠的结果。由于这些带有偶然误差的观测值是一些随机变量，因此，可以根据概率统计的方法来求出观测量的最可靠结果，这就是测量平差的一个主要任务；测量平差的另一个主要任务是评定测量成果的精度。

第二节　偶然误差的概率特性

在经典测量平差中，我们所处理的是一系列带有偶然误差的观测值，假设已经消除了系统误差和粗差的影响。因此有必要对偶然误差的性质作进一步的研究。

我们把第 i 次观测中发生的偶然误差定义为理论值 $\widetilde{L}_i$ 与相应的观测值 L_i 之差，此时偶然误差又称真误差，真误差＝理论值－观测值，即：

$$\Delta_i = \widetilde{L}_i - L_i \tag{1-2-1}$$

式中，$\widetilde{L}_i$ 表示 L_i 的真值。

由第一节内容可知，就单个偶然误差而言，其大小或符号没有规律性，即呈现出一种偶

然性(或随机性);但就其总体而言,却呈现出一定的统计规律性,并且它是服从正态分布的随机变量。从无数的测量实践中发现,在相同的观测条件下,大量偶然误差的分布也确实表现出了一定的统计规律性。下面用一个实例来说明。

在相同的条件下,独立地观测 358 个三角形的全部内角,由于观测值带有偶然误差,故三内角观测值之和不等于其真值 180°,各个三角形内角和的真误差为:

$$\Delta_i = 180^\circ - (L_1 + L_2 + L_3)_i \quad (i = 1, 2, \cdots, 358)$$

式中,$(L_1 + L_2 + L_3)_i$ 表示各三角形内角和的观测值。

现取误差区间的间隔 $d\Delta$ 为0.20″,将这一组误差按其正负号与误差值的大小排列,统计误差出现在各区间内的个数 n_i,以及“误差出现在某个区间内”这一事件的频率 $n_i/n(n=358)$,其结果列于表 1-1 中。

表 1-1　某测区三角形内角和的误差分布

误差的区间 $d\Delta$ (″)	Δ为负值			Δ为正值			备注
	个数 n_i	频率 n_i/n	$\frac{n_i/n}{d\Delta}$	个数 n_i	频率 n_i/n	$\frac{n_i/n}{d\Delta}$	
0.00～0.20	45	0.126	0.630	46	0.128	0.640	$d\Delta$=0.20″等于区间左端值的误差算入该区间内
0.20～0.40	40	0.112	0.560	41	0.115	0.575	
0.40～0.60	33	0.092	0.460	33	0.092	0.460	
0.60～0.80	23	0.064	0.320	21	0.059	0.295	
0.80～1.00	17	0.047	0.235	16	0.045	0.225	
1.00～1.20	13	0.036	0.180	13	0.036	0.180	
1.20～1.40	6	0.017	0.085	5	0.014	0.070	
1.40～1.60	4	0.011	0.055	2	0.006	0.030	
1.60 以上	0	0	0	0	0	0	
和	181	0.505		177	0.495		

从表中可以看出,偶然误差的分布呈现出如下规律:

① 绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的机会多。

② 误差的绝对值有一定的限值。

③ 绝对值相等的正、负误差的个数相近。

偶然误差分布的情况,除了采用上述误差分布表的形式表达外,还可以利用图形来表示。以横坐标表示误差 Δ 的大小,纵坐标代表各区间内误差出现的频率除以区间的间隔值,即$\frac{n_i/n}{d\Delta}$(此处间隔值均取为 $d\Delta$=0.20″),这种图形称为频率直方图,如图 1-1 所示。它形象地表示了误差的分布情况。

在误差个数 $n\to\infty$的情况下,由于误差出现的频率已趋于完全稳定,此时把误差区间间隔无限缩小,图 1-1 中各长方条顶边所形成的折线将变成如图 1-2 所示的光滑曲线。这种曲线称为误差分布曲线。由此可见,随着 n 的逐渐增大,偶然误差的频率分布都是以正态分布为其极限的。通常也称偶然误差的频率分布为其经验分布,而将正态分布称为它们的理论分布。在理论研究中,都是以正态分布作为描述偶然误差分布的数学模型,这不仅方便,而且基本上符合实际情况。

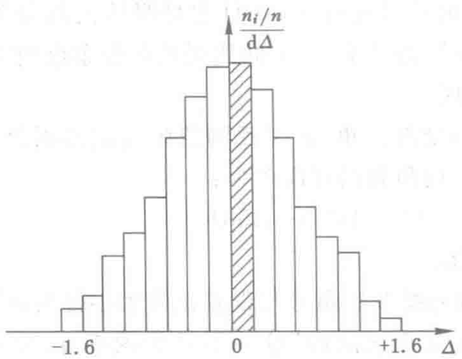


图 1-1

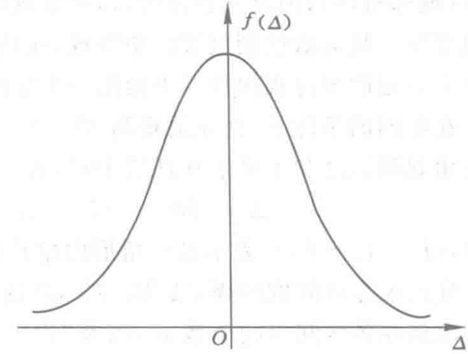


图 1-2

通过大量的实践，人们概括出偶然误差的几个概率特性：

① 在一定的观测条件下，误差的绝对值有一定的限值，或者说超出一定限值的误差出现的概率为零。

② 绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的概率大。

③ 绝对值相等的正、负误差出现的概率相同。

④ 偶然误差的数学期望为零，即 $E(\boldsymbol{\Delta})=E[E(\boldsymbol{L})-\boldsymbol{L}]=E(\boldsymbol{L})-E(\boldsymbol{L})=0$。

也就是说，偶然误差的理论平均值等于零。

在图 1-1 中，以纵坐标$\frac{n_i/n}{d\Delta}$为高的各长方条的面积即为误差出现在该区间内的频率。若以理论分布取代经验分布（图 1-2），图 1-1 中各长方条的纵坐标就是 Δ 的密度函数$f(\Delta)$，而长方条的面积为 $f(\Delta)d\Delta$，即代表误差出现在该区间内的概率，即 $P(\Delta)=f(\Delta)d\Delta$。概率密度表达式为：

$$f(\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \tag{1-2-2}$$

式中，σ 为标准差，在测量工作中也称为中误差。

当上式中的参数 σ 确定后，即可画出它所对应的误差分布曲线。由于 $E(\Delta)=0$，所以该曲线是以横坐标为 0 处的纵轴为对称轴。当 σ 不同时，曲线的位置不变，但分布曲线的形状将发生变化。偶然误差 Δ 是服从 $N(0,\sigma^2)$ 分布的随机变量。这里应该指出的是，测量误差是连续型随机变量，而连续型随机变量出现于个别点上的概率等于零，因此，所谓的误差出现的概率是指误差出现于某一区间的概率。

第三节　精度及其衡量指标

从前面的讨论我们可以看出，若使用真误差作为衡量精度的指标，由真误差的定义和其具有的随机性，可以得到相同观测条件下的一组观测值，其每一个真误差都可能不同，因此，使用真误差作为衡量精度的指标存在不方便和不科学的一面，因此通过分析总结，提出以下几种衡量精度的指标。

如果在一定的观测条件下进行一组观测，则它对应着一种确定的误差分布。若误差分

布较为密集，即离散度较小时，表示该组观测质量较好，也就是说，这一组观测精度较高；反之，如果误差分布较为离散，即离散度较大时，则表示该组观测质量较差，也就是说，这一组观测精度较低。为了说明观测值的可靠性，我们引入精度、准确度和精确度的概念。

精度——表示同一量的重复观测值之间密集或吻合的程度，即各观测结果与其中数的接近程度。如果重复观测值密集在一起，说明它们的精度高；如果它们分散得很开，则精度就低。一般来说，精度高反映了在进行测量时测量人员高度细心、仪器精密和方法得当。

准确度——表示观测值对真值的吻合或接近程度，即反映一个位置统计与其所估的参数值的接近程度。准确度不仅包括随机误差的影响，还包括由于未改进的系统误差引起的偏离。由于测量平差的主要研究对象是偶然误差，而且是在剔除了粗差和消除或尽量减小了系统误差的基础上进行的，所以平差时可以不考虑准确度。

精确度——是精度和准确度的合成，是指观测结果与其真值的接近程度，包括观测结果与其数学期望接近程度和数学期望与其真值的偏差。因此，精确度反映了偶然误差和系统误差联合影响的大小程度。当不存在系统误差时，精确度就是精度，精确度是一个全面衡量观测质量的指标。下面图 1-3 表示甲、乙、丙的打靶成绩，其中，甲精度最高，但整体偏离靶心，准确度差；乙精度低，但准确度尚好；而丙精度较高，准确度也较高，即精确度较高。

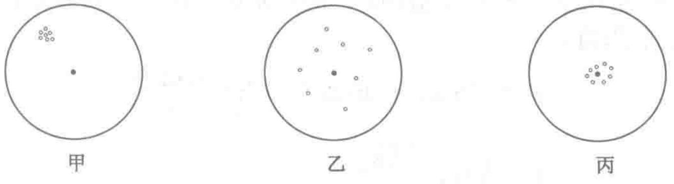


图 1-3

一、一维误差分布与精度指数

由概率论可知，服从正态分布的一维随机变量 x 的概率密度为：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1-3-1}$$

式中，μ、σ 为分布密度的两个参数，分别表示随机变量 x 的数学期望和标准差。

对于偶然误差来说，一维误差分布的密度函数为：

$$f(\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \tag{1-3-2}$$

一维误差分布的图形如图 1-4 所示，它有如下性质：

① $f(\Delta)$为偶函数，曲线对称于纵轴。

② $f(\Delta)$随着误差绝对值的增大而减小，当$\Delta\to\infty$，$f(\Delta)\to 0$。

③ 当 $\Delta=0$ 时，有：

$$f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

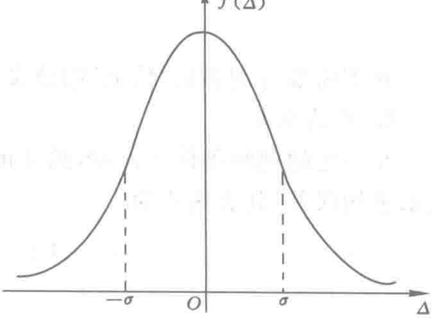


图 1-4

为函数的最大值。

④ 误差曲线拐点的横坐标为中误差，即：

$$\Delta = \pm\sigma$$

这可由 $f(\Delta)$求二阶导数得出。

一维正态分布密度函数公式中的两个参数 μ、σ 决定了曲线的位置和形状。由此可见，当 μ 相同时，如只变动 σ，则曲线位置不变，其形状要发生变化。也就是说，数学期望 μ 表示随机变量的集中位置，而标准差（中误差）σ 则表示随机变量围绕集中位置的离散度。由于各分布曲线下面所围成的面积均等于 1，所以 σ 越小曲线形状越陡峭，表示随机变量对数学期望 μ 的离散程度小，从测量来讲，表示观测精度高；σ 越大，曲线形状越平缓，也就是随机变量对 μ 的离散程度大，就测量来说，表示观测精度低。

二、衡量精度的指标

衡量精度高低，可用绘制误差分布曲线的方法来进行。但这种方法比较麻烦，而且人们还需要对精度有一个数字概念。下面引入几种衡量精度的指标。

1. 方差和中误差

式(1-3-2)中 σ^2 是误差分布的方差，而 σ 是中误差。方差是真误差的平方（Δ^2）的数学期望，即 Δ^2 的理论平均值：

$$\left.\begin{aligned} \sigma^2 &= D(\Delta) = E(\Delta^2) = \lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta\Delta]}{n} \\ \sigma &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \end{aligned}\right\} \tag{1-3-3}$$

由概率论公式知：

$$\sigma^2 = D(\Delta) = E(\Delta^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\Delta^2 f(\Delta)\mathrm{d}\Delta$$

从上式可以看出，精度指数愈大，中误差（标准差）愈小，表示观测精度愈高；反之，精度愈低，所以中误差可以作为衡量精度的一种指标。这一点在一维误差分布的图形中也可明显看出。

式(1-3-3)中中误差 σ 是$\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$的极限值。在实际工作中，观测个数 n 总是有限的，有限个真误差 Δ 只能求出中误差的估值。因此在本书中将用 $\hat{\sigma}$ 表示中误差 σ 的估值，即：

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{1-3-4}$$

在不需要特别强调“估值”的意义时，常把“中误差估值”简称为“中误差”。

2. 平均误差

在一定的观测条件下，一组独立的偶然误差绝对值的数学期望称为平均误差。设以 θ 表示平均误差，其表达式为：

$$\theta = E(|\Delta|) = \int_{-\infty}^{+\infty}|\Delta| f(\Delta)\mathrm{d}\Delta \tag{1-3-5}$$

或

$$\theta = E(|\Delta|) = \lim_{n\to\infty}\frac{[|\Delta|]}{n}$$

因为上式的被积函数是偶函数,故可写成：

$$\theta=\int_{-\infty}^{+\infty}|\Delta|f(\Delta)\mathrm{d}\Delta=2\int_{0}^{+\infty}\Delta\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\Delta$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}(-\sigma\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}})$$

$$=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}[-\mathrm{e}^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}]_0^{+\infty}$$

所以有：

$$\theta=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\approx\frac{4}{5}\sigma \tag{1-3-6}$$

或者

$$\sigma=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta\approx\frac{5}{4}\theta \tag{1-3-7}$$

由于观测值的个数 n 总是一个有限值,因此在实用上也只能用 θ 的估值来衡量精度,并用 $\hat{\theta}$ 表示 θ 的估值,有：

$$\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|\Delta_i|}{n} \tag{1-3-8}$$

由此可见,平均误差也可作为衡量精度的指标。在实际工作中,当 n 较小时,平均误差不易反映大误差的存在。就这一点来说,中误差使用起来较平均误差优越。

3. 或然误差

或然误差 ρ 的定义是:在相同的观测条件下,大于或然误差与小于或然误差的观测误差(绝对值)出现的概率各占一半,也就是说误差出现在 $(-\rho,+\rho)$ 之间的概率等于 1/2(见图 1-5),即：

$$P(-\rho<\Delta<+\rho)=\int_{-\rho}^{+\rho}f(\Delta)\mathrm{d}\Delta=\frac{1}{2} \tag{1-3-9}$$

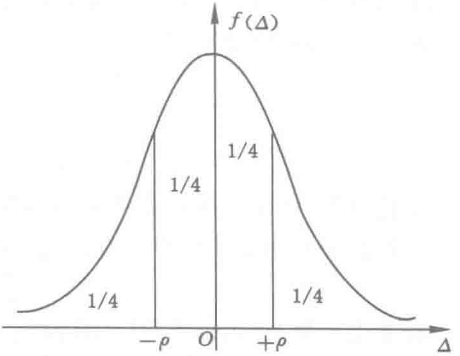


图 1-5

借助正态分布表求或然函数。Δ 服从 $N(0,\sigma^2)$,需要进行标准化,令：

$$t=\frac{\Delta-0}{\sigma}=\frac{\Delta}{\sigma}$$

则 t 服从 $N(0,1)$,当 $\Delta=+\rho$ 时,$t=\frac{\rho}{\sigma}$;当$\Delta=-\rho$时,$t=-\frac{\rho}{\sigma}$。

故

$$P(-\rho<\Delta<+\rho)=P(-\frac{\rho}{\sigma}<t<+\frac{\rho}{\sigma})$$

$$=\Phi(\frac{\rho}{\sigma})-\Phi(-\frac{\rho}{\sigma})=2\Phi(\frac{\rho}{\sigma})-1=\frac{1}{2}$$

解之得：

$$\Phi(\frac{\rho}{\sigma}) = 0.75$$

由概率积分表查得：

$$\left.\begin{aligned}\rho &\approx 0.674\ 5\sigma \approx \frac{2}{3}\sigma \\ \sigma &\approx 1.482\ 6\rho \approx \frac{3}{2}\rho\end{aligned}\right\} \tag{1-3-10}$$

我们把参数 ρ(或然误差)称为 50%的不确定度。

在实用上是这样求取或然误差的估值 $\hat{\rho}$ 的：将相同条件下得到的一组误差，按绝对值的大小排列，当 n 为奇数时，取位于中间的一个误差值作为 $\hat{\rho}$；当 n 为偶数时，取位于中间的两个误差值的平均值作为 $\hat{\rho}$。实际计算中通常都是先求出中误差的估值，然后按式(1-3-10)求出或然误差 $\hat{\rho}$，即 $\hat{\rho}\approx 0.674\ 5\hat{\sigma}$。

因此，中误差 $\hat{\sigma}$ 比或然误差更能灵敏地反映大误差的影响，同时在计算或然误差时往往先计算出 $\hat{\sigma}$ 然后再计算 $\hat{\rho}$，所以世界各国在使用上都采用中误差作为衡量精度的指标。

4. 极限误差

中误差不是代表个别误差的大小，而是代表误差分布的离散程度。由中误差的定义可知，在相同的观测条件下所进行的一组观测，由于它们对应着同一种误差分布，因此把这一组中每一个观测值，都视为同精度观测值。但是，这一组观测结果的真误差彼此并不相等，有的甚至相差很大。按正态分布表查得，绝对值大于 1 倍中误差的偶然误差出现的概率为 31.7%；大于 2 倍中误差的偶然误差出现的概率为 4.5%；大于 3 倍中误差的偶然误差出现的概率仅有 0.3%，即在大量同精度观测的一组误差中，误差落在$(-\sigma,+\sigma)$、$(-2\sigma,+2\sigma)$和$(-3\sigma,+3\sigma)$的概率分别为：

$$\left.\begin{aligned}P(-\sigma < \Delta < +\sigma) &\approx 68.3\% \\ P(-2\sigma < \Delta < +2\sigma) &\approx 95.5\% \\ P(-3\sigma < \Delta < +3\sigma) &\approx 99.7\%\end{aligned}\right\} \tag{1-3-11}$$

由此可见，大于 3 倍中误差的偶然误差出现的可能性非常小，是概率接近于零的小概率事件。因此通常规定三倍中误差作为偶然误差的极限值 $\Delta_{限}$，并称为极限误差。即：

$$\Delta_{限} = 3\sigma \tag{1-3-12}$$

若要求严格，也可取 2σ 作为极限误差。使用上以中误差的估值 $\hat{\sigma}$ 代替 σ，以 $3\hat{\sigma}$ 或 $2\hat{\sigma}$ 作为极限误差。在测量中，如果某误差超过了极限误差，则认为它是错误的，相应的观测值应进行重测、补测或舍去不用。

5. 相对误差

前面四种衡量精度的指标都是绝对误差，有时观测结果需要用相对误差来衡量其精度。比如在距离测量中，常常采用相对误差来衡量精度。所谓相对误差是中误差与平差值之比，在测量中通常把分子化为 1，即用$\frac{1}{N}$来表示。

关于经纬仪导线测量，相关规范规定，其相对闭合差不能超过$\frac{1}{2\ 000}$，指的就是相对极限误差；在实测中所产生的相对闭合差，则是指相对真误差。

三、衡量准确度的指标

前已述准确度是随机变量 X 的真值 $\widetilde{X}$ 与其数学期望 $E(X)$ 之差，即：

$$\varepsilon = \widetilde{X} - E(X) \tag{1-3-13}$$

即 $E(X)$ 的真误差，这是存在系统误差的情况。因此，准确度表征了观测结果系统误差太小的程度。当不存在系统误差时，$E(X)=\widetilde{X}$，故 $\varepsilon=0$。

衡量系统误差大小程度的指标是准确度。

四、衡量精确度的指标

由前述知识可知，影响精确度的因素不仅有观测值的随机误差分量，还有未经改正的系统误差引起的偏离。

这里用均方误差作为衡量精确度的指标，其定义为如下的期望：

$$M^2 = E[(X - \widetilde{X})^2]$$

式中，$\widetilde{X}$ 是"真"值。

若偏差定义为：

$$\varepsilon = \mu_x - \widetilde{X}$$

运用数学期望的性质可得：

$$M^2 = E[((X - \mu_x) + (\mu_x - \widetilde{X}))^2]$$

$$M^2 = \sigma^2 + \varepsilon^2 \tag{1-3-14}$$

σ 增大表明精度降低，同样，M 增大也表明精确度降低了。

由式(1-3-14)可以看出：精度高并不一定意味着精确度高。例如，如果 σ 小而 ε 大，则表明该观测值的精度高但准确度低。

如果 $\varepsilon=0$(即观测值无偏差)，则均方误差就等于方差，且任一精度指标也就是精确度的指标。因此，如果将精度指标也作为精确度指标，则重要的是须将系统误差的影响降低到可忽略不计的程度。

第四节　协方差传播律

一、协方差与相关

如果在同一概率模型中包含了两个随机变量 X 和 Y，则它们的联合分布函数为：

$$F(x,y) = P[X \leqslant x, Y \leqslant y]$$

上式可以认为是 X 小于或等于某一确定的值 x，同时 Y 小于或等于某一确定的值 y 这一事件发生的概率。

单个随机变量的边际分布函数可以由联合分布函数得到，即：

$$F(x) = P[X \leqslant x, Y \leqslant \infty] = F(x,\infty)$$

和

$$F(y) = P[X \leqslant \infty, Y \leqslant y] = F(\infty,y)$$

若 X 和 Y 是连续型随机变量，则它们的联合密度函数为：

$$f(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}F(x,y)$$

它们的联合分布函数可用下式表示：

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{1-4-1}$$

式中，$f(u,v)$是联合密度函数。

还可以证明，X 和 Y 的边际密度函数分别是：

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y \tag{1-4-2}$$

和

$$f(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x \tag{1-4-3}$$

如果一个事件的发生不影响另一事件的发生，则这两个事件相互独立。同样，如果一个随机变量的取值不影响另一个随机变量的取值，则称这两个随机变量相互独立。对于独立的随机变量 X 和 Y，则有：

$$P[X\leqslant x,Y\leqslant y]=P[X\leqslant x]P[Y\leqslant y]$$

或者写为：

$$F(x,y)=F(x)F(y)$$

如果 X 和 Y 具有连续型联合分布且相互独立，则由上式两边求导就可得到：

$$f(x,y)=f(x)f(y)$$

这一独立性的相乘关系可以进一步推广到数学期望。特别是对于相互独立的 X 和 Y，可以证明：

$$E[XY]=E[X]E[Y]=\mu_x\mu_y \tag{1-4-4}$$

X 和 Y 的边际分布具有各自独立的均值和方差，它们分别是 μ_x、μ_y 和 σ_x^2、σ_y^2。除了这四个参数之外，还有第五个参数，它是衡量这两个随机变量间的相关程度的。这一参数为协方差，用符号 $\mathrm{cov}(X,Y)$或 σ_{xy} 表示，它定义为如下的期望值：

$$\mathrm{cov}(X,Y)=\sigma_{xy}=E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)] \tag{1-4-5}$$

它可能是正值、零或者负值。当 σ_{xy} 为正值时，则称它们为正相关；当 σ_{xy} 为零时，则称它们为不相关或无关；当 σ_{xy} 为负值时，则称它们为负相关。

对于连续型的情况，则有：

$$\sigma_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)(y-\mu_y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1-4-6}$$

若将式(1-4-5)右边的期望展开，并根据有关期望的性质使之简化，就可得到如下有用的关系式：

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}&=E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]\\&=E[XY-\mu_xY-\mu_yX+\mu_x\mu_y]\\&=E[XY]-\mu_xE[Y]-\mu_yE[X]+\mu_x\mu_y\\&=E[XY]-\mu_x\mu_y-\mu_x\mu_y+\mu_x\mu_y\\&=E[XY]-\mu_x\mu_y\end{aligned} \tag{1-4-7}$$

若 X 和 Y 相互独立，式(1-4-4)成立，则由式(1-4-7)必然可得：