信号与信息处理
—技术丛书—

非线性动态系统运动分析理论及应用

曹少中　赵伟　著

中国工信出版集团
電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

非线性动态系统运动分析理论及应用

曹少中　赵伟　著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书系统地论述了非线性动态系统运动分析的初步理论、方法和技术。主要内容包括：非线性动态系统分析的理论基础、几种非线性动态系统分析方法、非线性动态系统状态方程迭代解法、非线性动态系统状态方程级数解法、一般非线性动态系统分析、直接积分法在求解非线性偏微分方程中的应用、直接积分法在球形机器人控制系统上的应用、直接积分法在六自由度并联平台控制系统上的应用。

本书适合从事控制科学、智能科学、系统科学、计算机科学等领域研究的学者、研究生和工程技术人员阅读。

图书在版编目（CIP）数据

非线性动态系统运动分析理论及应用 / 曹少中，赵伟著. —北京：电子工业出版社，2017.1

ISBN 978-7-121-29118-0

Ⅰ. ①非… Ⅱ. ①曹… ②赵… Ⅲ. ①非线性系统（自动化）—动态系统—系统分析 Ⅳ. ①TP27

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 137174 号

责任编辑：董亚峰
特约编辑：罗树利　赵海红等
印　　刷：北京季蜂印刷有限公司
装　　订：北京季蜂印刷有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编：100036
开　　本：720×1000　1/16　印张：12.75　字数：266 千字
版　　次：2017 年 1 月第 1 版
印　　次：2017 年 1 月第 1 次印刷
定　　价：39.00 元

前言

世界是复杂的，世界的本质是非线性的。非线性系统广泛涉及物理学、力学、地球科学、生命科学、应用数学和工程技术等研究领域，求解描述自然界许多重要物理现象的非线性方程（包括非线性常微分方程、非线性偏微分方程、非线性差分方程和函数方程等），获得其解析解或近似解析解，更好地理解和探求问题的本质特征，无疑成为当代非线性科学的一项重要研究内容。因此，探索非线性系统的复杂现象，揭示其演化的规律，提出可行的解决方法，不仅对非线性科学基础理论的研究有着重要意义，而且对现代技术的发展也具有重大的应用价值。

本书以北京市教育委员会科技计划重点项目暨北京市自然科学基金重点项目（B类）“电子辐照加速器物理设计及油墨固化研究”（KZ201110015017）、国家自然科学基金面上项目“高速印刷装备中的非线性动力学过程分析与求解”（61272030）为任务背景，就非线性系统状态方程求解、机器人控制系统动力学建模及分析等方面展开了初步研究。

本书主要内容包括：非线性动态系统分析的理论基础、几种非线性动态系统分析方法、非线性动态系统状态方程迭代解法、非线性动态系统状态方程级数解法、一般非线性动态系统分析、直接积分法在求解非线性偏微分方程中的应用、直接积分法在球形机器人控制系统上的应用、直接积分法在六自由度并联平台控制系统上的应用。本书第1～7章由曹少中主笔，第8、9章由赵伟主笔。

在本书出版之际，特别感谢北京市教育委员会、北京市自然科学基金委员会、国家自然科学基金委员会对本书中涉及的研究内容给予的资助。同时，感谢北京印刷学院科研处、高端印刷装备信号与信息处理北京市重点实验室对本书的出版给予的帮助和支持。此外，感谢本书所引用文献的专家学者的支持和帮助。

由于作者水平有限，书中难免会有不妥之处，衷心希望读者批评指正。

目 录

第1章 绪论

1.1 引言

众所周知，世界是复杂的，世界的本质是非线性的。许多描述自然界、工程技术和社会科学领域的系统都是由相互作用而又相对独立的“同质介体”构成的复杂非线性系统，因此，探索非线性系统的复杂现象，揭示其演化的规律，提出可行的解决方法，不仅对非线性科学基础理论的研究有着重要意义，而且对现代技术的发展也具有重大的应用价值。在研究和认识非线性的过程中，产生了非线性控制理论。作为非线性学科的重要组成部分，同时也是控制学科中最具活力和挑战性的研究领域，非线性控制理论及其应用技术越来越受到国内外控制理论学者的高度重视，人们进行了大量的研究工作和有益的探索，获得了许多有价值的重要研究成果[1]。

非线性是自然界和工程技术领域最普遍的现象，非线性控制理论是在20世纪80年代后期，以意大利学者、罗马大学的Isidari教授等为代表的非线性控制理论专家学者，将微分几何引入控制理论，才得到飞跃性的发展，并

且受到普遍重视。通过利用 Lie 括号及微分同胚等基本工具研究非线性系统的状态、输入及输出变量之间的依赖关系，系统地建立了非线性控制系统可控性、可观性及可检测性的充分必要条件，特别是全局状态精确线性化和输入/输出精确线性化的发展，使复杂的非线性问题在一定条件下可以转化为线性问题来处理。然而，仅仅线性化是不够的，还必须开发用于分析非线性系统的方法。线性化有两个基本限制：第一，由于大部分线性化方法（精确线性化除外）是在工作点附近的近似，因此，仅能预测出这一点邻域内非线性系统的“局部”特性，而不能预测出远离工作点的“非局部”特性，当然也就不能预测整个状态空间的“全局”特性；第二，非线性系统动力学远远比线性系统动力学丰富，有一些“本质上的非线性”只有在非线性条件下才能发生，因而不能由线性模型描述或预测。

非线性系统需用非线性微分方程描述，不能应用迭加原理。在非线性系统中，其时域响应除发散和收敛两种形式外，即使无外部激励，也可能发生某一固定振幅和频率的自激振荡，在某些非线性系统中，还可能产生不止一种振幅和频率都不相同的自激振荡，甚至还可能出现跳跃谐振、倍频振荡和分频振荡等现象。这就决定了非线性微分方程类型及其解的多样性，没有一种统一的方法来求解非线性微分方程。

在线性理论日臻完善的今天，非线性科学已经蓬勃发展于物理学、力学、地球科学、生命科学、应用数学和工程技术等研究领域，求解描述自然界许多重要物理现象的非线性方程（包括非线性常微分方程、非线性偏微分方程、非线性差分方程和函数方程等），获得其解析解或近似解析解，更好地理解和探求问题的本质特征，无疑成为当代非线性科学的一个重要研究内容。

几十年来，通过众多科学家不断地努力，人们已经建立和发展了许多求解非线性方程的有效方法，如反散射变换方法、Darboux 变换方法、Bäcklund 变换、Hirota 方法、相似约化方法、Painlevé截断展开方法、齐次平衡方法等，通过这些方法求解了一批有重要理论和应用价值的非线性微分方程，极大地推动了非线性科学在这一领域的发展。但由于非线性方程本身的复杂性和多

样性，至今没有一种统一的求解方法，而且在众多的非线性方程中，能够精确求解的方程却是微乎其微的。

在科学和工程领域被广泛应用的绝大多数非线性方程只能通过数值方法求解。数值方法一般用于求解复杂计算域上的非线性问题，它将原始方程和边界或初始条件离散化，从而改变了方程的定量精度，而且其定性性质常常也被改变，使得所获得的数值解很难反映物理量的变化趋势和它们之间的关系，不利于参数的优化。值得注意的是，数值方法对于奇点或多解的情况通常会失效，它的优点是能够求解许多难以获得解析解的非线性方程。这就说明了，尽管随着计算机技术的迅猛发展，如今数值方法可以解决更加复杂、更加实际的问题，但解析的方法依然是不可或缺的。如前所述，由于大多数方程难以精确求解，因此解析近似方法的研究应运而生，引起国内外专家学者的关注。在传统的解析近似方法中，最为著名的摄动方法、Lyapunov 人工小参数方法和展开方法等仅适用于弱非线性问题。对于大多数强非线性问题，研究适用于它们的解析近似方法显得尤为重要。

1.2 非线性系统的实例

下面给出一些非线性系统的实例，从中可以看出它们的复杂性和非线性特征[2]。

例 1.1 两连杆机器人

考虑如图 1.1 所示的两连杆机器人，根据分析力学中的哈密尔顿（Hamilton）原理，可得其动力学方程为下列形式：

$$M\ddot{q} + B\dot{q} + G(q) = \tau \tag{1.1}$$

式中，$q = (\theta, \gamma)^{\mathrm{T}}$ 为机器人的广义位移坐标向量；$M = M(q)$ 为惯量矩阵；$B = B(q, \dot{q})$ 为哥氏力及离心力项；$G(q)$ 为重力项或未知扰动；τ 为控制力矩向量。

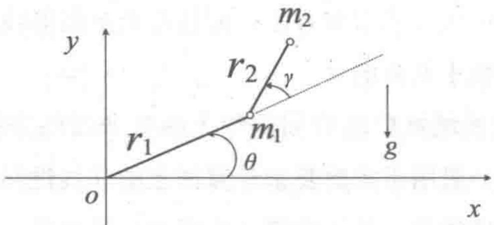

图 1.1 两连杆机器人示意图

各项的具体形式为

$$M_{11}=(m_1+m_2)\underline{r}_1^2+m_2\underline{r}_2^2+2m_2\underline{r}_1\underline{r}_2\cos\gamma$$

$$M_{12}=M_{21}=m_2\underline{r}_2^2+m_2\underline{r}_1\underline{r}_2\cos\gamma;M_{22}=m_2\underline{r}_2^2+J_2$$

$$B_{11}=-2m_2\underline{r}_1\underline{r}_2\dot{\gamma}\sin\gamma;B_{12}=-m_2\underline{r}_1\underline{r}_2\dot{\gamma}\sin\gamma$$

$$B_{21}=m_2\underline{r}_1\underline{r}_2\dot{\gamma}\sin\gamma;B_{22}=0$$

$$G_1=-[(m_1+m_2)\underline{r}_1\cos\theta+m_2\underline{r}_2\cos(\theta+\gamma)]g$$

$$G_2=-m_2\underline{r}_2 g\cos(\theta+\gamma)$$

显然，该系统具有明显的非线性特征。当机器人处于高速运行状态时，有关非线性项的忽略会影响机器人的动态性能。对于多连杆机器人，各连杆间的非线性耦合影响更为突出。

例 1.2 移动机器人

考虑如图 1.2 所示的典型三轮移动机器人，它由具有两个同轴的驱动轮和一个辅助前轮的小车组成，后轮两个独立的电机驱动其移动。其中 (X,Y) 为惯性坐标系；(X_1,Y_1) 为小车坐标系；Q 为小车的几何中心，即小车轮轴的中点，其惯性坐标为 (x_Q,y_Q)；C 为小车重心坐标，其惯性坐标为 (x_C,y_C)；b 为驱动轮与 Q 点之间的距离；r 为驱动轮半径；m 为小车及负载重量；I 为小车在轴上绕 C 点的转动惯量；d 为点 Q 与点 C 之间的距离；(x,y) 为小车轮轴中心点 Q 在惯性坐标系中的位置；θ 为坐标系 $\{Q,X_1,Y_1\}$ 和惯性坐标系之间的夹角。

由图 1.2 知 $(x_C,y_C)=(x+d\cos\theta,y+d\sin\theta)$，为使小车在运动时不存在打滑现象，即小车只能在与驱动轮轴垂直的方向上运动，必须满足以下纯滚

动和无打滑条件：

$$\dot{y}_C\cos\theta-\dot{x}_C\sin\theta-d\dot{\theta}=0 \tag{1.2}$$

选取 $u_1=\dot{x}_C, u_2=\dot{y}_C$ 为控制变量，则上述移动机器人的运动学模型可写为下列形式：

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_C\\ \dot{y}_C\\ \dot{\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -\dfrac{1}{d}\sin\theta & \dfrac{1}{d}\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix} \tag{1.3}$$

注意，此系统的近似线性化模型右端为零，明显是不可控的，但是该非线性系统确实可以用时变状态反馈或不连续状态反馈实现系统的渐近稳定性，我们将在后面有关章节对其进行进一步的讨论。

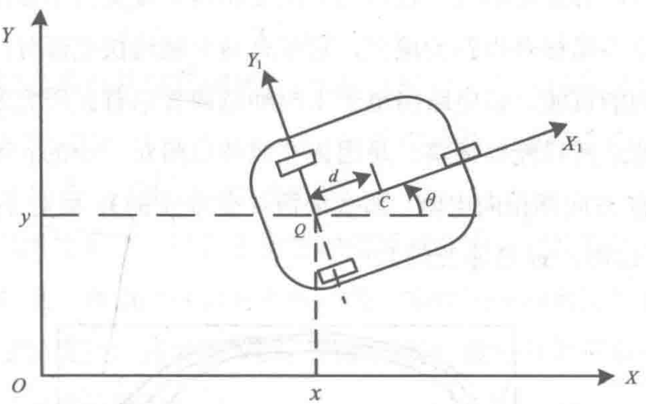

图 1.2　移动机器人示意图

例 1.3　范德普尔振荡电路

考虑如图 1.3 所示的范德普尔振荡电路，其中，L、C 为线性；R 为非线性；$i=\alpha v(v^2-1)(\alpha>0)$。设电感电流 i_L 和电容电压 v_C 为状态变量，则可得该电路的方程为：

$$\begin{cases}C\dot{v}_C=-i_L+i_R(v_C)\\ L\dot{i}_L=v_C\end{cases} \tag{1.4}$$

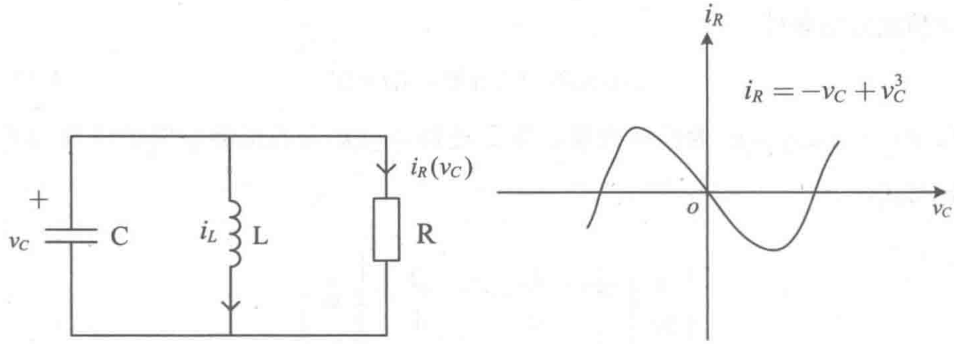

图 1.3　范德普尔振荡电路

从图 1.4 中可以看出，在初始点处的平衡点是不稳定的，并被一个极限环（孤立的周期解）所包围，从所有初始点出发的解似乎都收敛于这个极限环。当 C 逐渐减小时，相轨迹是如何变化的呢？对于非常小的电容值，形成了如图 1.5 所示的振荡形式，它由两个快变和两个慢变的部分组成。这就是所谓的不稳定多谐振荡电路的原型，它带有两个轨迹快变部分，表征在两个逻辑状态之间的过渡。该电路由电子工程师范德普尔首先研究发现。范德普尔认为，电路之所以能够振荡，是因为非线性电阻对于小的 v 和 i 是“主动”的（若 v 和 i 的方向都指向电阻，那么乘积 vi 是非正的）；而对于大的 v 和 i 是“被动”的（比如，vi 是非负的）。

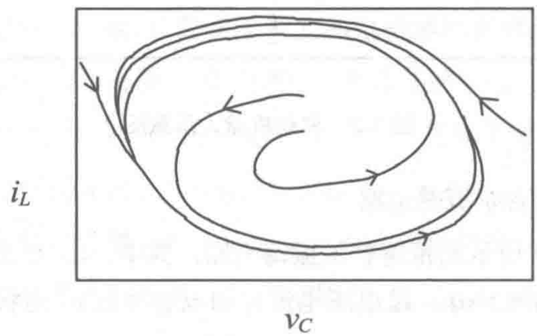

图 1.4　范德普尔振荡电路相轨迹图

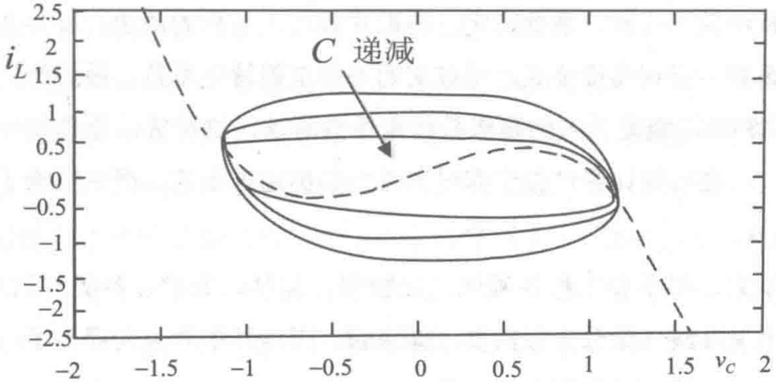

图 1.5　C 减小时的范德普尔振荡电路相轨迹图

为了理解范德普尔振荡器极限环对于小的电容值存在快变部分，令 C=0，则此时系统（1.4）变为一个微分代数系统：

$$\begin{cases} 0 = -i_L + i_R(v_C) \\ L\dot{i}_L = v_C \end{cases} \tag{1.5}$$

因此，除非系统从特征曲线 $i_L = i_R(v_C)$ 的一个节点跳到另一个节点（例如，有一个瞬时过渡），系统大部分时间是在该特征曲线上变化的。此时，系统（1.5）不存在关于时间 t 连续的解。

总之，非线性系统广泛存在于各种实际问题中，它具有许多与线性系统完全不同的特点。自 20 世纪 80 年代以来，非线性控制系统理论与应用研究取得了突破性的进展，其中起关键作用的是现代微分几何代数理论等现代数学工具在这一领域的成功应用。

1.3　非线性系统运动分析研究现状

非线性动力学系统近似分析最早采用柯西级数方法。早在 1839—1842 年，柯西用优级数法成功建立了初值问题收敛的幂级数的存在和唯一性定理，为非线性微分方程幂级数解法奠定了理论基础。这种解法的过程为：首先设